Επαναληπτικές ασκήσεις

Άσκηση 1. *Να λυθεί και να διερευνηθεί το σύστημα*

$$\begin{cases} 2x+y=k \\ x+w=1 \\ \lambda x+y+w=4 \end{cases},$$

όπου x, y, w *είναι οι άγνωστοι και* k, λ *είναι παράμετροι.*

Λύση. Επειδή το σύστημα είναι 3×3 θα υπολογίσουμε την ορίζουσα των συντελεστών του συστήματος.

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ \lambda & 1 & 1 \end{vmatrix} \overset{C_1 \to C_1 - 2C_2}{=} \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ \lambda-2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (-1)\cdot 1 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ \lambda-2 & 1 \end{vmatrix}$$
$$= -(1-(\lambda-2)) = \lambda - 3$$

Αν $\lambda \neq 3$, τότε το σύστημα έχει μοναδική λύση:

$$x = \frac{D_x}{D}, y = \frac{D_y}{D}, w = \frac{D_w}{D}$$

όπου

$$D_x = \begin{vmatrix} k & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 4-k & 1 & 1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 4-k & 1 \end{vmatrix} = 3-k$$

$$D_y = \begin{vmatrix} 2 & k & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ \lambda & 4 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & k & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ \lambda-1 & 3 & 0 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 2 & k \\ \lambda-1 & 3 \end{vmatrix} = (\lambda-1)k-6$$

$$D_w = \begin{vmatrix} 2 & 1 & k \\ 1 & 0 & 1 \\ \lambda & 1 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 & k-4 \\ 1 & 0 & 1 \\ \lambda & 1 & 4 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 2-\lambda & k-4 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = k+\lambda-6$$

Αν $\lambda = 3$, τότε η επαυξημένη μήτρα του συστήματος γίνεται

$$\begin{aligned} E = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & k \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & 4 \end{bmatrix} & \overset{R_1 \to R_1 - 2R_2, R_3 \to R_3 - 3R_2}{\sim} \\ = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 & k-2 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} & \overset{R_1 \to R_1 - R_3}{\sim} \\ = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & k-3 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} & \end{aligned}$$

- Αν $k \neq 3$, τότε το σύστημα είναι αδύνατο, διότι προκύπτει η εξίσωση $0x + 0y + 0w = k - 3$.
- Αν $k = 3$, τότε προκύπτει το σύστημα

$$\begin{cases} x + w = 1 \\ y - 2w = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 - w \\ y = 1 + 2w \end{cases}$$

οπότε είναι αόριστο και οι λύσεις του έχουν την μορφή

$$(x, y, w) = (1 - w, 1 + 2w, w), w \in \mathbb{R}$$

$\square$

Άσκηση 2. *Να βρεθεί το rank της μήτρας*

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 6 & 0 & -2 \\ 2 & -3 & -2 & 4 & 4 \\ 3 & -3 & 6 & 6 & 3 \\ 5 & -3 & 10 & 10 & 5 \end{bmatrix}.$$

Λύση.

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 6 & 0 & -2 \\ 2 & -3 & -2 & 4 & 4 \\ 3 & -3 & 6 & 6 & 3 \\ 5 & -3 & 10 & 10 & 5 \end{bmatrix} \overset{\substack{R_3 \to R_3 - 2R_1 \\ R_4 \to R_4 - 3R_1, R_5 \to R_5 - 5R_1}}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 6 & 0 & -2 \\ 0 & 3 & -6 & 0 & 2 \\ 0 & 6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 12 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\overset{R_4 \to \frac{1}{6}R_4}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 6 & 0 & -2 \\ 0 & 3 & -6 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 12 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 6 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -6 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \overset{R_3 \to R_3 + R_2}{\sim}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 6 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Η αρχική μήτρα είναι R-ισοδύναμη με μια μήτρα η οποία έχει 3 γραμμικώς ανεξάρτητα διανύσματα, άρα έχει rank 3. □

Άσκηση 3. *Να διαγωνιοποιηθεί ορθογώνια η μήτρα*

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Λύση. Γνωρίζουμε ότι μια τετραγωνική μήτρα είναι ορθογωνίως διαγωνιοποίηση ανν είναι συμμετρική. Εδώ η A είναι συμμετρική.

Αρχικά θα υπολογίσουμε τις ιδιοτιμές της μήτρας A μέσω του χαρακτηριστικού πολυωνύμου της μήτρας

$$|A-\lambda I_3| = \begin{vmatrix} 4-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1-\lambda & 2 \\ 1 & 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} \overset{C_2 \to C_2 - C_3}{=} \begin{vmatrix} 4-\lambda & 0 & 1 \\ 1 & -1-\lambda & 2 \\ 1 & \lambda+1 & 1-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (\lambda+1) \begin{vmatrix} 4-\lambda & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} \overset{R_3 \to R_3 + R_2}{=} (\lambda+1) \begin{vmatrix} 4-\lambda & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 3-\lambda \end{vmatrix}$$

$$-(\lambda+1) \begin{vmatrix} 4-\lambda & 1 \\ 2 & 3-\lambda \end{vmatrix} = -(\lambda+1)(\lambda^2 - 7\lambda + 10)$$

$$= -(\lambda+1)(\lambda-2)(\lambda-5)$$

Άρα, η A έχει 3 διαφορετικές ιδιοτιμές $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 2$, $\lambda_3 = 5$.

