Εφαρμοσμένη Άλγεβρα

Εσωτερικό γινόμενο

2021-2022

Άσκηση 1

i) Να βρεθεί μια ορθοκανονική βάση για τον χώρο W που παράγουν τα διανύσματα

$$\mathbf{x}_1 = (0,1,1,1),\ \mathbf{x}_2 = (1,1,2,0),\ \mathbf{x}_3 = (2,1,3,0)$$

ii) Να βρεθεί η προβολή του διανύσματος $\mathbf{v} = (0,1,4,1)$ στον χώρο W.

iii) Να εξετασθεί αν το $\mathbf{v}$ είναι γραμμικός συνδυασμός των $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3$.

iv) Να βρεθεί ένα διάνυσμα $\mathbf{v}'$ το οποίο είναι ορθογώνιο στα $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3$.

v) Να βρεθεί το μήκος (η norm) της προβολής του $\mathbf{v}$ πάνω στο χώρο που παράγουν τα $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3$.

Λύση

i) Θα χρησιμοποιήσουμε τον αλγόριθμο Gram - Schmidt.

$\mathbf{v}_1 = \dfrac{1}{\|\mathbf{y}_1\|}\mathbf{y}_1$ όπου $\mathbf{y}_1 = \mathbf{x}_1 = (0,1,1,1)$

$\|\mathbf{y}_1\| = \sqrt{0^2+1^2+1^2+1^2} = \sqrt{3}$.

Άρα, $\mathbf{v}_1 = \dfrac{1}{\sqrt{3}}(0,1,1,1)$.

$\mathbf{v}_2 = \dfrac{1}{\|\mathbf{y}_2\|}\mathbf{y}_2$ όπου $\mathbf{y}_2 = \mathbf{x}_2 - \langle \mathbf{x}_2, \mathbf{v}_1 \rangle \mathbf{v}_1$.

$\langle \mathbf{x}_2, \mathbf{v}_1 \rangle = \left\langle (1,1,2,0), \dfrac{1}{\sqrt{3}}(0,1,1,1) \right\rangle =$

$\dfrac{1}{\sqrt{3}} \langle (1,1,2,0),(0,1,1,1) \rangle = \dfrac{3}{\sqrt{3}}$.

Άρα, $\mathbf{y}_2 = (1,1,2,0) - \dfrac{3}{\sqrt{3}}\dfrac{1}{\sqrt{3}}(0,1,1,1) = (1,0,1,-1)$.

$\|\mathbf{y}_2\| = \sqrt{0^2+1^2+1^2+1^2} = \sqrt{3}$.

Άρα, $\mathbf{v}_2 = \dfrac{1}{\sqrt{3}}(1,0,1,-1)$.

$\mathbf{v}_3 = \frac{1}{\|\mathbf{y}_3\|}\mathbf{y}_3$, όπου $\mathbf{y}_3 = \mathbf{x}_3 - \langle \mathbf{x}_3, \mathbf{v}_1 \rangle \mathbf{v}_1 - \langle \mathbf{x}_3, \mathbf{v}_2 \rangle \mathbf{v}_2$ $\langle \mathbf{x}_3, \mathbf{v}_1 \rangle =$
$\left\langle (2,1,3,0), \frac{1}{\sqrt{3}}(0,1,1,1) \right\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}} \langle (2,1,3,0),(0,1,1,1) \rangle = \frac{4}{\sqrt{3}}$
$\langle \mathbf{x}_3, \mathbf{v}_2 \rangle = \left\langle (2,1,3,0), \frac{1}{\sqrt{3}}(1,0,1,-1) \right\rangle =$
$\frac{1}{\sqrt{3}} \langle (2,1,3,0),(1,0,1,-1) \rangle = \frac{5}{\sqrt{3}}$
$\mathbf{y}_3 = (2,1,3,0) - \frac{4}{\sqrt{3}}\frac{1}{\sqrt{3}}(0,1,1,1) - \frac{5}{\sqrt{3}}\frac{1}{\sqrt{3}}(1,0,1,-1) =$
$(2,1,3,0) - \frac{4}{3}(0,1,1,1) - \frac{5}{3}(1,0,1,-1) = (1/3,-1/3,0,1/3) =$
$\frac{1}{3}(1,-1,0,1).$

$$\|\mathbf{y}_3\| = \frac{1}{3}\sqrt{1^2 + (-1)^2 + 0^2 + 1^2} = \frac{1}{3}\sqrt{3}$$

