Διανυσματικοί χώροι

- $(V, +, \cdot)$ V: Σύνολο διανυσμάτων στο οποίο έχουμε ορίσει πρόσθεση διανυσμάτων και πολ/σμό διανύσματος επί $\lambda \in \mathbb{R}$ (π.χ. $\mathbb{R}^n$, $M_{n\times n}$)

- W υπόχωρος του V
Μη κενό υποσύνολο του V κλειστό ως προς $+$ και $\cdot$

- Γραμμικός συνδυασμός των $v_1, v_2, \dots, v_n$

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_n v_n \qquad \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$$

$\langle v_1, v_2, \dots, v_n \rangle$ = Το σύνολο όλων των γραμμικών συνδυασμών των $v_1, v_2, \dots, v_n$

γραμμική θήκη

Παρ/ση Η θήκη $\langle v_1, v_2, \dots, v_n \rangle$ είναι υπόχωρος.
Είναι ο μικρότερος υπόχωρος που περιέχει τα $v_1, v_2, \dots, v_n$

- Τα $v_1, v_2, \ldots, v_n$ ονομάζονται γραμμικώς εξαρτημένα αν κάποιο από αυτά είναι γραμμικός συνδυασμός των υπολοίπων
Αλλιώς, τα $v_1, v_2, \ldots, v_n$ ονομάζονται γραμμικώς ανεξάρτητα.

- Έλεγχος για γραμμική εξάρτηση ή ανεξαρτησία των $v_1, v_2, \ldots, v_n$

Θεωρούμε την εξίσωση

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots + \lambda_n v_n = 0$$

- Αν η εξίσωση εχει μοναδική λυση $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_n = 0$ τοτε $v_1, v_2, \ldots, v_n$ γρ. ανεξάρτητα
- Αν υπάρχουν και άλλες λυσεις τότε $v_1, v_2, \ldots, v_n$ γρ. εξαρτημένα.

- Βασική συνέπεια της γρ. ανεξαρτησίας

Αν $v = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots + \lambda_n v_n$
οπου $v_1, v_2, \ldots, v_n$ ειναι γρ. ανεξάρτητα, τότε $\boxed{\text{τα } \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \text{ ειναι μοναδικα}}$ και ονομάζονται συντεταγμένες του v ως προς τα $v_1, v_2, \ldots, v_n$

Άσκηση 1

Να εξετασθεί αν τα διανύσματα $v_1, v_2, v_3 \in \mathbb{R}^3$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα ή όχι, όταν

α) $v_1=(0,1,-3)$, $v_2=(-2,1,2)$, $v_3=(4,1,0)$

Θεωρούμε την εξίσωση

$$\boxed{\underline{\lambda_1} v_1 + \underline{\lambda_2} v_2 + \underline{\lambda_3} v_3 = 0} \Leftrightarrow$$

$$\lambda_1(0,1,-3) + \lambda_2(-2,1,2) + \lambda_3(4,1,0) = (0,0,0)$$

$$\Leftrightarrow (-2\lambda_2+4\lambda_3 \,,\, \lambda_1+\lambda_2+\lambda_3 \,,\, -3\lambda_1+2\lambda_2) = (0,0,0)$$

$$\begin{cases} -2\lambda_2+4\lambda_3=0 \\ \lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=0 \\ -3\lambda_1+2\lambda_2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_3=\frac{1}{2}\lambda_2 \\ \frac{2}{3}\lambda_2+\lambda_2+\frac{1}{2}\lambda_2=0 \\ \lambda_1=\frac{2}{3}\lambda_2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_2=0 \\ \lambda_1=0 \\ \lambda_3=0 \end{cases} \Leftrightarrow \lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=0$$

Μοναδική λύση

<u>Συμπέρασμα</u>: v_1, v_2, v_3 γρ. ανεξάρτητα

Παρ/ση Η εξίσωση

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 = 0 \quad (*)$$

γράφεται

$$\lambda_1 \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix}}_{v_1} + \lambda_2 \underbrace{\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}}_{v_2} + \lambda_3 \underbrace{\begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}}_{v_3} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{0}$$

