ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΗ ΑΛΓΕΒΡΑ

3/03/2018 1ο φροντ.

• ΑΣΚΗΣΗ 1

Να μετασχηματιστούν σε R-ισοδύναμες ανηγμένες κλιμακωτές μήτρες οι παρακάτω μήτρες.

Υπενθ. - $R_i \leftrightarrow R_j$: ανταλλαγή γραμμών i με j.
- $R_i \to \lambda R_i$: πολ/μος R γραμμής λ φορές. $\lambda \in \mathbb{R}^*$.
- $R_i \to R_i + \lambda R_j$ προσθέτει στην πρώτη γραμμή λ φορές την j-γραμμή.

α) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \\ 3 & 2 & 2 \\ 5 & 4 & 0 \end{bmatrix}$

→ Αλγόριθμος του Gauss.

• Παίρνω το 1 στη στήλη 1 και το αφήνω όπως έχει αφού με βολεύει.

• Ύστερα θέλω όλα τα άλλα στοιχεία της στήλης να γίνουν 0.

$$A \xrightarrow[R_4 \to R_4 - 5R_1]{\substack{R_2 \to R_2 - 2R_1 \\ R_3 \to R_3 - 3R_1}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -3 & 1 \\ 0 & -1 & 5 \\ 0 & -1 & 5 \end{bmatrix} \sim$$

(οι πράξεις γίνονται με βοήθεια της πρώτης γραμμής)

[χρησιμοποίησα την πρώτη στήλη άρα δεν ξαναχρησιμοποιώ στοιχεία της 1ης γραμμής].

$$\xrightarrow{R_2 \leftrightarrow R_3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 5 \\ 0 & -3 & 1 \\ 0 & -1 & 5 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_2 \to (-1) R_2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -5 \\ 0 & -3 & 1 \\ 0 & -1 & 5 \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{R_3 \to R_3 + 3R_2 \\ R_4 \to R_4 + 1R_2}]{R_1 \to R_1 + (-1) R_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & -14 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_3 \to \frac{1}{-14} R_3}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[R_2 \to R_2 + 5R_3]{R_1 \to R_1 - 4R_3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

β)

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 2 & -4 & 8 \\ 1 & -2 & 7 & -2 \\ 3 & 1 & 0 & 8 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_1 \to 1/2\, R_1} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & 4 \\ 1 & -2 & 7 & -2 \\ 3 & 1 & 0 & 8 \end{bmatrix} \xrightarrow[R_3 \to R_3 - 3R_1]{R_2 \to R_2 - R_1} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & 4 \\ 0 & -3 & 9 & -6 \\ 0 & -2 & 6 & -4 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_2 \to \frac{1}{-3} R_2}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & -3 & 2 \\ 0 & -2 & 6 & -4 \end{bmatrix} \xrightarrow[R_1 \to R_1 - R_2]{R_3 \to R_3 + 2R_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

• ΆΣΚΗΣΗ 2.

Να βρεθεί η αντίστροφη μήτρα εάν υπάρχει της

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 5 & -1 & a \end{bmatrix} \qquad a \in \mathbb{R}$$

Υπενθ. Αν η A είναι R-ισοδύναμη με το I_3 τότε οι πράξεις που μετασχηματίζουν την A στην I_3, εάν εφαρμοστούν πάνω στην I_3, μετασχηματίζουν την I_3 στην $\boxed{A^{-1}}$.
Εάν η A ΔΕΝ ΕΙΝΑΙ R-ισοδύναμη με την I_3 τότε η A ΔΕΝ ΕΧΕΙ αντίστροφη.