Άρα, $\mathbf{v}_3 = \frac{1}{\sqrt{3}/3}\frac{1}{3}(1,-1,0,1) = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,-1,0,1)$

Τελικά, η ζητούμενη ορθοκανονική βάση του χώρου που παράγουν τα $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3$ αποτελείται από τα διανύσματα

$$\mathbf{v}_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}(0, 1, 1, 1).$$

$$\mathbf{v}_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 0, 1, -1).$$

$$\mathbf{v}_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, -1, 0, 1).$$

ii) Επειδή έχουμε υπολογίσει την ορθοκανονική βάση προκειμένου να βρούμε την προβολή P του $\mathbf{v} = (0, 1, 4, 1)$ στον χώρο που παράγουν τα $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3$ θα χρησιμοποιήσουμε τον τύπο της προβολής: $P = \langle \mathbf{v}, \mathbf{v}_1 \rangle \mathbf{v}_1 + \langle \mathbf{v}, \mathbf{v}_2 \rangle \mathbf{v}_2 + \langle \mathbf{v}, \mathbf{v}_3 \rangle \mathbf{v}_3$

$$\langle \mathbf{v}, \mathbf{v}_1 \rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}(0 \cdot 0 + 1 \cdot 1 + 4 \cdot 1 + 1 \cdot 1) = \frac{6}{\sqrt{3}}.$$

$$\langle \mathbf{v}, \mathbf{v}_2 \rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}(0 \cdot 1 + 1 \cdot 0 + 4 \cdot 1 + 1 \cdot (-1)) = \frac{3}{\sqrt{3}}.$$

$$\langle \mathbf{v}, \mathbf{v}_3 \rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}(0 \cdot 1 + 1 \cdot (-1) + 4 \cdot 0 + 1 \cdot 1) = 0.$$

Άρα,

$$\begin{aligned} P &= \frac{6}{\sqrt{3}}\mathbf{v}_1 + \frac{3}{\sqrt{3}}\mathbf{v}_2 + 0 \cdot \mathbf{v}_3 \\ &= 2(0, 1, 1, 1) + (1, 0, 1, -1) \\ &= (1, 2, 3, 1) \end{aligned}$$

iii) Το $\mathbf{v} = (0,1,4,1)$ δεν είναι γραμμικός συνδυασμός των $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3$ διότι η προβολή $P = (1,2,3,1)$ δεν ισούται με το $\mathbf{v}$, άρα το $\mathbf{v}$ δεν ανήκει στον χώρο που παράγουν τα $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3$, επομένως δεν είναι γραμμικός συνδυασμός των $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3$.

iv) Ένα τέτοιο διάνυσμα είναι το διάνυσμα $\mathbf{v} - P$.
$\mathbf{u} = \mathbf{v} - P = (0,1,4,1) - (1,2,3,1) = (-1,-1,1,0)$
Πράγματι,
$\langle \mathbf{u}, \mathbf{x}_1 \rangle = \langle (-1,-1,1,0), (0,1,1,1) \rangle = 0$
$\langle \mathbf{u}, \mathbf{x}_2 \rangle = \langle (-1,-1,1,0), (1,1,2,0) \rangle = 0$
$\langle \mathbf{u}, \mathbf{x}_3 \rangle = \langle (-1,-1,1,0), (2,1,3,0) \rangle = 0$
Παρατήρηση: Αν θέλουμε να βρούμε ένα ορθογώνιο διάνυσμα $\mathbf{u}$ σε ένα σύνολο διανυσμάτων $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_k$, τότε επιλέγουμε ""τυχαία"" ένα διάνυσμα $\mathbf{v}$, βρίσκουμε την προβολή P του $\mathbf{v}$ πάνω στα $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_k$ και το ζητούμενο u ισούται με $\mathbf{v} - P$.

v) Θέλουμε να βρούμε το μήκος του P.
Υπολογίσαμε ότι

$$P = \frac{6}{\sqrt{3}}\mathbf{v}_1 + \frac{3}{\sqrt{3}}\mathbf{v}_2 + 0 \cdot \mathbf{v}_3 = (1, 2, 3, 1)$$

