ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΗ ΑΛΓΕΒΡΑ

12/05/2018 4ο ΦΡΟΝΤ.

Σήμερα: Ασκήσεις στα χαρακτηριστικά μεγέθη

$A_{n\times n}$ μήτρα, $X_{n\times 1}$ μήτρα και $\lambda\in\mathbb{R}$

Το σύστημα $AX=\lambda X \Leftrightarrow ((A-\lambda I_n)X=0_{n\times 1})$ ονομάζεται χαρακτηριστικό σύστημα της A.

$A-\lambda I_n$: χαρακτηριστική μήτρα της A.

$\det(A-\lambda I_n)$: χαρακτηριστικό πολυώνυμο της A (μεταβλητή το λ)

$\det(A-\lambda I_n)=0$: χαρακτηριστική εξίσωση της A.

Οι ρίζες λ_i της χαρακτηριστικής εξίσωσης ονομάζονται ιδιοτιμές της A*.
Για κάθε ιδιοτιμή λ_i το (ομογενές) χαρακτηριστικό σύστημα $(A-\lambda I_n)X=0$ έχει και μη μηδενικές λύσεις X οι οποίες ονομάζονται ιδιοδιανύσματα της A που αντιστοιχούν στην ιδιοτιμή λ_i. Ο χώρος που παράγουν τα ιδιοδιανύσματα αυτά ονομάζεται ιδιόχωρος της A που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή λ_i.

* Το (πολυ)σύνολο των ιδιοτιμών της A ονομάζεται φάσμα (spectrum) της A : sp(A).

ΑΣΚΗΣΗ 1

Έστω η μήτρα $A=\begin{bmatrix}3 & 2\\ 1 & 2\end{bmatrix}$

α) Να βρεθούν οι ιδιοτιμές & τα ιδιοδιανύσματα της A.

χαρακτηριστική εξίσωση: $|A-\lambda I_2|=0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix}3-\lambda & 2\\ 1 & 2-\lambda\end{vmatrix}=0 \Leftrightarrow (3-\lambda)(2-\lambda)-2=0$

$\Leftrightarrow \lambda^2-5\lambda+4=0$

Ιδιοτιμές (ρίζες) $\lambda_1;\lambda_2=\dfrac{5\pm\sqrt{25-4\cdot 4}}{2}=\dfrac{5\pm 3}{2}$ → $\lambda_1=4$, $\lambda_2=1$

Ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν στην ιδιοτιμή $\lambda_1 = 4$.

Έστω $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ τότε

$$\begin{bmatrix} 3-\lambda & 2 \\ 1 & 2-\lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \overset{\lambda=4}{\Longleftrightarrow} \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{matrix} -x_1 + 2x_2 = 0 \\ x_1 - 2x_2 = 0 \end{matrix} \Leftrightarrow x_1 = 2x_2$$

Άρα για $\lambda = 4$ το ιδιοδιάνυσμα είναι της μορφής $x = \begin{bmatrix} 2x_2 \\ x_2 \end{bmatrix} = x_2 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$, $x_2 \in \mathbb{R}^*$

Ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν στην ιδιοτιμή $\lambda_2 = 1$.

$$\begin{bmatrix} 3-\lambda & 2 \\ 1 & 2-\lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 0 \overset{\lambda=1}{\Longleftrightarrow} \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{matrix} 2x_1 + 2x_2 = 0 \\ x_1 + x_2 = 0 \end{matrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x_1 = -x_2$$

Άρα για $\lambda = 1$ τα ιδιοδιανύσματα είναι της μορφής $x = \begin{bmatrix} -x_2 \\ x_2 \end{bmatrix} =$

$= x_2 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $x_2 \in \mathbb{R}^*$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ: Οι ιδιοτιμές & τα ιδιοδιανύσματα της A μπορούν να φανούν χρήσιμα σε πολλά προβλήματα που σχετίζονται με τον πίνακα A.

β) Να βρεθεί η ορίζουσα της μήτρας $B = A^3 + 2A^2 - 5A + I_2$.

Υπενθ.: - Αν η μήτρα A έχει φάσμα $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ τότε για κάθε πολυώνυμο $p(x)$, η μήτρα $p(A)$ έχει φάσμα $p(\lambda_1), p(\lambda_2), \ldots, p(\lambda_n)$

- Αν η B έχει φάσμα $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ τότε $|B| = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \ldots \cdot \lambda_n$.