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 3 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & -1 & a & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_2} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 5 & -1 & a & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[R_2 \to R_3 - 5R_1]{R_2 \to R_2 - 2R_1}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & -6 & a-5 & 0 & -5 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[R_3 \to R_3 + 6R_2]{R_1 \to R_1 - R_2} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & a-11 & 6 & -17 & 1 \end{array}\right]$$

- Αν το $a = 11$ ο πίνακας ΔΕΝ ΑΝΤΙΣΤΡΕΦΕΤΑΙ
- Αν $a \neq 11$ τότε συνεχίζουμε $\xrightarrow{R_3 \to \frac{1}{a-11} R_3}$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{6}{a-11} & \frac{-17}{a-11} & \frac{1}{a-11} \end{array}\right] \xrightarrow[R_2 \to R_2 + R_3]{R_1 \to R_1 - 2R_3} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1-\frac{12}{a-11} & 3+\frac{34}{a-11} & \frac{-2}{a-11} \\ 0 & 1 & 0 & 1+\frac{6}{a-11} & -2+\frac{-17}{a-11} & \frac{1}{a-11} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{6}{a-11} & \frac{-17}{a-11} & \frac{1}{a-11} \end{array}\right]$$

$\downarrow$ I_3 $\qquad\qquad$ $\downarrow$ A^{-1}

Επομένως αν $a \neq 11$ έχουμε την παραπάνω A^{-1}.

ΑΣΚΗΣΗ 3

Να βρεθεί ο αριθμός των πολ/μων (και των προσθέσεων) για τον υπολογισμό του γινομένου $C = A \cdot B$, όταν οι διαστάσεις των A, B είναι

α) $A: 1 \times n$ $\quad B: n \times 1$

Το αποτέλεσμα είναι πίνακας 1×1.

$A = [a_{1p}]$ $\quad B = [b_{p1}]$ $\quad C = [c_{11}]$

$c_{11} = \sum_{p=1}^{n} a_{1p} \cdot b_{p1}$ $\rightarrow$ n πολ/μοι

και $n-1$ προσθέσεις.

β) $A: m \times n$ $\quad B: n \times k$

Ο πίνακας $C = A \cdot B$ έχει διαστάσεις $m \times k$, άρα έχει $m \cdot k$ στοιχεία

Για να βρούμε το στοιχείο c_{ij} του C έχουμε:

$\boxed{c_{ij} = \sum_{p=1}^{n} a_{ip} \cdot b_{pj}}$ άρα χρησιμοποιούμε $\boxed{n}$ πολ/μους. Άρα, για να βρούμε όλα τα στοιχεία του C απαιτούνται $m \cdot n \cdot k$ πολ/μοι.

Παράδειγμα:

$A: 7 \times 3$ $\quad \rightarrow$ απαιτούνται $7 \cdot 3 \cdot 10$ πολ/μοι

$B: 3 \times 10$ $\qquad = 210$.

$A: 10 \times 2$ $\quad \rightarrow$ $10 \cdot 2 \cdot 1 = 20$ πολ/μοι.

$B: 2 \times 1$

ΑΣΚΗΣΗ 4

Να βρεθεί ο βέλτιστος τρόπος για να υπολογισθεί το γινόμενο A B C D όπου οι διαστάσεις του καθενός είναι A: 5x2, B: 2x6, C: 6x4, D: 4x10.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ: Ο πολ/μος μητρών είναι προσεταιριστική πράξη, δηλ. μπορούμε να βάλουμε παρενθέσεις όπως θέλουμε εμείς (χωρίς να αλλάξουμε τη σειρά των μητρών).

(A B) (C D)

5x2 2x6 6x4 4x10

60 240 πολ/μοι

5x6 6x10

300 πολ/μοι

σύνολο 600 πολ/μοι

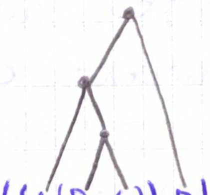
(((A · B) C) D)

60

120
5x4

200

σύνολο 380 πολ/μοι



((A (B · C)) D)

48
2x4

40
5x4

200

σύνολο 288 πολ/μοι

(A ((B · C) D))

48

80

100

228 πολ/μοι

(A (B (C · D)))

240

120

100

σύνολο: 460 πολ/μοι.