Άρα,

$$\|P\| = \sqrt{1^2 + 2^2 + 3^2 + 1^2} = \sqrt{15}.$$

Όμως, ισχύει (θα το δούμε στην επόμενη άσκηση) ότι

$$\sqrt{\left(\frac{6}{\sqrt{3}}\right)^2 + \left(\frac{3}{\sqrt{3}}\right)^2 + 0^2} = \sqrt{\frac{36}{3} + \frac{9}{3}} = \sqrt{\frac{45}{3}} = \sqrt{15}$$

Άσκηση 2

Έστω $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ *ορθοκανονικό σύνολο διανυσμάτων του* $(V, \langle\rangle)$.

i) *(Ανισότητα Bessel) Να δειχθεί ότι για κάθε* $\mathbf{x} \in V$ *ισχύει ότι*

$$\sum_{k=1}^{n} \langle \mathbf{x}, \mathbf{v}_k \rangle^2 \leq \|\mathbf{x}\|^2 .$$

Η ισότητα ισχύει ανν το $\mathbf{x}$ *ανήκει στον χώρο* W *που παράγουν τα* $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$.

ii) *(Ταυτότητα Parseval)*

$$\|\mathbf{x}\|^2 = \sum_{k=1}^{n} \langle \mathbf{x}, \mathbf{v}_k \rangle^2 , \text{ για κάθε } \mathbf{x} \in W.$$

iii)

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \sum_{k=1}^{n} \langle \mathbf{x}, \mathbf{v}_k \rangle \langle \mathbf{v}_k, \mathbf{y} \rangle , \text{ για κάθε } \mathbf{x} \in W \text{ και } \mathbf{y} \in V.$$

Λύση

i) Για κάθε $\mathbf{x} \in V$ ισχύει ότι η προβολή P του $\mathbf{x}$ πάνω στο χώρο που παράγουν τα (ορθοκανονικά διανύσματα) $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ δίδεται από τον τύπο

$$P = \langle \mathbf{x}, \mathbf{v}_1 \rangle \mathbf{v}_1 + \langle \mathbf{x}, \mathbf{v}_2 \rangle \mathbf{v}_2 + \cdots + \langle \mathbf{x}, \mathbf{v}_n \rangle \mathbf{v}_n$$

Επίσης,

$$\mathbf{x} = P + (\mathbf{x} - P)$$

και τα διανύσματα P, $\mathbf{x} - P$ είναι ορθογώνια.
Άρα, από το Πυθαγόρειο θεώρημα ισχύει ότι

$$\|P\|^2 + \|\mathbf{x} - P\|^2 = \|\mathbf{x}\|^2$$

Άρα, $\|P\|^2 \leq \|\mathbf{x}\|^2 \Leftrightarrow \|P\| \leq \|\mathbf{x}\|$.

Επιπλέον, επειδή τα διανύσματα $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, …, $\mathbf{v}_n$ είναι ανά δύο ορθογώνια έπεται ότι και τα διανύσματα $\langle \mathbf{x}, \mathbf{v}_1 \rangle \mathbf{v}_1$, $\langle \mathbf{x}, \mathbf{v}_2 \rangle \mathbf{v}_2$, …, $\langle \mathbf{x}, \mathbf{v}_n \rangle \mathbf{v}_n$ είναι ανά δύο ορθογώνια, οπότε από το Πυθαγόρειο θεώρημα ισχύει ότι

$$\begin{aligned}
\|P\|^2 &= \|\langle \mathbf{x}, \mathbf{v}_1 \rangle \mathbf{v}_1 + \langle \mathbf{x}, \mathbf{v}_2 \rangle \mathbf{v}_2 + \cdots + \langle \mathbf{x}, \mathbf{v}_n \rangle \mathbf{v}_n\|^2 \\
&= \|\langle \mathbf{x}, \mathbf{v}_1 \rangle \mathbf{v}_1\|^2 + \|\langle \mathbf{x}, \mathbf{v}_2 \rangle \mathbf{v}_2\|^2 + \cdots + \|\langle \mathbf{x}, \mathbf{v}_n \rangle \mathbf{v}_n\|^2 \\
&= \langle \mathbf{x}, \mathbf{v}_1 \rangle^2 \|\mathbf{v}_1\|^2 + \langle \mathbf{x}, \mathbf{v}_2 \rangle^2 \|\mathbf{v}_2\|^2 + \cdots \langle \mathbf{x}, \mathbf{v}_n \rangle^2 \|\mathbf{v}_n\|^2 \\
&= \langle \mathbf{x}, \mathbf{v}_1 \rangle^2 + \langle \mathbf{x}, \mathbf{v}_2 \rangle^2 + \cdots + \langle \mathbf{x}, \mathbf{v}_n \rangle^2
\end{aligned}$$

