ΔΙΑΛΕΞΗ 6

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

Περιεχόμενα διάλεξης:

Πεπερασμένα αθροίσματα

Διώνυμο του Νεύτωνα

ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΑ ΑΘΡΟΙΣΜΑΤΑ

Αν $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_n$ είναι πραγματικοί αριθμοί, τότε ορίζεται το πεπερασμένο άθροισμα

$$S_n = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n, \qquad n \in \mathbb{N}^*$$

Έτσι, είναι

$$S_1 = \alpha_1, \quad S_2 = \alpha_1 + \alpha_2, \quad S_3 = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = S_2 + \alpha_3$$

και γενικά

$$S_n = S_{n-1} + \alpha_n, \qquad \text{για } n \geq 2$$

Συμβολισμός Σίγμα

$$\sum_{k=1}^{n} \alpha_k = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n, \qquad n \in \mathbb{N}^*$$

Γραμμικές ιδιότητες αθροίσματος

- $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \lambda\alpha_k = \lambda \sum_{k=1}^{n} \alpha_k, \qquad \lambda \in \mathbb{R}$

δηλαδή $\lambda\alpha_1 + \lambda\alpha_2 + \cdots + \lambda\alpha_n = \lambda(\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n)$

- $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} (\alpha_k + \beta_k) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k + \sum_{k=1}^{n} \beta_k,$

δηλαδή

$$(\alpha_1 + \beta_1) + \cdots + (\alpha_n + \beta_n) = (\alpha_1 + \cdots + \alpha_n) + (\beta_1 + \cdots + \beta_n)$$

Παραδείγματα αθροισμάτων

- $\sum_{k=1}^{n} c = c + c + \cdots + c = nc, \qquad c \in \mathbb{R}$
- $\sum_{k=1}^{n} k = 1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$
- $\sum_{k=1}^{n} k^2 = 1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
- $\sum_{k=1}^{n} k^3 = 1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$

Οι τρεις τελευταίες ταυτότητες μπορούν να αποδειχθούν με επαγωγή (άσκηση).

Παρατηρήσεις

- Τα αθροίσματα δεν ξεκινούν υποχρεωτικά από το 1. Για παράδειγμα,

$$\sum_{k=3}^{6} \alpha_k = \alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5 + \alpha_6 = \sum_{k=1}^{4} \alpha_{k+2}$$

- Δεν έχει σημασία η μεταβλητή του αθροίσματος, αλλά τα άκρα του. Για παράδειγμα,

$$\sum_{m=3}^{6} \alpha_m = \sum_{k=3}^{6} \alpha_k = \sum_{\lambda=2}^{5} \alpha_{\lambda+1} = \sum_{k=1}^{4} \alpha_{k+2} = \alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5 + \alpha_6$$

Ο ΔΙΩΝΥΜΙΚΟΣ ΣΥΝΤΕΛΕΣΤΗΣ $\binom{\mathbf{x}}{\boldsymbol{\kappa}}$

Για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$ το γινόμενο όλων των στοιχείων του $[n]$ ονομάζεται **n παραγοντικό** ή **παραγοντικό του n** και σημειώνεται με $\mathbf{n!}$, δηλαδή

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n.$$

Προφανώς, $n! = n(n-1)!$.

Ειδικά ορίζεται $0! = 1$.

Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $\kappa \in \mathbb{N}^*$, ο αριθμός

$$\frac{x(x-1)\cdots(x-\kappa+1)}{\kappa!}$$

ονομάζεται **διωνυμικός συντελεστής** και σημειώνεται με $\binom{\mathbf{x}}{\boldsymbol{\kappa}}$ ή $\mathbf{C}_{\mathbf{x}}^{\boldsymbol{\kappa}}$, δηλαδή είναι

$$\binom{x}{\kappa} = \frac{x(x-1)\cdots(x-\kappa+1)}{\kappa!}.$$

Ειδικά για $\kappa = 0$, ορίζεται $\binom{x}{0} = 1$.