Θα υπολογίσουμε ένα ιδιοδιάνυσμα για κάθε μια από τις 3 ιδιοτιμές λ λύνοντας το ομογενές σύστημα $(A - \lambda I_3)X = 0$

Έστω $X = (x, y, z)$.

Για $\lambda_1 = -1$ έχουμε το σύστημα

$$\begin{cases} 5x + y + z = 0 \\ x + 2y + 2z = 0 \\ x + 2y + 2z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5x + y + z = 0 \\ x + 2y + 2z = 0 \end{cases} \quad R_2 \to R_2 - 2R_1 \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} 5x + y + z = 0 \\ -9x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ z = -y \end{cases}$$

Άρα, $X = (0, y, -y) = y(0, 1, -1)$

Για $\lambda_2 = 2$ έχουμε το σύστημα

$$\begin{cases} 2x + y + z = 0 \\ x - y + 2z = 0 \\ x + 2y - z = 0 \end{cases} \quad R_2 \to R_2 + R_1 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -z \\ x + 2y - z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x = -z \\ y = z \end{cases}$$

Άρα, $X = (-z, z, z) = z(-1, 1, 1)$

Για $\lambda_3 = 5$ έχουμε το σύστημα

$$\begin{cases} -x + y + z = 0 \\ x - 4y + 2z = 0 \\ x + 2y - 4z = 0 \end{cases} \quad R_3 \to R_3 - R_2 \Leftrightarrow \begin{cases} -x + y + z = 0 \\ y = z \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x = 2z \\ y = z \end{cases}$$

Άρα, $X = (2z, z, z) = z(2, 1, 1)$

Η ορθογώνια διαγωνιοποίηση της μήτρας A έχει την μορφή

$$A = PDP^T$$

όπου P είναι η ορθογώνια μήτρα με στήλες ορθοκανονικά διανύσματα των αντίστοιχων ιδιοχώρων της μήτρας. (Υπολογίζονται μέσω του αλγορίθμου Gram - Schmidt)

Επειδή τα 3 ιδιοδιανύσματα αντιστοιχούν σε διαφορετικές ιδιοτιμές είναι ήδη ορθογώνια μεταξύ τους.

Επομένως, η P έχει ως στήλες τα διανύσματα που βρήκαμε πολλαπλασιασμένα έτσι ώστε να έχουν μήκος 1.

Άρα,

$$P = \begin{bmatrix} 0 & \frac{-1}{\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{bmatrix}$$

Η μήτρα D διαγώνια μήτρα με στοιχεία τις ιδιοτιμές με την ίδια σειρά που τοποθετήσαμε στην P τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα

$$D = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

$\square$

Άσκηση 4. *Δίδεται ότι το φάσμα της μήτρας*

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 3 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

είναι $\mathrm{sp}(A) = \{1, 2, 3\}$*. Να βρεθεί το* $\mathrm{sp}(B)$ *και η* $\det(B)$*, όπου* $B = 2A^3 + A^2 - 2I_3$*.*

Λύση. Επειδή $B = 2A^3 + A^2 - 2I_3$ το φάσμα $\mathrm{sp}(B)$ ισούται με $\{p(1), p(2), p(3)\}$ όπου $p(x) = 2x^3 + x^2 - 2$.

$p(1) = 2 \cdot 1^3 + 1^2 - 2 = 1$

$p(2) = 2 \cdot 2^3 + 2^2 - 2 = 18.$

$p(3) = 2 \cdot 3^3 + 3^2 - 2 = 61.$

Η ορίζουσα της B ισούται με $1 \cdot 18 \cdot 61$.

(Η B είναι αντιστρέψιμη.) □

Άσκηση 5. *Να βρεθούν τα $x, y \in \mathbb{R}$ για τα οποία η παράσταση*

$$(x-2)^2 + (y-1)^2 + (x+y-1)^2$$

λαμβάνει την ελάχιστη τιμή της.

Λύση. 1ος τρόπος (Μέσω ανισότητας Cauchy - Schwarz)

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle^2 \leqslant \langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle \langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle$$

Η ισότητα ισχύει ανν το $\mathbf{u}$ ειναι πολλαπλάσιο του $\mathbf{v}$

Θέτουμε $\mathbf{v} = (x-2, y-1, x+y-1)$.

Θα υπολογίσουμε ένα διάνυσμα $\mathbf{u} = (a, b, c)$ έτσι το εσωτερικό γινόμενο $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$ να μην εξαρτάται από τα x, y.

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle &= a(x-2) + b(y-1) + c(x+y-1) \\ &= (a+c)x + (b+c)y - 2a - b - c \end{aligned}$$

Πρέπει $a + c = b + c = 0$, άρα μπορούμε να διαλέξουμε $\mathbf{u} = (-1, -1, 1)$.