ΣΧΟΛΙΟ: Αν είχαμε 5 πίνακες, υπάρχουν 14 τρόποι για να τους συνδυάσουμε.

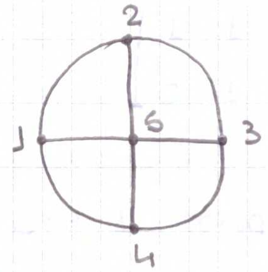
6 πίνακες → 42 συνδ.

7 πίνακες → 132 συνδ.

n πίνακες → C_{n-1} τρόποι (αριθμός Καταλάν).

ΑΣΚΗΣΗ 5

Ένα πιόνι κινείται τυχαία στις κορυφές του γραφήματος:



. Την χρονική στιγμή $t=0$ βρίσκεται στην κορυφή 1.
Αν την χρονική στιγμή $t=k$ βρίσκεται στην κορυφή v η οποία έχει ρ γείτονες, τότε την χρονική στιγμή $t=k+1$ μεταβαίνει σε έναν από τους ρ γείτονες (με πιθανότητα $1/\rho$).

. Να βρεθεί η πιθανότητα, να βρίσκεται τη χρονική στιγμή $t=11$ στην κορυφή 5.

Η ζητούμενη πιθανότητα ισούται με το πηλίκο:

$$\frac{\text{αριθμός διαδρομών μήκους 11 από το 1 στο 5}}{\text{αριθμός διαδρομών μήκους 11 από το 1 σε οποιαδήποτε κορυφή}}$$

Θα αποδείξουμε την εξής πρόταση:

Αν M είναι η μήτρα γειτνίασης ενός γραφήματος δεσμών $G=(V,E)$ τότε το στοιχείο $a_{ij}(n)$ της μήτρας $A(n)=M^n$ ισούται με τον αριθμό των διαδρομών μήκους n από την κορυφή i στην κορυφή j.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ: Θα χρησιμοποιήσω επαγωγή ως προς n.

- Για $n=1$ η πρόταση ισχύει.
- Έστω ότι η πρόταση ισχύει για $n=k$, δηλ. $a_{ij}(k) = \#$ διαδρομών μήκους k από το i στο j.
- Θα δείξουμε ότι η πρόταση ισχύει για $n=k+1$. Ισχύει ότι

$$A(k+1) = M^{k+1} = M^k \cdot M$$

άρα $a_{ij}(k+1) = \sum_{p=1}^{|V|} a_{ip}(k) \cdot M_{pj}$

κάθε διαδρομή μήκους $k+1$ από την κορυφή i στην κορυφή j προκύπτει από τις διαδρομές μήκους k που αρχίζουν από την κορυφή i και να καταλήγουν σε μια κορυφή p συν ένα επιπλέον βήμα από την κορυφή p στην κορυφή j (αν υπάρχει αυτό το βήμα).
Άρα η πρόταση ισχύει για $n=k+1$. Επομένως ισχύει για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$.

Επομένως αν M είναι η μήτρα γειτνίασης του γραφήματος, παίρνουμε το

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$M^{11} = \begin{bmatrix} \cdots \end{bmatrix}$$

Άρα η ζητούμενη πιθανότητα είναι:

$$\frac{91136}{2\cdot(73216+74240)+91136} = \frac{89}{377} \simeq 0,2360$$ Δηλ. περίπου 1 στα 4.