Η A έχει φάσμα $\lambda = 4$, $\lambda = 1$

Αν $p(x) = x^3 + 2x^2 - 5x + 1$, τότε $B = p(A)$

Άρα το φάσμα της B είναι $p(4)$, $p(1)$

$p(4) = 4^3 + 2 \cdot 4^2 - 5 \cdot 4 + 1 = 64 + 32 - 20 + 1 = 77$

$p(1) = 1^3 + 2\cdot 1^2 - 5\cdot 1 + 1 = -1$.

Επομένως, η ορίζουσα του $|B| = 77\cdot(-1) = -77 \neq 0$ άρα ο πίνακας B αντιστρέφεται.

γ) Να βρεθεί το διάνυσμα $Y = A^n \begin{bmatrix} 7 \\ -1 \end{bmatrix}$, όπου, $n \in \mathbb{N}^*$

Υπενθ.: Αν X είναι ιδιοδιάνυσμα που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή λ τότε $\boxed{AX = \lambda X}$ (δηλ. το X παραμένει πάνω στην ίδια ευθεία & αλλάζει μόνο μήκος ή φορά όσον πολ/στεί επί A).

Επομένως $A^n X = \lambda^n X$

$AX = \lambda X$, $A^2 X = A(AX) = A(\lambda X) = \lambda(AX) = \lambda\cdot\lambda X$.

$A^3 X = A(A^2 X) = A(\lambda^2 X) = \lambda^2(AX) = \lambda^3 X \ldots$ κ.ο.κ.

Τα ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν σε διαφορετικές ιδιοτιμές είναι γρ. ανεξάρτητα: $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ (και παράγουν το $\mathbb{R}^2$)

ΙΔΕΑ: Θα εκφράσουμε το διάνυσμα $\begin{bmatrix} 7 \\ -1 \end{bmatrix}$ ως γραμμικός συνδυασμός των $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$

Δηλ. $\begin{bmatrix} 7 \\ -1 \end{bmatrix} = c_1 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 2c_1 - c_2 = 7 \\ c_1 + c_2 = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c_1 = -1 - c_2 \\ 2(-1-c_2) - c_2 = 7 \end{cases} \Rightarrow$

$\begin{cases} -3c_2 = 9 \Leftrightarrow \boxed{c_2 = -3} \\ \boxed{c_1 = 2} \end{cases}$

Άρα $\begin{bmatrix} 7 \\ -1 \end{bmatrix} = 2\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} - 3\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$

Επομένως $A^n \begin{bmatrix} 7 \\ -1 \end{bmatrix} = A^n \left(2\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} - 3\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = 2A^n \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} - 3A^n \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} =$

$= 2\cdot 4^n \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} - 3\cdot 1^n \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4^{n+1} + 3 \\ 2\cdot 4^n - 3 \end{bmatrix}$

δ) Να εκφραστεί η αντίστροφη της A ως γραμμικός συνδυασμός των δυνάμεων της A.

Υπενθ.: κάθε μήτρα A ικανοποιεί την χαρακτ. της εξίσωση.

Είδαμε ότι η χαρ. εξίσωση της A είναι $\lambda^2 - 5\lambda + 4 = 0$

Άρα $A^2 - 5A + 4I_2 = \mathbb{O} \xleftrightarrow{\cdot A^{-1}} A - 5I_2 + 4A^{-1} = \mathbb{O} \Leftrightarrow A^{-1} = -\frac{1}{4}(A - 5I_2)$

ε) Να βρεθούν οι μήτρες $A^2, A^3, A^4, A^5, \ldots$

Ισχύει ότι $A^2 - 5A - 4I_2 = \mathbb{O}$

$\boxed{A^2 = 5A - 4I_2}$

$A^3 = A \cdot A^2 = A(5A - 4I_2) = 5A^2 - 4A = 5(5A - 4I_2) - 4A = \boxed{21A - 20I_2}$

$A^4 = A \cdot A^3 = A \cdot (21A - 20I_2) = 21A^2 - 20A = 21(5A - 4I_2) - 20A =$

$105A - 84I_2 - 20A = \boxed{80A - 84I_2}$

στ) Να βρεθεί η μήτρα $B = A^{2018} + 5A^{2017} - 6A^{2016} + I_2$

ΙΔΕΑ: $p(x) = x^{2018} + 5x^{2017} - 6x^{2016} + 1$

$q(x) = x^2 - 5x + 4$ (χαρ. πολυώνυμο).

