Άσκηση 4. *Να βρεθεί η εξίσωση της ευθείας*

$$y = ax + b$$

για την οποία το άθροισμα των τετραγώνων των κατακόρυφων αποστάσεων από τα σημεία

$$A = (1,3), B = (2,5), C = (3,4)$$

είναι ελάχιστο.

Λύση. Η ιδανική ευθεία θα διέρχονταν και από τα 3 σημεία, επόμενως θα ικανοποιούσε τις επόμενες εξισώσεις.

$$\begin{cases} a \cdot 1 + b = 3 \\ a \cdot 2 + b = 5 \\ a \cdot 3 + b = 4 \end{cases}$$

Ισοδύναμα, υπάρχουν $a, b \in \mathbb{R}$ ώστε

$$a \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Αυτό είναι αδύνατο. Η ζητούμενη βέλτιστη είναι αυτή για την οποία η norm

$$\left\| a \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 4 \end{bmatrix} \right\|$$

είναι ελάχιστη.

Υπάρχουν δύο τρόποι να λύσουμε το πρόβλημα:

(1ος τρόπος)

Θεωρούμε την μήτρα A με στήλες τα διανύσματα $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ και $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, την μήτρα στήλη $B = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 4 \end{bmatrix}$ και την μήτρα $X = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$.

Θα λύσουμε το συμβιβαστό σύστημα

$$A^t A X = A^t B$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 14 & 6 \\ 6 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 25 \\ 12 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} 14a + 6b = 25 \\ 6a + 3b = 12 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 14a + 6b = 25 \\ 2a + b = 4 \end{cases}$$

$$a = \frac{1}{2},\ b = 3$$

Δηλαδή, η εξίσωση της ευθείας που ελαχιστοποιεί το άθροισμα των τετραγώνων των κατακόρυφων αποστάσεων από τα σημεία A, B και C έχει εξίσωση

$$y = \frac{1}{2}x + 3$$

Τότε, το άθροισμα των τετραγώνων των κατακόρυφων απόστασεων της ευθείας από τα σημεία A, B, C ισούται με

$$\begin{aligned}
\|AX - B\|^2 &= \left\| \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/2 \\ 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 4 \end{bmatrix} \right\|^2 \\
&= \left\| \begin{bmatrix} 7/2 \\ 4 \\ 9/2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 4 \end{bmatrix} \right\|^2 \\
&= \left\| \begin{bmatrix} 1/2 \\ -1 \\ 1/2 \end{bmatrix} \right\|^2 \\
&= (1/2)^2 + (-1)^2 + (1/2)^2 = 3/2
\end{aligned}$$

Στο ίδιο αποτελέσμα φτάνουμε αν μέτρησουμε τις κατακόρυφες αποστάσεις απευθείας:

$$\begin{aligned}
(3 - ((1/2)1 + 3))^2 + (5 - ((1/2)2 + 3))^2 + (4 - ((1/2)3 + 3))^2 \\
= (-1/2)^2 + 1^2 + (-1/2)^2 \\
= 3/2
\end{aligned}$$

Για τις κατακόρυφες απόστασεις: Έστω μια ευθεία με εξίσωση $y = ax + b$ και τα σημεία $A(x_0, y_0)$, $B(x_1, y_1)$, $C(x_2, y_2)$.

Η κατακόρυφη απόστασση της ευθείας από το σημείο $A(x_0, y_0)$. ισούται με

$$\left| y_0 - (ax_0 + b) \right|$$

Η κατακόρυφη απόστασση της ευθείας από το σημείο $B(x_1, y_1)$. ισούται με

$$\left| y_1 - (ax_1 + b) \right|$$

Η κατακόρυφη απόστασση της ευθείας από το σημείο $B(x_1, y_1)$. ισούται με

$$\left| y_2 - (ax_2 + b) \right|$$

(**2ος τρόπος**) Θα βρούμε μια ορθοκανονική βάση του χώρου που παράγουν τα διανύσματα $\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ και $\mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ και έπειτα θα βρούμε την προβολή P του $B = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 4 \end{bmatrix}$ στον χώρο που παράγουν τα $\mathbf{x}_1$, $\mathbf{x}_2$ και μετά θα λύσουμε το συμβιβαστό σύστημα

$$a \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = P$$

Θα χρησιμοποιήσουμε τον αλγόριθμο Gram-Schmidt στα $\mathbf{x}_1$, $\mathbf{x}_2$.

$\boldsymbol{v}_1 = \frac{1}{||y_1||}\boldsymbol{y}_1$ όπου $\boldsymbol{y}_1 = \mathbf{x}_1 = (1,1,1)$.