ΆΣΚΗΣΗ 6

Να βρεθεί ο βέλτιστος τρόπος για να υπολογίσουμε το γινόμενο A^n όπου A είναι 10×10 πίνακας όταν:

α) $n=32$

$$A^{32} = \underbrace{A\cdot A\cdot A\cdots A}_{32 \text{ φορές}} \qquad A\cdot A \to 10^3 \text{ πολ/μοί}$$

31 πολ/μοί Συνολικά: $31\cdot10^3$ πολ/μοί για να βρούμε το A^{32}

- Γρηγορότερος τρόπος;

Παρατηρώ το εξής:

$$\left.\begin{aligned} A^{32} &= A^{16}\cdot A^{16} && \to 10^3 \text{ πολ.} \\ A^{16} &= A^{8}\cdot A^{8} && \to 10^3 \text{ πολ.} \\ A^{8} &= A^{4}\cdot A^{4} && \to \text{—"—} \\ A^{4} &= A^{2}\cdot A^{2} && \to \text{—"—} \\ A^{2} &= A\cdot A && \to \text{—"—} \end{aligned}\right\} 5\cdot10^3 \text{ πολ.}$$

β) $n = 45$

<u>1ος τρόπος</u>

$A^{45} = A^{44} \cdot A$

$A^{44} = A^{22} \cdot A^{22}$

$A^{22} = A^{11} \cdot A^{11}$

$A^{11} = A^{10} \cdot A$

$A^{10} = A^{5} \cdot A^{5}$

$A^{5} = A^{4} \cdot A$

$A^{4} = A^{2} \cdot A^{2}$

$A^{2} = A \cdot A$

Σύνολο $8 \cdot 10^3$ πολ.

<u>2ος τρόπος</u>

$A^{45} = A^{40} \cdot A^{5}$

$A^{40} = A^{20} \cdot A^{20}$

$A^{20} = A^{10} \cdot A^{10}$

$A^{10} = A^{5} \cdot A^{5}$

$A^{5} = A^{4} \cdot A$

$A^{4} = A^{2} \cdot A^{2}$

$A^{2} = A \cdot A$

Σύνολο $7 \cdot 10^3$ πολ.

ΆΣΚΗΣΗ 7

Δίνονται οι μεταθέσεις του S_8 με

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 4 & 8 & 6 & 1 & 3 & 5 & 7 \end{pmatrix}$$

$\rho = (1\ 4\ 5\ 7)(3\ 8)$

$\tau = (1\ 5\ 7)(7\ 2\ 1)(3\ 4\ 5\ 7\ 1)(6\ 8\ 2).$

α) Να βρεθούν οι μεταθέσεις $\pi \circ \rho$ και $\rho \circ \pi$

$$\pi \circ \rho = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 6 & 4 & 7 & 1 & 5 & 3 & 2 & 8 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{array}{l} 1 \xrightarrow{\rho} 4 \xrightarrow{\pi} 6 \\ 2 \xrightarrow{\rho} x \xrightarrow{\pi} 4 \end{array}$$

πρώτα εφαρμόζονται οι ρ και μετά οι π.

$$\rho \circ \pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 5 & 3 & 6 & 4 & 8 & 7 & 1 \end{pmatrix}$$

β) Να βρεθούν οι ρ^{-1} και οι τ^{-1}

<u>1ος τρόπος</u>

$\rho = (1\ 4\ 5\ 7)(3\ 8)$

$$\rho = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 4 & 2 & 8 & 5 & 7 & 6 & 1 & 3 \end{pmatrix} \qquad \rho^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 7 & 2 & 8 & 1 & 4 & 6 & 5 & 3 \end{pmatrix}$$

<u>2ος τρόπος</u>

<u>Υπενθ.</u> Έστω κύκλος $\sigma = (a_1, a_2, a_3 \dots a_k)$ τότε $\sigma^{-1} = (a_k\ a_{k-1} \dots a_1)$

π.χ $(1\ 5\ 7\ 9)$, $(1\ 5\ 7\ 9)^{-1} = (9\ 7\ 5\ 1)$.