ή ισοδύναμα

$$\begin{aligned} -2\lambda_2 + 4\lambda_3 &= 0 \\ \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 &= 0 \\ -3\lambda_1 + 2\lambda_2 \qquad &= 0 \end{aligned}$$

ή ισοδύναμα

$$\overset{A}{\begin{bmatrix} 0 & -2 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \\ -3 & 2 & 0 \end{bmatrix}} \overset{X}{\begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{bmatrix}} = \overset{0}{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}} \quad (*)$$

$v_1 \quad v_2 \quad v_3$

Ομογενές σύστημα

Άρα, αν $\det(A) \neq 0 \Rightarrow$ μοναδική λύση

$\Rightarrow v_1, v_2, v_3$ γρ. ανεξ

αν $\det(A) = 0 \Rightarrow$ άπειρες λύσεις

$\Rightarrow v_1, v_2, v_3$ γρ. εξαρτημένα

Συμπέρασμα

Για να ελέγξουμε αν $\boxed{n}$ διανύσματα του $\mathbb{R}^{\boxed{n}}$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα ή όχι μπορούμε να θεωρήσουμε την $\boxed{n \times n}$ μητρα A με στήλες τα $\boxed{n}$ διανυσματα

Αν $\det(A) \neq 0$, ~~τότε~~ $\Rightarrow$ γρ. ανεξ.

Αν $\det(A) = 0 \Rightarrow$ γρ. εξαρτημενα

β) $v_1=(2,1,-1)$, $v_2=(-1,2,3)$,
$v_3=(4,7,3)$

Θεωρούμε την ορίζουσα

$$D=\begin{array}{c}\begin{vmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 1 & 2 & 7 \\ -1 & 3 & 3 \end{vmatrix} = ?\\ \;\; v_1 \quad v_2 \quad v_3 \end{array}$$

Μετά από πράξεις προκύπτει ότι $D=0$
Άρα, τα v_1, v_2, V_3 είναι γραμμικώς εξαρτημένα.
Μια λύση (μετά από πράξεις)

$$-3v_1-2v_2+v_3=0 \Leftrightarrow$$

$$\boxed{v_3=3v_1+2v_2}$$

γ) $v_1 = (2, 5, 1)$

$v_2 = (3, 1, 2)$

2 διανυσματα του $\mathbb{R}^3 \Rightarrow$ όχι οριζουσα

$$\underline{\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 = 0} \Leftrightarrow$$

$$\lambda_1 (2, 5, 1) + \lambda_2 (3, 1, 2) = (0, 0, 0) \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} 2\lambda_1 + 3\lambda_2 = 0 \\ 5\lambda_1 + \lambda_2 = 0 \quad \Rightarrow -10\lambda_2 + \lambda_2 = 0 \Rightarrow \lambda_2 = 0 \\ \lambda_1 + 2\lambda_2 = 0 \quad \Rightarrow \lambda_1 = -2\lambda_2 \end{cases}$$

$\Rightarrow \underline{\lambda_1 = \lambda_2 = 0} \Rightarrow v_1, v_2$ γρ. ανεξ.

<u>Παρ)ση</u> Όταν εχουμε 2 διανυσματα v_1, v_2

τοτε $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 = 0 \overset{\lambda_1 \neq 0}{\Longleftrightarrow}$

$$v_1 = -\frac{\lambda_2}{\lambda_1} v_2 \Leftrightarrow v_1 = k\, v_2, \; k \in \mathbb{N}$$

δηλαδη το v_1 ειναι πολ/σιο του v_2

Δηλαδή για να ελέγξουμε αν δυο διανυσματα ειναι γρ. ανεξ. ή οχι αρκει να ελεγξουμε αν το ενα ειναι πολ/σιο του αλλου