$||\boldsymbol{y}_1|| = \sqrt{1^2+1^2+1^2} = \sqrt{3}$

Άρα, $\boldsymbol{v}_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)$.

$\boldsymbol{v}_2 = \frac{1}{||y_2||}\boldsymbol{y}_2$ όπου $\boldsymbol{y}_2 = \mathbf{x}_2 - \langle \mathbf{x}_2, \boldsymbol{v}_1\rangle \boldsymbol{v}_1$.

$\boldsymbol{y}_2 = (1,2,3) - \frac{6}{\sqrt{3}}\frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1) = (-1,0,1)$.

$||y_2|| = \sqrt{(-1)^2+0^2+1^2} = \sqrt{2}$.

Άρα, $\boldsymbol{v}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1,0,1)$.

Επομένως, η προβολή του B πάνω στον χώρο που παράγουν τα $\mathbf{x}_1$, $\mathbf{x}_2$ (ή ισοδύναμα τα $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$) δίδεται από τον τύπο

$$\begin{aligned} P &= \langle B, \boldsymbol{v}_1\rangle \boldsymbol{v}_1 + \langle B, \boldsymbol{v}_2\rangle \boldsymbol{v}_2 \\ &= \frac{12}{\sqrt{3}}\boldsymbol{v}_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\boldsymbol{v}_2 \\ &= (4,4,4) + (-1/2, 0, 1/2) \\ &= (7/2, 4, 9/2) \end{aligned}$$

Τέλος θα λύσουμε το συμβιβαστό σύστημα

$$\begin{cases} a+b = 7/2 \\ 2a+b = 4 \\ 3a+b = 9/2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1/2 \\ b = 3 \end{cases}$$

$\square$

Άσκηση 5. *Να βρεθεί η ελάχιστη τιμή της παράστασης*

$$\Pi = (x+y-1)^2 + (2x-y+1)^2 + (y-5)^2$$

Λύση. Θα χρησιμοποιήσουμε την ανισότητα Cauchy - Schwarz:

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle^2 \leqslant \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle \langle \mathbf{y}, \mathbf{y} \rangle$$

Θεωρούμε το διάνυσμα

$$\mathbf{x} = (x+y-1, 2x-y+1, y-5)$$

τότε

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = (x+y-1)^2 + (2x-y+1)^2 + (y-5)^2 = \Pi$$

Το τέχνασμα είναι να βρούμε ένα διάνυσμα $\mathbf{y} = (a, b, c) \neq \mathbf{0}$ έτσι ώστε το εσωτερικό γινόμενο $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$ να μην εξαρτάται από τις μεταβλητές x, y.

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle &= a(x+y-1) + b(2x-y+1) + c(y-5) \\ &= (a+2b)x + (a-b+c)y + b - a - 5c \end{aligned}$$

Άρα, αρκεί να επιλέξουμε τα a, b, c ώστε

$$a + 2b = 0 \text{ και } a - b + c = 0$$

$$a = -2b \text{ και } -3b + c = 0$$

$$a = -2b \text{ και } c = 3b$$

Επιλέγουμε $b = 1$, οπότε $\mathbf{y} = (-2, 1, 3)$.

Τότε

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle^2 = (b-a-5c)^2 = (1-(-2)-5 \cdot 3)^2 = (-12)^2 = 144.$$

$$\langle \mathbf{y}, \mathbf{y} \rangle = (-2)^2 + 1^2 + 3^2 = 14$$

Άρα,

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle^2 \leqslant \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle \langle \mathbf{y}, \mathbf{y} \rangle$$
$$144 \leqslant ((x+y-1)^2 + (2x-y+1)^2 + (y-5)^2) \cdot 14$$

Άρα,

$$(x+y-1)^2 + (2x-y+1)^2 + (y-5)^2 \geqslant \frac{144}{14}$$

Άρα, η ελάχιστη τιμή της παράστασης Π ισούται με $\frac{144}{14}$.

(**2ος τρόπος**) Παρατηρούμε ότι

$$\Pi = \left\| \begin{bmatrix} x+y-1 \\ 2x-y+1 \\ y-5 \end{bmatrix} \right\|^2 = \left\| \begin{bmatrix} x+y \\ 2x-y \\ y \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 5 \end{bmatrix} \right\|^2$$
$$= \left\| \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 5 \end{bmatrix} \right\|^2$$

Άρα, η ελαχιστοποίηση του Π μπορεί να προκύψει από την λύση του συμβιβαστού συστήματος

$$A^t A X = A^t B$$

όπου

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},\ X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 5 \end{bmatrix}$$

□