Διαιρούμε το $p(x)$ με το $q(x)$ και προκύπτει

$$p(x) = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{πηλίκο}}}{\Pi(x)}\, q(x) + \underset{\substack{\uparrow \\ \text{υπόλοιπο βαθμού} \leq 1.}}{u(x)}$$

τότε $B = p(A) = \Pi(A)\, \underbrace{q(A)}_{0} + u(A) = u(A)$

$$\begin{array}{l|l}
x^{2018} + 5x^{2017} - 6x^{2016} + 1 & x^2 - 5x + 4 \\ \cline{2-2}
-x^{2018} + 5x^{2017} - 4x^{2016} & x^{2016} + 10x^{2015} \\ \cline{1-1}
\quad 10x^{2017} - 10x^{2016} + 1 & \\
-10x^{2017} - 50x^{2016} + 40x^{2015} & \\ \cline{1-1}
\quad \vdots &
\end{array}$$

→ Μας ενδιαφέρει το $u(x) = c_1 x + c_2$ που θα ναι ένα πολυώνυμο, και όπου x θα βάζουμε A, και αυτή είναι η απάντησή μας).

Να διαγωνοποιηθεί η μήτρα A

Υπενθ.: Η $n \times n$ μήτρα A διαγωνοποιείται αν έχει $\boxed{n}$ γρ. ανεξ. ιδιοδιανύσματα.

Εδώ έχουμε 2 γρ. ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα: $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ που αντιστοιχεί στο $\lambda = 4$ και $\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ που αντιστοιχεί στο $\lambda_2 = 1$

Άρα, η A διαγωνοποιείται, δηλ. γράφεται στη μορφή $\boxed{A = P \cdot D \cdot P^{-1}}$

όπου: $P \to$ μήτρα με στήλες τα ιδιοδιανύσματα

$D \to$ είναι διαγώνια μήτρα όπου στην κύρια διαγώνιο βρίσκονται οι αντίστοιχες ιδιοτιμές με την ίδια σειρά που έχουν τοποθετηθεί στην P τα ιδιοδιανύσματα.

Άρα $A = \underbrace{\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}}_{P} \underbrace{\begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}_{D} \cdot P^{-1}$

$P^{-1} = \begin{bmatrix} 1/3 & 1/3 \\ -1/3 & 2/3 \end{bmatrix}$

η) Να βρεθεί η μήτρα A^{2018}.

Υπενθ: Αν $A = P D P^{-1}$, D διαγώνια, τότε $A^k = P D^k P^{-1}$

Άρα $A^{2018} = P D^{2018} \cdot P^{-1} =$

$\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4^{2018} & 0 \\ 0 & 1^{2018} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/3 & 1/3 \\ -1/3 & 2/3 \end{bmatrix}$

ΑΣΚΗΣΗ 2

Να διαγωνοποιηθούν όπου είναι εφικτό οι πίνακες.

α) $A = \begin{bmatrix} 6 & 3 & -8 \\ 0 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & -3 \end{bmatrix}$

Χαρ. εξίσωση : $|A - \lambda I_3| = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 6-\lambda & 3 & -8 \\ 0 & -2-\lambda & 0 \\ 1 & 0 & -3-\lambda \end{vmatrix} = 0$ ανάπτ. ως $\Leftrightarrow$ προς 2γρ.

$\Leftrightarrow (-2-\lambda) \begin{vmatrix} 6-\lambda & -8 \\ 1 & -3-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow (\lambda+2)((6-\lambda)(-3-\lambda)+8) = 0 \Leftrightarrow (\lambda+2)(\lambda^2-3\lambda-10)=0$

$\Leftrightarrow (\lambda+2)(\lambda+2)(\lambda-5)=0$

Άρα οι ιδιοτιμές είναι $\lambda_1 = \lambda_2 = -2$ (διπλή) και $\lambda_3 = 5$ (απλή).

Ιδιοδιανύσματα

Ιδιοδιανύσματα για $\lambda_1 = \lambda_2 = -2$. Έστω $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} 6-\lambda & 3 & -8 \\ 0 & -2-\lambda & 0 \\ 1 & 0 & -3-\lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 8 & 3 & -8 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 8x_1 + 3x_2 - 8x_3 = 0 \\ x_1 - x_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \boxed{x_1 = x_3} \\ 3x_2 = 0 \Leftrightarrow \boxed{x_2 = 0} \end{cases}$$

Άρα το $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ 0 \\ x_1 \end{bmatrix} = x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, $x_1 \in \mathbb{R}^*$

Ο A δεν διαγωνοποιείται διότι για την ιδιοτιμή $\lambda_3 = 5$ (που είναι απλή) έχουμε 1 γρ. ανεξ. ιδιοδιάνυσμα.