Άρα,

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{v}_1 \rangle^2 + \langle \mathbf{x}, \mathbf{v}_2 \rangle^2 + \cdots + \langle \mathbf{x}, \mathbf{v}_n \rangle^2 \leq \|\mathbf{x}\|^2$$

Η ισότητα ισχύει μόνο αν $\|\mathbf{x} - P\|^2 = 0$, δηλαδή $\mathbf{x} = P$, δηλαδή το $\mathbf{x}$ ισούται με την προβολή του, δηλαδή το $\mathbf{x}$ ανήκει στον χώρο που παράγουν τα $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$.

ii) Η ταυτότητα του Parseval προκύπτει άμεσα από την ανισότητα Bessel θεωρώντας $\mathbf{x} \in W$. Τότε $\mathbf{x} = P$ και άρα θα ισχύει η ισότητα οπότε

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{v}_1 \rangle^2 + \langle \mathbf{x}, \mathbf{v}_2 \rangle^2 + \cdots + \langle \mathbf{x}, \mathbf{v}_n \rangle^2 = \|\mathbf{x}\|^2$$

iii) Θέλουμε να δείξουμε ότι

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \sum_{k=1}^{n} \langle \mathbf{x}, \mathbf{v}_k \rangle \langle \mathbf{v}_k, \mathbf{y} \rangle, \text{ για κάθε } \mathbf{x} \in W \text{ και } \mathbf{y} \in V.$$

Αφού $\mathbf{x} \in W$ ισχύει ότι

$$\mathbf{x} = \langle \mathbf{x}, \mathbf{v}_1 \rangle \mathbf{v}_1 + \langle \mathbf{x}, \mathbf{v}_2 \rangle \mathbf{v}_2 + \cdots + \langle \mathbf{x}, \mathbf{v}_n \rangle \mathbf{v}_n$$

Άρα,

$$\begin{aligned}
\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle &= \langle \langle \mathbf{x}, \mathbf{v}_1 \rangle \mathbf{v}_1 + \langle \mathbf{x}, \mathbf{v}_2 \rangle \mathbf{v}_2 + \cdots + \langle \mathbf{x}, \mathbf{v}_n \rangle \mathbf{v}_n, \mathbf{y} \rangle \\
&= \langle \langle \mathbf{x}, \mathbf{v}_1 \rangle \mathbf{v}_1, \mathbf{y} \rangle + \langle \langle \mathbf{x}, \mathbf{v}_2 \rangle \mathbf{v}_2, \mathbf{y} \rangle + \cdots \\
&\quad\quad + \langle \langle \mathbf{x}, \mathbf{v}_n \rangle \mathbf{v}_n, \mathbf{y} \rangle \\
&= \langle \mathbf{x}, \mathbf{v}_1 \rangle \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{y} \rangle + \langle \mathbf{x}, \mathbf{v}_2 \rangle \langle \mathbf{v}_2, \mathbf{y} \rangle + \cdots + \langle \mathbf{x}, \mathbf{v}_n \rangle \langle \mathbf{v}_n, \mathbf{y} \rangle
\end{aligned}$$

Παρατήρηση Με βάση την προηγούμενη άσκηση έστω ότι σε κάποιο διανυσματικό χώρο τα διανύσματα $\mathbf{w}_1$, $\mathbf{w}_2$ εκφράζονται σε μια ορθοκανονική βάση που αποτελείται από 3 διανύσματα $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ ως εξής:

$$\mathbf{w}_1 = 5\mathbf{v}_1 + 3\mathbf{v}_2 + (-2)\mathbf{v}_3$$

και

$$\mathbf{w}_2 = 3\mathbf{v}_1 + (-2)\mathbf{v}_2 + 8\mathbf{v}_3$$

Τότε

$$\|\mathbf{w}_1\| = \sqrt{5^2 + 3^2 + (-2)^2} = \sqrt{38}.$$

$$\|\mathbf{w}_2\| = \sqrt{3^2 + (-2)^2 + 8^2} = \sqrt{77}.$$

και

$$\langle \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2 \rangle = 5 \cdot 3 + 3 \cdot (-2) + (-2) \cdot 8 = -7.$$

$$\langle \mathbf{w}_1 + 2\mathbf{w}_2, \mathbf{w}_2 \rangle = \langle \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2 \rangle + 2 \langle \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_2 \rangle = -7 + 2 \cdot 77 = 147.$$