Παραδείγματα

- $$\binom{10}{4}=\frac{10(10-1)(10-2)(10-3)}{4!}=\frac{10\cdot 9\cdot 8\cdot 7}{2\cdot 3\cdot 4}=210$$

- $$\binom{-3}{4}=\frac{-3(-3-1)(-3-2)(-3-3)}{4!}=\frac{(-3)(-4)(-5)(-6)}{2\cdot 3\cdot 4}=15$$

- $$\binom{4}{4}=\frac{4(4-1)(4-2)(4-3)}{4!}=\frac{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}{2\cdot 3\cdot 4}=1$$

- $$\binom{4}{1}=\frac{4}{1!}=4$$

- $$\binom{2}{4}=\frac{2(2-1)(2-2)(2-3)}{4!}=0$$

Προφανώς, $\binom{n}{\kappa}=0$ για κάθε $n,\kappa\in\mathbb{N}^*$ με $\kappa>n$.

Επιπλέον, αν $x = n$ και $x = -n$ όπου $n \in \mathbb{N}^*$ ισχύει ότι

$$\binom{n}{\kappa} = \frac{n!}{\kappa!(n-\kappa)!}, \text{ όπου } \kappa \leq n$$

και

$$\binom{-n}{\kappa} = (-1)^{\kappa} \binom{n+\kappa-1}{\kappa}.$$

Είναι γνωστό ότι οι αριθμοί $\binom{n}{\kappa}$ και $\left|\binom{-n}{\kappa}\right|$ εκφράζουν αντίστοιχα τους αριθμούς των συνδυασμών και επαναληπτικών συνδυασμών n στοιχείων ενός συνόλου ανά κ.

Οι αριθμοί $\binom{x}{\kappa}$ εμφανίσθηκαν πρώτη φορά, για $x \in \mathbb{N}$, ως συντελεστές του διωνύμου του Νεύτωνα, από το οποίο εξάλλου έλαβαν και το όνομά τους.

ΑΣΚΗΣΗ 37

Να αποδειχθούν οι σχέσεις:

(i) $\binom{n}{\kappa} = \dfrac{n!}{\kappa!(n-\kappa)!}$, για $\kappa \le n$,

(ii) $\binom{-n}{\kappa} = (-1)^{\kappa} \binom{n+\kappa-1}{\kappa}$,

όπου $n, \kappa \in \mathbb{N}^*$.

ΛΥΣΗ

(i) Είναι

$$\binom{n}{\kappa} = \frac{n(n-1)\cdots(n-\kappa+1)}{\kappa!}$$

$$= \frac{n(n-1)\cdots(n-\kappa+1)(n-\kappa)(n-\kappa-1)\cdots 2\cdot 1}{\kappa!(n-\kappa)!}$$

$$= \frac{n!}{\kappa!(n-\kappa)!}.$$

(ii) $\binom{-n}{\kappa} = (-1)^{\kappa}\binom{n+\kappa-1}{\kappa}$.

Είναι

$$\binom{-n}{\kappa} = \frac{(-n)(-n-1)\cdots(-n-\kappa+1)}{\kappa!}$$

$$= (-1)^{\kappa}\frac{n(n+1)\cdots(n+\kappa-1)}{\kappa!}$$

$$= (-1)^{\kappa}\frac{(n+\kappa-1)(n+\kappa-1-1)\cdots(n+\kappa-1-\kappa+1)}{\kappa!}$$

$$= (-1)^{\kappa}\binom{n+\kappa-1}{\kappa}.$$

ΑΣΚΗΣΗ 38

Να αποδειχθούν οι τύποι:

α) $\binom{n}{\kappa}=\binom{n}{n-\kappa}$,

β) $\binom{n}{\kappa}=\binom{n-1}{\kappa}+\binom{n-1}{\kappa-1}$ **(Τρίγωνο του Pascal)**,

γ) $\kappa\binom{n}{\kappa}=n\binom{n-1}{\kappa-1}$,

για κάθε $n,\kappa\in\mathbb{N}^*$ με $\kappa\le n$.