$v_1 = (2, 3, 5) \qquad v_2 = (4, 8, 10)$ ΟΧΙ ΕΞΑΡΤΗΜΕΝΑ

$v_1 = (2, 7, -1) \qquad v_2 = (6, 21, -3)$ ΝΑΙ ΕΞΑΡΤΗΜΕΝΑ

$v_1 = (0, 7, \sqrt{5}) \qquad v_2 = (1, \sqrt{17}, \sqrt{35})$ ΟΧΙ ΕΞΑΡΤΗΜΕΝΑ

Άσκηση 2

Να δειχθεί ότι αν τα διανύσματα v_1, v_2, v_3 είναι γραμμικώς ανεξάρτητα τότε και τα διανύσματα

$u_1 = v_1 + 2v_2 - v_3$

$u_2 = v_1 + v_2 + v_3$

$u_3 = v_1 + 4v_2 + 3v_3$

είναι επίσης γρ. ανεξάρτητα

Θεωρούμε την εξίσωση

$$\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \lambda_3 u_3 = 0 \iff$$

$$\lambda_1 (v_1 + 2v_2 - v_3) + \lambda_2 (v_1 + v_2 + v_3) + \lambda_3 (v_1 + 4v_2 + 3v_3) = 0$$

$$(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3) v_1 + (2\lambda_1 + \lambda_2 + 4\lambda_3) v_2 + (-\lambda_1 + \lambda_2 + 3\lambda_3) v_3 = 0$$

$$\xRightarrow[v_3 \text{ γρ. ανεξ}]{v_1, v_2} \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ 2\lambda_1 + \lambda_2 + 4\lambda_3 = 0 \\ -\lambda_1 + \lambda_2 + 3\lambda_3 = 0 \end{cases} \quad \dots \quad \xLeftrightarrow[\text{πράξεις}]{} \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$$

$$\Downarrow$$

u_1, u_2, u_3 γρ. ανεξ.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \\ -1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = -8 \neq 0$$

Άσκηση 3

Να εξετασθεί ποια από τα παρακάτω σύνολα διανυσμάτων είναι υπόχωροι του $\mathbb{R}^3$

α) $W_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2=1\}$

Όχι, διότι $(0,0,0) \notin W_1$

Υπενθύμιση: W υπόχωρος V
$W \neq \emptyset$
$\forall v_1, v_2 \in W$ και $\forall \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$
$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 \in W$

β) $W_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x \geq 0\}$

Όχι, διότι $(10,1,2) \in W_2$ $(W_2 \neq \emptyset)$

όμως $-3 \cdot (10,1,2) \notin W_2$ δηλαδή W_2 δεν είναι κλειστό ως προς $\cdot$

Άρα W_2 δεν είναι υπόχωρος.

$\gamma)$ $W_3 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x+y+z = 0\}$

$W_3 \neq \emptyset$ αφου $(0,0,0) \in W_3$

Εστω $v_1 = (x,y,z) \in W_3$ $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$

$v_2 = (\alpha, b, c) \in W_3$

$$\lambda v_1 + \mu v_2 = (\lambda x + \mu\alpha, \lambda y + \mu b, \lambda z + \mu c)$$

Τότε

$$(\lambda x + \mu\alpha) + (\lambda y + \mu b) + (\lambda z + \mu c)$$

$$= \lambda(x+y+z) + \mu(\alpha + b + c) = 0 + 0 = 0$$

Άρα $\lambda v_1 + \mu v_2 \in W_3$

Δηλαδή W_3 κλειστό ως προς + και ·

Άρα W_3 υπόχωρος του $\mathbb{R}^3$.

Παρατηρήσεις για τον $\mathbb{R}^n$

Οι υποχώροι του $\mathbb{R}^n$ είναι σύνολα διανυσμάτων που αποτελούν λύσεις ομογενών γραμμικών συστημάτων.

$$W = \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \; AX = \mathbb{O} \}$$

όπου A $K\times 3$ μήτρα $X = (x,y,z)$ }

π.χ.

$$W = \left\{ \underline{(x,y,z)} \in \mathbb{R}^3 : \begin{aligned} x + 2y - z &= 0 \\ 2x + 3y &= 0 \end{aligned} \right\}$$

Πρόταση

Το σύνολο των λύσεων X ενός ομογενούς γραμμικού συστήματος είναι υπόχωρος του $\mathbb{R}^n$.