Τότε $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = -2(-1) - (-1) - 1 = 2$

Άρα, από την ανισότητα C–S ισχύει

$$2^2 \leqslant ((-1)^2 + (-1)^2 + 1^2))((x-2)^2 + (y-1)^2 + (x+y-1)^2)$$

Ισοδύναμα:

$$(x-2)^2 + (y-1)^2 + (x+y-1)^2 \geqslant \frac{4}{3}$$

Για να βρούμε τα x, y που δίνουν την ελάχιστη τιμή δουλεύουμε ως εξής: Η ισότητα ισχύει αν και μόνο αν το u είναι πολλαπλάσιο του v

$$2 = \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{u}, \lambda \mathbf{u} \rangle = \lambda \langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle = 3\lambda \Leftrightarrow \lambda = \frac{2}{3}$$

Άρα, $\mathbf{v} = \frac{2}{3}\mathbf{u} \Leftrightarrow (x-2, y-1, x+y-1) = \frac{2}{3}(-1,-1,1)$, οπότε

$$x - 2 = -\frac{2}{3}, y - 1 = -\frac{2}{3}, x + y - 1 = \frac{2}{3}$$

$$x = \frac{4}{3}, y = \frac{1}{3}$$

2ος τρόπος (Μέσω της μεθόδου των ελαχίστων τετραγώνων)

Το πρόβλημα είναι ισοδύναμο με την εύρεση ενός διανύσματος $X = (x, y)$ για το οποίο ελαχιστοποιεί την παράσταση $\|AX - B\|_2$ όπου $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ (Αντιστοιχεί στο μη συμβιβαστό σύστημα

$$\begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \\ x + y = 1 \end{cases} \quad)$$

Η λύση προκύπτει θεωρώντας το συμβιβαστό σύστημα

$$A^t A X = A^t B$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + y = 3 \\ x + 2y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{4}{3} \\ y = \frac{1}{3} \end{cases}$$

Η ελάχιστη τιμή της παράστασης προκύπτει αντικαθιστώντας τα x, y στην παράσταση.

$\square$

Άσκηση 6. *Δίδεται η μήτρα* $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$.

α) Να βρεθεί το χαρακτηριστικό πολυώνυμο της μήτρας A.

β) Να αποδειχθεί ότι

$$A^{-1} = \frac{1}{6}A^2 - \frac{7}{6}I.$$

γ) Να υπολογισθεί η τιμή της ορίζουσας της μήτρας

$$(A^3 - 7A)^{2021}.$$

Λύση. Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο της μήτρας A ισούται με

$$\begin{aligned} |A - \lambda I_3| &= \begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 & 2 \\ 0 & -2-\lambda & 0 \\ 2 & 3 & 1-\lambda \end{vmatrix} = -(\lambda+2)\begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} \\ &= -(\lambda+2)(1+\lambda^2-2\lambda-4) \\ &= -(\lambda+2)(\lambda^2-2\lambda-3) = -(\lambda^3-7\lambda-6) \\ &= -\lambda^3+7\lambda+6 \end{aligned}$$

Από το θεώρημα Cayley - Hamilton γνωρίζουμε ότι η μήτρα A είναι ρίζα του χαρακτηριστικού της πολυωνύμου, δηλαδή

$$-A^3 + 7A + 6I_3 = 0$$

β) $-A^3 + 7A = -6I_3 \Leftrightarrow A(-A^2 + 7I_3) = -6I_3 \Leftrightarrow$
$A\dfrac{1}{6}(A^2 - 7I_3) = I_3.$

Άρα, $A^{-1} = \dfrac{1}{6}(A^2 - 7I_3)$

γ) $-A^3 + 7A = -6I_3 \Leftrightarrow A^3 - 7A = 6I_3$

$$|(A^3 - 7A)^{2021}| = |(6I_3)^{2021}| = |6I_3|^{2021} = \begin{vmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{vmatrix}^{2021} =$$
$(6^3)^{2021}$

□

Άσκηση 7. *Έστω η ορθοκανονική βάση του* $\mathbb{R}^3$ *που αποτελείται από τα διανύσματα* $\mathbf{v}_1 = (\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}})$, $\mathbf{v}_2 = (\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$, $\mathbf{v}_3 = (\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}})$.

i) *Να εκφραστεί το διάνυσμα* $\mathbf{v} = (3, 2, 2)$ *ως γραμμικός συνδυασμός των* $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_3$.

ii) *Να βρεθούν οι τιμές του* $\lambda \in \mathbb{R}$ *ώστε το διάνυσμα* $\mathbf{x} = (1, 2, \lambda)$ *να είναι γραμμικώς εξαρτημένο από τα* $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v_2}$.

iii) *Έστω* W *ο χώρος που παράγουν τα διανύσματα* $\mathbf{v}_1$ *και* $\mathbf{v}_2$. *Να βρεθεί η ελάχιστη τιμή της απόστασης μεταξύ του διανύσματος* $\mathbf{v} = (3, 2, 2)$ *και των διανυσμάτων* $\mathbf{y} \in W$.

Λύση. $\square$