ΛΥΣΗ

α) Αν τεθεί $n-\kappa$ αντί κ στον τύπο $\binom{n}{\kappa}=\dfrac{n!}{\kappa!(n-\kappa)!}$

προκύπτει ότι

$$\binom{n}{n-\kappa}=\frac{n!}{(n-\kappa)!(n-(n-\kappa))!}=\frac{n!}{(n-\kappa)!\kappa!}=\binom{n}{\kappa}.$$

β) $\binom{n}{\kappa}=\binom{n-1}{\kappa}+\binom{n-1}{\kappa-1}$ **(Τρίγωνο του Pascal)**,

Ισχύουν οι παρακάτω ισότητες:

$$\binom{n-1}{\kappa}+\binom{n-1}{\kappa-1}=\frac{(n-1)!}{\kappa!(n-1-\kappa)!}+\frac{(n-1)!}{(\kappa-1)!\big(n-1-(\kappa-1)\big)!}$$

$$=\frac{(n-1)!}{\kappa!(n-\kappa)!}(n-\kappa)+\frac{(n-1)!}{\kappa!(n-\kappa)!}\kappa$$

$$=\frac{(n-1)!}{\kappa!(n-\kappa)!}(n-\kappa+\kappa)=\frac{(n-1)!n}{\kappa!(n-\kappa)!}=\binom{n}{\kappa}.$$

γ) $\kappa\binom{n}{\kappa}=n\binom{n-1}{\kappa-1}$

Ισχύουν οι παρακάτω ισότητες:

$$\kappa\binom{n}{\kappa}=\kappa\frac{n!}{\kappa!(n-\kappa)!}=n\frac{(n-1)!}{(\kappa-1)!\big(n-1-(\kappa-1)\big)!}=n\binom{n-1}{\kappa-1}.$$

ΔΙΩΝΥΜΟ ΤΟΥ ΝΕΥΤΩΝΑ

Γνωρίζουμε ότι

$$(\alpha+\beta)^2=\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2=\sum_{k=0}^{2}\binom{2}{k}\alpha^{2-k}\beta^k$$

Πράγματι,

$$\sum_{k=0}^{2}\binom{2}{k}\alpha^{2-k}\beta^k=\binom{2}{0}\alpha^2\beta^0+\binom{2}{1}\alpha^1\beta^1+\binom{2}{2}\alpha^0\beta^2=\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2$$

Ομοίως προκύπτει ότι

$$(\alpha+\beta)^3=\alpha^3+3\alpha^2\beta+3\alpha\beta^2+\beta^3$$

$$=\binom{3}{0}\alpha^3\beta^0+\binom{3}{1}\alpha^2\beta+\binom{3}{2}\alpha\beta^2+\binom{3}{3}\alpha^0\beta^3=\sum_{k=0}^{3}\binom{3}{k}\alpha^{3-k}\beta^k$$

Γενικά, ισχύει ο ακόλουθος τύπος:

Τύπος του διωνύμου του Νεύτωνα

Για κάθε $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ και $n\in\mathbb{N}$ ισχύει ότι

$$\boldsymbol{(\alpha+\beta)^n=\sum_{\kappa=0}^{n}\binom{n}{\kappa}\alpha^{n-\kappa}\beta^{\kappa}.}$$

Παρατήρηση

Αν στον τελευταίο τύπο τεθεί $\lambda = n - \kappa$, προκύπτει ότι

$$(\alpha+\beta)^n = \sum_{\kappa=0}^{n}\binom{n}{\kappa}\alpha^{n-\kappa}\beta^{\kappa} = \sum_{\lambda=0}^{n}\binom{n}{n-\lambda}\alpha^{\lambda}\beta^{n-\lambda} = \sum_{\kappa=0}^{n}\binom{n}{\kappa}\alpha^{\kappa}\beta^{n-\kappa}$$

Ασκήσεις

1. Να ευρεθεί ο συντελεστής του $\alpha^4\beta^8$ στο ανάπτυγμα του αθροίσματος $(\alpha+\beta)^{12}$.