Άσκηση 3

Έστω W ο χώρος που παράγουν τα διανύσματα

$$\mathbf{x}_1 = (0,1,1,1,1),\ \ \mathbf{x}_2 = (1,1,2,0,1),\ \ \mathbf{x}_3 = (2,1,3,0,0)$$

α) Να υπολογισθεί μια βάση του ορθογώνιου συμπληρώματος $W^{\perp}$.

Ένα διάνυσμα $\mathbf{y} = (y_1, y_2, y_3, y_4, y_5)$ ανήκει στον $W^\perp$ αν και μόνο αν

$$\begin{cases} \langle \mathbf{y}, \mathbf{x}_1 \rangle = 0 \\ \langle \mathbf{y}, \mathbf{x}_2 \rangle = 0 \\ \langle \mathbf{y}, \mathbf{x}_3 \rangle = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y_2 + y_3 + y_4 + y_5 = 0 \\ y_1 + y_2 + 2y_3 + y_5 = 0 \\ 2y_1 + y_2 + 3y_3 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y_2 + y_3 + y_4 + y_5 = 0 \\ y_1 + y_2 + 2y_3 + y_5 = 0 \\ y_1 = -\frac{1}{2}(y_2 + 3y_3) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y_2 + y_3 + y_4 + y_5 = 0 \\ y_5 = -\frac{1}{2}(y_2 + y_3) \\ y_1 = -\frac{1}{2}(y_2 + 3y_3) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y_4 = -\frac{1}{2}(y_2 + y_3) \\ y_5 = -\frac{1}{2}(y_2 + y_3) \\ y_1 = -\frac{1}{2}(y_2 + 3y_3) \end{cases}$$

Άρα,

$$\begin{aligned}
\mathbf{y} &= (-\frac{1}{2}(y_2+3y_3), y_2, y_3, -\frac{1}{2}(y_2+y_3), -\frac{1}{2}(y_2+y_3))\\
&= (-\frac{1}{2}y_2, y_2, 0, -\frac{1}{2}y_2, -\frac{1}{2}y_2) + (-\frac{3}{2}y_3, 0, y_3, -\frac{1}{2}y_3, -\frac{1}{2}y_3)\\
&= -\frac{y_2}{2}(1,-2,0,1,1) - \frac{y_3}{2}(3,0,-2,1,1)
\end{aligned}$$

Άρα, μια βάση του ορθογωνίου συμπληρώματος $W^\perp$ αποτελείται από τα διανύσματα

$$\mathbf{y}_1 = (1,-2,0,1,1), \mathbf{y}_2 = (3,0,-2,1,1)$$

β) Να εξετασθεί αν το διάνυσμα $\mathbf{x} = (3,0,1,-2,-1)$ είναι γραμμικός συνδυασμός των $\mathbf{x}_1$, $\mathbf{x}_2$, $\mathbf{x}_3$.

$\mathbf{x} \in W \Leftrightarrow \langle \mathbf{x}, \mathbf{y}_1 \rangle = 0$ και $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y}_2 \rangle = 0$

$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y}_1 \rangle = 1\cdot 3 + (-2)\cdot 0 + 0\cdot 1 + 1\cdot(-2) + 1\cdot(-1) = 0$

$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y}_2 \rangle = 3\cdot 3 + 0\cdot 0 + (-2)\cdot 1 + 1\cdot(-2) + 1\cdot(-1) = 4 \neq 0.$

Άρα, $\mathbf{x} \notin W$, οπότε δεν είναι γραμμικός συνδυασμός των $\mathbf{x}_1$, $\mathbf{x}_2$, $\mathbf{x}_3$.

γ) Να βρεθεί η μορφή των $\mathbf{x} \in W$.

Αν $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in W$ πρέπει

$$\begin{cases} \langle \mathbf{x}, \mathbf{y}_1 \rangle = 0 \\ \langle \mathbf{x}, \mathbf{y}_2 \rangle = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_4 + x_5 = 0 \\ 3x_1 - 2x_3 + x_4 + x_5 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = \dfrac{1}{2}(x_1 + x_4 + x_5) \\ x_3 = \dfrac{1}{2}(3x_1 + x_4 + x_5) \end{cases}$$

Το διάνυσμα $\mathbf{x} = (5, 5, 10, 2, 3)$ ανήκει στον W αφού ικανοποιεί τις παραπάνω 2 συνθήκες.