$$\underset{m\times n}{A} \; \underset{n\times 1}{X} = \underset{m\times 1}{\mathbb{O}} \qquad \left| \begin{aligned} AX_1 &= \mathbb{O} \\ AX_2 &= \mathbb{O} \\ \underline{A(\lambda X_1 + \mu X_2)} &= \mathbb{O} \end{aligned} \right.$$

Λύση. Χρησιμοποιώντας τον τριγωνομετρικό τύπο

$$\cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x,$$

προκύπτει ότι

$$< f_1, f_2, f_3 >=< f_1, f_2, -3f_1 + 4f_2 >=< f_1, f_2 > .$$

Στη συνέχεια, θα δειχθεί ότι οι f_1, f_2 είναι γραμμικώς ανεξάρτητες. Πράγματι, αν $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, τέτοια ώστε

$$\lambda_1 f_1(x) + \lambda_2 f_2(x) = 0 \Leftrightarrow \lambda_1 \cos x + \lambda_2 \cos^3 x = 0,$$

τότε, επειδή η τελευταία σχέση ισχύει για κάθε $x \in \mathbb{R}$, θέτοντας $x = 0$ και $x = \frac{\pi}{3}$, προκύπτουν αντίστοιχα οι σχέσεις

$$\begin{cases} \lambda_1 \cos 0 + \lambda_2 \cos^3 0 = 0 \\ \lambda_1 \cos \frac{\pi}{3} + \lambda_2 \cos^3 \frac{\pi}{3} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ \lambda_1 + \frac{\lambda_2}{4} = 0 \end{cases} \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 0,$$

οπότε οι f_1, f_2 είναι γραμμικώς ανεξάρτητες, και επομένως

$$\dim < f_1, f_2, f_3 >= \dim < f_1, f_2 >= 2. \qquad \square$$

Άσκηση 10. *Έστω $(V, +, \cdot)$ ο πραγματικός διανυσματικός χώρος των πραγματικών ακολουθιών με τις συνήθεις πράξεις των ακολουθιών. Να αποδειχθεί ότι το σύνολο*

Ομογενείς

$$W = \{(a_n) \in V : a_{n+2} = a_{n+1} + 2a_n\}$$

είναι ένας υπόχωρος του $(V, +, \cdot)$ και να βρεθεί μια βάση του.

Λύση. Προφανώς, $W \neq \varnothing$, αφού περιέχει την ακολουθία (a_n), με $a_n = 0$, για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$.

Επειδή, για κάθε $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ και $(a_n), (b_n) \in W$, για την ακολουθία $(c_n) = (\lambda a_n + \mu b_n)$ ισχύει ότι

$$\begin{aligned} c_{n+2} &= \lambda a_{n+2} + \mu b_{n+2} \\ &= \lambda(a_{n+1} + 2a_n) + \mu(b_{n+1} + 2b_n) \\ &= \lambda a_{n+1} + \mu b_{n+1} + 2(\lambda a_n + \mu b_n) \\ &= c_{n+1} + 2c_n, \end{aligned}$$

προκύπτει ότι $(c_n) \in W$, και επομένως το W είναι υπόχωρος του $(V, +, \cdot)$.

Για να βρεθεί μια βάση του W, αναζητούνται $\lambda \in \mathbb{R}^*$, για τα οποία η ακολουθία (λ^n) ανήκει στο W. Είναι

$$\begin{aligned} (\lambda^n) \in W &\Leftrightarrow \lambda^{n+2} = \lambda^{n+1} + 2\lambda^n \\ &\Leftrightarrow \lambda^2 = \lambda + 2 \\ &\Leftrightarrow \lambda = -1 \text{ ή } \lambda = 2. \end{aligned}$$

Άρα οι ακολουθίες $((-1)^n), (2^n)$ ανήκουν στο W.

Θα αποδειχθεί ότι $W =< ((-1)^n), (2^n) >$. Για το σκοπό αυτό, αρκεί να δειχθεί ότι, για κάθε ακολουθία $(a_n) \in W$, υπάρχουν $\mu, \nu \in \mathbb{R}$, τέτοια ώστε

$$a_n = \mu(-1)^n + \nu 2^n,$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$.