<u>Υπενθ.</u> $(\sigma \circ \tau)^{-1} = \tau^{-1} \circ \sigma^{-1}$

$(\sigma_1 \circ \sigma_2 \circ \dots \circ \sigma_\mu) = \sigma_\mu^{-1} \circ \dots \circ \sigma_2^{-1} \circ \sigma_1^{-1}$

Αφού, $\rho = (1\,4\,5\,7)(3\,8)$

$\rho^{-1} = ((1\,4\,5\,7) \circ (3\,8))^{-1}$

$= (3\,8)^{-1} \circ (1\,4\,5\,7)^{-1}$

$= (8\,3) \circ (7\,5\,4\,1)$

$\tau^{-1} = (6\,8\,2)^{-1} \circ (3\,4\,5\,7\,1)^{-1} \circ (7\,2\,1)^{-1} \circ (1\,5\,7)^{-1}$

$= (2\,8\,6) \circ (1\,7\,5\,4\,3) \circ (1\,2\,7) \circ (7\,5\,1)$

δ) Να εκφραστεί η τ σαν γινόμενο <u>ξένων</u> κύκλων.

ξεκινάμε από όποιο νούμερο θέλουμε

2 → 1

$\tau = (6\ 8\ 5\ 2\ 1)$

$(3\ 4\ 7\ 1)$

το 2 γυρίζει στο 6 άρα κλείνει ο κύκλος

δ) Να εξεταστεί αν οι μεταθέσεις π, ρ, τ είναι άρτιες ή περιττές.

Υπενθ. $(a_1, a_2, \ldots, a_{k-1}, a_k) = (a_1 a_k)(a_1 a_{k-1}) \ldots (a_1 a_2)$

$\rho = (1\ 4\ 5\ 7)(3\ 8)$
$= (1\ 7)(1\ 5)(1\ 4)(3\ 8)$

Η ρ γράφεται ως γινόμενο 4 μεταθέσεων άρα είναι άρτια.

$\tau = (6\ 8\ 5\ 2)(3\ 4\ 7\ 1) = (6\ 2)(6\ 5)(6\ 8)(3\ 1)(3\ 7)(3\ 4)$

6 μεταθέσεις → άρτια.

$\pi = (1\ 2\ 4\ 6\ 3\ 8\ 7\ 5) = (1\ 5)(1\ 7)(1\ 8)(1\ 3)(1\ 6)(1\ 4)(1\ 2)$

↳ 7 αντιμεταθέσεις → περιττή.

ε) να βρεθούν οι τάξεις των μεταθέσεων (SOS)

Υπενθ. Αν μια μετάθεση π γράφεται ως γινόμενο των ΞΕΝΩΝ κύκλων $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_k$ με μήκη $\ell_1, \ell_2, \ldots, \ell_k$ τότε η τάξη της π είναι το ΕΚΠ (ελάχιστο κοινό πολλαπλάσιο) των $\ell_1, \ell_2, \ldots, \ell_k$.

$\pi = (1\ 2\ 4\ 6\ 3\ 8\ 7\ 5)$ $\quad ord(\pi) = ΕΚΠ(8) = 8$

$\rho = (1\ 4\ 5\ 7)(3\ 8)$ $\quad ord(\rho) = ΕΚΠ(4, 2) = 4.$

$\tau = (6\ 8\ 5\ 2)(3\ 4\ 7\ 1)$ $\quad ord(\tau) = ΕΚΠ(4, 4) = 4.$

στ) Μια μετάθεση π είναι γινόμενο των ξένων κύκλων σ_1, με μήκος 380 και σ_2 με μήκος 460. Να βρεθεί η τάξη της π.

$ord(\pi) = ΕΚΠ(380, 460).$

Υπενθ. $ΕΚΠ(a, b) = \dfrac{a \cdot b}{ΜΚΔ(a, b)}$

Για να βρούμε το μκδ(460, 380):

$460 = 1 \cdot 380 + 80$

$380 = 4 \cdot 80 + 60$

$80 = 1 \cdot 60 + 20$

$60 = 3 \cdot 20 + 0 \longrightarrow$ μκδ(460, 380) = 20

Άρα, $\text{ΕΚΠ}(460, 380) = \dfrac{380 \cdot 460}{20} = 19 \cdot 460.$