   Λύση: Γενικά, ο συντελεστής του $\alpha^{n-k}\beta^{k}$ στο $(\alpha+\beta)^n$ ισούται με $\binom{n}{k}$. Εφαρμόζοντας για $n=12$ και $k=4$, προκύπτει ότι ο συντελεστής του $\alpha^4\beta^8$ θα ισούται με $\binom{12}{8} = \frac{12!}{4!8!} = \frac{9 \cdot 10 \cdot 11 \cdot 12}{2 \cdot 3 \cdot 4} = 9 \cdot 5 \cdot 11 = 495$

2. Να ευρεθεί ο συντελεστής του $\alpha^6\beta^8$ στο ανάπτυγμα του αθροίσματος $(\alpha+\beta)^{14}$.
3. Να ευρεθεί ο συντελεστής του $\alpha\beta^{333}$ στο ανάπτυγμα του αθροίσματος $(\alpha+\beta)^{334}$.

4. Να ευρεθεί ο όρος που δεν περιέχει α στο ανάπτυγμα του αθροίσματος $\left(\alpha^2+\frac{1}{\alpha}\right)^9$.

Λύση: Είναι

$$\left(\alpha^2+\frac{1}{\alpha}\right)^9=\sum_{k=0}^{9}\binom{9}{k}(\alpha^2)^{9-k}\left(\frac{1}{\alpha}\right)^k=\sum_{k=0}^{9}\binom{9}{k}\alpha^{18-3k}$$

Επομένως, ο γενικός όρος δεν περιέχει α αν και μόνο αν $18-3k=0$, δηλαδή όταν $k=6$. Ο όρος αυτός ισούται με $\binom{9}{6}=\frac{9!}{6!\cdot 3!}=\frac{7\cdot 8\cdot 9}{2\cdot 3}=7\cdot 4\cdot 3=84$

5. Να αποδειχθεί ότι ο 27 διαιρεί τον ακέραιο $S_n = 10^n + 18n - 1$, για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$.

Λύση: Εφαρμόζοντας τον τύπο του διωνύμου του Νεύτωνα, έχουμε ότι

$$S_n = 10^n + 18n - 1 = (1+9)^n + 18n - 1 = 18n - 1 + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 9^k$$

$$= 18n - 1 + 1 + 9n + \sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} 9^k = 27n + \sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} 3^{2k}$$

$$= 27\left(n + \sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} 3^{2k-3} \right)$$

Αφού ο $2k-3$ είναι θετικός ακέραιος, για κάθε $k \in \{2,3,\ldots,n\}$, έπεται ότι η τελευταία παρένθεση είναι ακέραιος και άρα ο S_n είναι πολλαπλάσιο του 27.

Παρατήρηση: Η τελευταία άσκηση μπορεί να λυθεί και με επαγωγή.

Υπολογισμός αθροισμάτων

Δια εφαρμογής του διωνύμου του Νεύτωνα,

$$(\alpha+\beta)^{n}=\sum_{\kappa=0}^{n}\binom{n}{\kappa}\alpha^{n-\kappa}\beta^{\kappa}$$

μπορούν αν υπολογισθούν τα αθροίσματα:

$$S_1=\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\cdots+\binom{n}{n},$$

$$S_2=\binom{n}{0}-\binom{n}{1}+\binom{n}{2}-\cdots+(-1)^{n}\binom{n}{n},$$

$$S_3=\binom{n}{0}+\binom{n}{2}+\binom{n}{4}+\cdots$$

$$S_4=\binom{n}{1}+\binom{n}{3}+\binom{n}{5}+\cdots$$

Σημειώνεται ότι τα αθροίσματα S_3, S_4 δεν είναι άπειρα αθροίσματα, αφού $\binom{n}{k}=0$, όταν $k>n$, δηλαδή μπορούν να γραφτούν στη μορφή

$$S_3 = \binom{n}{0} + \binom{n}{2} + \binom{n}{4} + \cdots + \binom{n}{2\left[\frac{n}{2}\right]},$$

$$S_4 = \binom{n}{1} + \binom{n}{3} + \binom{n}{5} + \cdots + \binom{n}{2\left[\frac{n-1}{2}\right]+1},$$