Εφαρμόζοντας την παραπάνω σχέση για $n = 1$ και $n = 2$, προκύπτει ότι

$$\begin{cases} -\mu + 2\nu = a_1 \\ \mu + 4\nu = a_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \mu = \frac{a_2 - 2a_1}{3} \\ \nu = \frac{a_1 + a_2}{6} \end{cases}$$

Άρα

$$a_n = \frac{a_2 - 2a_1}{3}(-1)^n + \frac{a_1 + a_2}{6}2^n, \tag{7.2}$$

για $n = 1$ και $n = 2$.

Θα αποδειχθεί επαγωγικά ότι η σχέση (7.2) ισχύει για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$. Πράγματι, αν ισχύει για $n = k$ και $n = k + 1$, όπου $k \in \mathbb{N}^*$, τότε θα ισχύει και για $n = k + 2$, αφού είναι

$$\begin{aligned} a_{k+2} = a_{k+1} + 2a_k &= \tfrac{a_2-2a_1}{3}(-1)^{k+1} + \tfrac{a_1+a_2}{6}2^{k+1} \\ &\quad + 2\left(\tfrac{a_2-2a_1}{3}(-1)^k + \tfrac{a_1+a_2}{6}2^k\right) \\ &= \tfrac{a_2-2a_1}{3}(-1)^k(-1+2) + \tfrac{a_1+a_2}{6}2^{k+1}(1+1) \\ &= \tfrac{a_2-2a_1}{3}(-1)^k + \tfrac{a_1+a_2}{6}2^{k+2} \\ &= \tfrac{a_2-2a_1}{3}(-1)^{k+2} + \tfrac{a_1+a_2}{6}2^{k+2}. \end{aligned}$$

Άρα, η σχέση (7.2) ισχύει για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$, και επομένως οι ακολουθίες $((-1)^n), (2^n)$ παράγουν τον υπόχωρο W.

Επιπλέον, οι ακολουθίες $((-1)^n), (2^n)$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητες. Πράγματι, αν $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, τέτοια ώστε

$$\lambda_1(-1)^n + \lambda_2 2^n = 0, \qquad n \in \mathbb{N}^*$$

τότε, εφαρμόζοντας την τελευταία ισότητα για $n = 1$ και $n = 2$, προκύπτει ότι

$$\begin{cases} -\lambda_1 + 2\lambda_2 = 0 \\ \lambda_1 + 4\lambda_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 0.$$

Επομένως, οι ακολουθίες $((-1)^n), (2^n)$ αποτελούν μια βάση του W, οπότε $\dim W = 2$. □

Άσκηση 11. *Δίνονται οι υπόχωροι V_1, V_2 του πραγματικού διανυσματικού χώρου $(\mathbb{R}^4, +, \cdot)$, με*

$$\begin{aligned} V_1 &= \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 : x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 0\}, \\ V_2 &= \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 : x_1 - 2x_2 + x_4 = 0\}. \end{aligned}$$

Να βρεθούν οι διαστάσεις των υποχώρων

$$V_1, V_2, V_1 \cap V_2, V_1 + V_2$$

και να αποδειχθεί ότι $V_1 + V_2 = \mathbb{R}^4$.

Λύση. Για τον υπόχωρο V_1 είναι

$$\begin{aligned} \mathbf{v} = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in V_1 &\Leftrightarrow \mathbf{v} = (-x_2 + x_3 + x_4, x_2, x_3, x_4) \\ &\Leftrightarrow \mathbf{v} = (-x_2, x_2, 0, 0) + (x_3, 0, x_3, 0) + (x_4, 0, 0, x_4) \\ &\Leftrightarrow \mathbf{v} = x_2(-1, 1, 0, 0) + x_3(1, 0, 1, 0) + x_4(1, 0, 0, 1) \\ &\Leftrightarrow \mathbf{v} \in < (-1, 1, 0, 0), (1, 0, 1, 0), (1, 0, 0, 1) > . \end{aligned}$$