Άσκηση 4

Να βρεθεί η εξίσωση της ευθείας

$$y = ax + b$$

για την οποία το άθροισμα των τετραγώνων των κατακόρυφων αποστάσεων από τα σημεία

$$A = (1, 3), B = (2, 5), C = (3, 4)$$

είναι ελάχιστο.

Λύση

Η ιδανική ευθεία θα διέρχονταν και από τα 3 σημεία, επόμενως θα ικανοποιούσε τις επόμενες εξισώσεις.

$$\begin{cases} a \cdot 1 + b = 3 \\ a \cdot 2 + b = 5 \\ a \cdot 3 + b = 4 \end{cases}$$

Ισοδύναμα, υπάρχουν $a, b \in \mathbb{R}$ ώστε

$$a \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Αυτό είναι αδύνατο.

Η ζητούμενη βέλτιστη είναι αυτή για την οποία η norm

$$\left\| a \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 4 \end{bmatrix} \right\|$$

είναι ελάχιστη.
Υπάρχουν δύο τρόποι να λύσουμε το πρόβλημα:
(**1ος τρόπος**)
Θεωρούμε την μήτρα A με στήλες τα διανύσματα $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ και $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, την μήτρα στήλη $B = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 4 \end{bmatrix}$ και την μήτρα $X = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$.
Θα λύσουμε το συμβιβαστό σύστημα

$$A^t AX = A^t B$$

$$\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\1 & 1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 1\\2 & 1\\3 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a\\b\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\1 & 1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3\\5\\4\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}14 & 6\\6 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a\\b\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}25\\12\end{bmatrix}$$

$$\begin{cases}14a + 6b = 25\\6a + 3b = 12\end{cases}$$

$$\begin{cases}14a + 6b = 25\\2a + b = 4\end{cases}$$

$$a = \frac{1}{2},\ b = 3$$

Δηλαδή, η εξίσωση της ευθείας που ελαχιστοποιεί το άθροισμα των τετραγώνων των κατακόρυφων αποστάσεων από τα σημεία A, B και C έχει εξίσωση

$$y = \frac{1}{2}x + 3$$

Τότε, το άθροισμα των τετραγώνων των κατακόρυφων απόστασεων της ευθείας από τα σημεία A, B, C ισούται με

$$\begin{aligned} \|AX - B\|^2 &= \left\| \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/2 \\ 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 4 \end{bmatrix} \right\|^2 \\ &= \left\| \begin{bmatrix} 7/2 \\ 4 \\ 9/2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 4 \end{bmatrix} \right\|^2 \\ &= \left\| \begin{bmatrix} 1/2 \\ -1 \\ 1/2 \end{bmatrix} \right\|^2 = (1/2)^2 + (-1)^2 + (1/2)^2 = 3/2 \end{aligned}$$

Στο ίδιο αποτέλεσμα φτάνουμε αν μετρήσουμε τις κατακόρυφες αποστάσεις απευθείας:

Για τις κατακόρυφες αποστάσεις: Έστω μια ευθεία με εξίσωση $y = ax + b$ και τα σημεία $A(x_0, y_0)$, $B(x_1, y_1)$, $C(x_2, y_2)$.

Η κατακόρυφη απόσταση της ευθείας από το σημείο $A(x_0, y_0)$. ισούται με

$$|y_0 - (ax_0 + b)|$$

Η κατακόρυφη απόσταση της ευθείας από το σημείο $B(x_1, y_1)$. ισούται με

$$|y_1 - (ax_1 + b)|$$

Η κατακόρυφη απόσταση της ευθείας από το σημείο $B(x_1, y_1)$. ισούται με

$$|y_2 - (ax_2 + b)|$$

$$\begin{aligned}(3 - ((1/2)1 + 3))^2 + (5 - ((1/2)2 + 3))^2 + (4 - ((1/2)3 + 3))^2 \\ = (-1/2)^2 + 1^2 + (-1/2)^2 \\ = 3/2\end{aligned}$$

(**2ος τρόπος**) Θα βρούμε μια ορθοκανονική βάση του χώρου που παράγουν τα διανύσματα $\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ και $\mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ και έπειτα θα βρούμε την προβολή P του $B = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 4 \end{bmatrix}$ στον χώρο που παράγουν τα $\mathbf{x}_1$, $\mathbf{x}_2$ και μετά θα λύσουμε το συμβιβαστό σύστημα

$$a \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = P$$

Θα χρησιμοποιήσουμε τον αλγόριθμο Gram-Schmidt στα $\mathbf{x}_1$, $\mathbf{x}_2$.