Για παράδειγμα, για n = 10, έχουμε

$$\mathrm{S}_3 = \binom{10}{0} + \binom{10}{2} + \binom{10}{4} + \binom{10}{6} + \binom{10}{8} + \binom{10}{10}$$

$$\mathrm{S}_4 = \binom{10}{1} + \binom{10}{3} + \binom{10}{5} + \binom{10}{7} + \binom{10}{9}$$

$$S_1 = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \cdots + \binom{n}{n},$$

$$S_2 = \binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \cdots + (-1)^n \binom{n}{n},$$

$$S_3 = \binom{n}{0} + \binom{n}{2} + \binom{n}{4} + \cdots, \qquad S_4 = \binom{n}{1} + \binom{n}{3} + \binom{n}{5} + \cdots$$

Προφανώς είναι $S_3 + S_4 = S_1$ και $S_3 - S_4 = S_2$.
Αν εφαρμοσθεί ο τύπος του διωνύμου του Νεύτωνα δύο φορές για $\alpha = \beta = 1$ και $\alpha = 1,\ \beta = -1$, τότε προκύπτουν αντίστοιχα

$$2^n = (1+1)^n = \sum_{\kappa=0}^{n} \binom{n}{\kappa} 1^{n-\kappa} 1^{\kappa} = S_1$$

και

$$0 = (1-1)^n = \sum_{\kappa=0}^{n} \binom{n}{\kappa} 1^{n-\kappa} (-1)^{\kappa} = S_2.$$

Επομένως, $S_3 + S_4 = S_1 = 2^n$ και $S_3 - S_4 = S_2 = 0$, άρα $S_3 = S_4 = 2^{n-1}$.

Ο τύπος του διωνύμου του Νεύτωνα γενικεύεται και στην περίπτωση που ο εκθέτης του $\alpha + \beta$ είναι τυχαίος πραγματικός αριθμός.

ΑΣΚΗΣΗ 39

Να αποδειχθεί ο τύπος του διωνύμου του Νεύτωνα.

ΛΥΣΗ

Θα αποδειχθεί επαγωγικά ότι

$$(\alpha+\beta)^n = \sum_{\kappa=0}^{n} \binom{n}{\kappa} \alpha^{n-\kappa}\beta^{\kappa}$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$.

Για $n=1$, η αποδεικτέα σχέση γίνεται

$$(\alpha+\beta)^1 = \sum_{\kappa=0}^{1} \binom{1}{\kappa} \alpha^{1-\kappa}\beta^{\kappa} \Leftrightarrow$$

$$\alpha+\beta = \binom{1}{0} \alpha^{1-0}\beta^{0} + \binom{1}{1} \alpha^{1-1}\beta^{1} \Leftrightarrow$$

$$\alpha+\beta = \alpha+\beta$$

που ισχύει.

Υποθέτουμε ότι ισχύει για $n=m$, δηλαδή

$$(\alpha+\beta)^m = \sum_{\kappa=0}^{m} \binom{m}{\kappa} \alpha^{m-\kappa}\beta^{\kappa}$$

και θα αποδειχθεί ότι ισχύει για $n=m+1$, δηλαδή

$$(\alpha+\beta)^{m+1} = \sum_{\kappa=0}^{m+1} \binom{m+1}{\kappa} \alpha^{m+1-\kappa}\beta^{\kappa}.$$

Πραγματικά, είναι

$$
\begin{aligned}
(\alpha+\beta)^{m+1} &= (\alpha+\beta)(\alpha+\beta)^{m} \\
&= (\alpha+\beta)\sum_{\kappa=0}^{m}\binom{m}{\kappa}\alpha^{m-\kappa}\beta^{\kappa} \\
&= \sum_{\kappa=0}^{m}\binom{m}{\kappa}\alpha^{m+1-\kappa}\beta^{\kappa} + \sum_{\kappa=0}^{m}\binom{m}{\kappa}\alpha^{m-\kappa}\beta^{\kappa+1} \\
&\overset{\lambda=\kappa+1}{=} \sum_{\kappa=0}^{m}\binom{m}{\kappa}\alpha^{m+1-\kappa}\beta^{\kappa} + \sum_{\lambda=1}^{m+1}\binom{m}{\lambda-1}\alpha^{m+1-\lambda}\beta^{\lambda} \\
&= \alpha^{m+1} + \sum_{\kappa=1}^{m}\binom{m}{\kappa}\alpha^{m+1-\kappa}\beta^{\kappa} + \sum_{\kappa=1}^{m}\binom{m}{\kappa-1}\alpha^{m+1-\kappa}\beta^{\kappa} + \beta^{m+1} \\
&= \sum_{\kappa=1}^{m}\left(\binom{m}{\kappa}+\binom{m}{\kappa-1}\right)\alpha^{m+1-\kappa}\beta^{\kappa} + \alpha^{m+1} + \beta^{m+1} \\
&= \sum_{\kappa=0}^{m+1}\binom{m+1}{\kappa}\alpha^{m+1-\kappa}\beta^{\kappa}.
\end{aligned}
$$