Άρα, συνολικά, και για τις 3 : $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ θα έχουμε $1+1=2$ γρ. ανεξ. ιδιοδιανύσματα.

β) $A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$

χαρ. εξίσωση: $|A - \lambda I_3| = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 3-\lambda & -2 & 0 \\ -2 & 3-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 5-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow$

$(5-\lambda) \begin{vmatrix} 3-\lambda & -2 \\ -2 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow (5-\lambda)((3-\lambda)(3-\lambda)-4) = 0 \Leftrightarrow (5-\lambda)(9-3\lambda-3\lambda+\lambda^2-4) = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (5-\lambda)(\lambda^2 - 6\lambda + 5) = 0 \Leftrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 5$ και $\lambda_3 = 1$ είναι οι ιδιοτιμές.

<u>Ιδιοδιανύσματα</u>: Για $\lambda_1 = \lambda_2 = 5$ έστω $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} 3-\lambda & -2 & 0 \\ -2 & 3-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 5-\lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\begin{bmatrix} -2 & -2 & -2 \\ -2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} -2x_1 - 2x_2 = 0 \\ -2x_1 - 2x_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{matrix} -x_1 = x_2 \\ x_3 \in \mathbb{R} \end{matrix}$$

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ -x_1 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ -x_1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ x_3 \end{bmatrix} = x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Για $\lambda_3 = 1$

⋮

$$\begin{cases} 2x_1 - 2x_2 = 0 \\ -2x_1 + 2x_2 = 0 \\ 4x_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{matrix} \boxed{x_3 = 0} \\ \boxed{x_1 = x_2} \end{matrix}$$

Άρα,

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_1 \\ 0 \end{bmatrix} = x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Άρα, έχουμε 3 γρ. ανεξ. ιδιοδιανύσματα:

$$\begin{bmatrix}1\\-1\\0\end{bmatrix} \begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix} \begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}$$

άρα η μήτρα A διαγωνοποιείται και $\boxed{A = PDP^{-1}}$

$$P = \begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\-1 & 0 & 1\\0 & 1 & 0\end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix}5 & 0 & 0\\0 & 5 & 0\\0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

$P^{-1} \rightarrow$ το βρίσκουμε με Gauss.

Άσκηση 3

Να βρεθεί, αν υπάρχει μήτρα B ώστε $B^2 = \begin{bmatrix}3 & 2\\1 & 2\end{bmatrix}$

1ος τρόπος: Να λύσουμε σύστημα, το οποίο δεν είναι γραμμικό, άρα δεν λύνεται με τους γνωστούς τρόπους.

2ος τρόπος: Όπως είδαμε στην 1η άσκηση η μήτρα διαγωνοποιείται και

$$\begin{bmatrix}3 & 2\\1 & 2\end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix}2 & -1\\1 & 1\end{bmatrix}}_{P} \underbrace{\begin{bmatrix}4 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}}_{D} \underbrace{\begin{bmatrix}1/3 & 1/3\\-1/3 & 2/3\end{bmatrix}}_{P^{-1}}$$

Αν θέσουμε $B = P\begin{bmatrix}2 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}P^{-1}$ τότε $B^2 = \begin{bmatrix}3 & 2\\1 & 2\end{bmatrix}$

$$B^2 = P\begin{bmatrix}2 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}\cancel{P^{-1}P}\begin{bmatrix}2 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}P^{-1} = P\begin{bmatrix}2 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}^2 P^{-1} = P\begin{bmatrix}4 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}P^{-1} =$$

$$= \begin{bmatrix}3 & 2\\1 & 2\end{bmatrix}$$

Άλλη λύση: $B = P\begin{bmatrix}-2 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}P^{-1}$

$B = P\begin{bmatrix}-2 & 0\\0 & -1\end{bmatrix}P^{-1}$, $B = P\begin{bmatrix}2 & 0\\0 & -1\end{bmatrix}P^{-1}$

Αντίστοιχα, $B^3 = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$

Μια λύση $B = P \begin{bmatrix} \sqrt[3]{4} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} P^{-1}$

Μήτρες μετάβασης → transaction matrix.

Στοχαστική μήτρα → στήλες αθροίζουν στο 1.

Ιδιοτιμές θ πάντα το 1 και όλες οι άλλες ≤ 1 κατ' απόλυτη τιμή.