Άρα η αποδεικτέα σχέση ισχύει και για $n = m+1$, οπότε τελικά θα ισχύει για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$.

ΑΣΚΗΣΗ 40

Να υπολογισθεί η τιμή των αθροισμάτων:

α) $S = \binom{n}{1} + 2\binom{n}{2} + 3\binom{n}{3} + \cdots + n\binom{n}{n} = \sum_{\kappa=1}^{n} \kappa \binom{n}{\kappa}$,

β) $T = 1 + \frac{1}{2}\binom{n}{1} + \frac{1}{3}\binom{n}{2} + \cdots + \frac{1}{n+1}\binom{n}{n} = \sum_{\kappa=0}^{n} \frac{1}{\kappa+1}\binom{n}{\kappa}$.

ΛΥΣΗ

α) Χρησιμοποιώντας τον τύπο $\kappa\binom{n}{\kappa} = n\binom{n-1}{\kappa-1}$

προκύπτει ότι

$$S = \sum_{\kappa=1}^{n} \kappa \binom{n}{\kappa} = \sum_{\kappa=1}^{n} n \binom{n-1}{\kappa-1} = n\sum_{\kappa=1}^{n} \binom{n-1}{\kappa-1}$$

$$\overset{\lambda=\kappa-1}{=} n\sum_{\lambda=0}^{n-1} \binom{n-1}{\lambda} = n\sum_{\kappa=0}^{n-1} \binom{n-1}{\kappa} = n \cdot 2^{n-1}.$$

β) Χρησιμοποιώντας τον τύπο $\frac{1}{\kappa+1}\binom{n}{\kappa}=\frac{1}{n+1}\binom{n+1}{\kappa+1}$ προκύπτει ότι

$$T=\sum_{\kappa=0}^{n}\frac{1}{\kappa+1}\binom{n}{\kappa}=\sum_{\kappa=0}^{n}\frac{1}{n+1}\binom{n+1}{\kappa+1}$$

$$\overset{\lambda=\kappa+1}{=}\frac{1}{n+1}\sum_{\lambda=1}^{n+1}\binom{n+1}{\lambda}=\frac{1}{n+1}\sum_{\kappa=1}^{n+1}\binom{n+1}{\kappa}$$

$$=\frac{1}{n+1}\left(\sum_{\kappa=0}^{n+1}\binom{n+1}{\kappa}-\binom{n+1}{0}\right)=\frac{2^{n+1}-1}{n+1}.$$

ΑΛΥΤΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

ΑΣΚΗΣΗ 53

Να υπολογισθούν τα αθροίσματα:

α) $S=1-\frac{1}{2}\binom{n}{1}+\frac{1}{3}\binom{n}{2}-\cdots+(-1)^n\frac{1}{n+1}\binom{n}{n}$,

β) $T=n-4\binom{n}{2}+9\binom{n}{3}-\cdots+(-1)^{n-1}n^2\binom{n}{n}$.

ΑΣΚΗΣΗ 54

Να υπολογισθούν τα αθροίσματα:

α) $\sum_{\kappa=0}^{n}\frac{\kappa-5}{\kappa+1}\binom{n}{\kappa}$, β) $\sum_{\kappa=0}^{n}\frac{\kappa^2+\kappa+1}{\kappa+1}\binom{n}{\kappa}$.