$\mathbf{v}_1 = \frac{1}{\|y_1\|}\mathbf{y}_1$ όπου $\mathbf{y}_1 = \mathbf{x}_1 = (1,1,1)$.
$\|\mathbf{y}_1\| = \sqrt{1^2+1^2+1^2} = \sqrt{3}$
Άρα, $\mathbf{v}_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)$.
$\mathbf{v}_2 = \frac{1}{\|y_2\|}\mathbf{y}_2$ όπου $\mathbf{y}_2 = \mathbf{x}_2 - \langle \mathbf{x}_2, \mathbf{v}_1\rangle \mathbf{v}_1$.
$\mathbf{y}_2 = (1,2,3) - \frac{6}{\sqrt{3}}\frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1) = (-1,0,1)$.
$\|\mathbf{y}_2\| = \sqrt{(-1)^2+0^2+1^2} = \sqrt{2}$.
Άρα, $\mathbf{v}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1,0,1)$.
Επομένως, η προβολή του B πάνω στον χώρο που παράγουν τα $\mathbf{x}_1$, $\mathbf{x}_2$ (ή ισοδύναμα τα $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$) δίδεται από τον τύπο

$$\begin{aligned} P &= \langle B, \mathbf{v}_1\rangle \mathbf{v}_1 + \langle B, \mathbf{v}_2\rangle \mathbf{v}_2 = \frac{12}{\sqrt{3}}\mathbf{v}_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{v}_2 \\ &= (4,4,4) + (-1/2, 0, 1/2) = (7/2, 4, 9/2) \end{aligned}$$

Τέλος θα λύσουμε το συμβιβαστό σύστημα

$$\begin{cases} a + b = 7/2 \\ 2a + b = 4 \\ 3a + b = 9/2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1/2 \\ b = 3 \end{cases}$$

Άσκηση 5

Να βρεθεί η ελάχιστη τιμή της παράστασης

$$\Pi = (x + y - 1)^2 + (2x - y + 1)^2 + (y - 5)^2$$

Λύση

Θα χρησιμοποιήσουμε την ανισότητα Cauchy - Schwarz:

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle^2 \leq \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle \langle \mathbf{y}, \mathbf{y} \rangle$$

Θεωρούμε το διάνυσμα

$$\mathbf{x} = (x + y - 1, 2x - y + 1, y - 5)$$

τότε

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = (x + y - 1)^2 + (2x - y + 1)^2 + (y - 5)^2 = \Pi$$

Το τέχνασμα είναι να βρούμε ένα διάνυσμα $\mathbf{y} = (a, b, c) \neq \mathbf{0}$ έτσι ώστε το εσωτερικό γινόμενο $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$ να μην εξαρτάται από τις μεταβλητές x, y.

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle &= a(x + y - 1) + b(2x - y + 1) + c(y - 5) \\ &= (a + 2b)x + (a - b + c)y + b - a - 5c \end{aligned}$$

Άρα, αρκεί να επιλέξουμε τα a, b, c ώστε

$$a + 2b = 0 \text{ και } a - b + c = 0$$

$$a = -2b \text{ και } -3b + c = 0$$

$$a = -2b \text{ και } c = 3b$$

Επιλέγουμε $b = 1$, οπότε $\mathbf{y} = (-2, 1, 3)$.
Τότε
$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle^2 = (b - a - 5c)^2 = (1 - (-2) - 5 \cdot 3)^2 = (-12)^2 = 144$.
$\langle \mathbf{y}, \mathbf{y} \rangle = (-2)^2 + 1^2 + 3^2 = 14$
Άρα,

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle^2 \leq \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle \langle \mathbf{y}, \mathbf{y} \rangle$$

$$144 \leq ((x + y - 1)^2 + (2x - y + 1)^2 + (y - 5)^2) \cdot 14$$

Άρα, $(x + y - 1)^2 + (2x - y + 1)^2 + (y - 5)^2 \geq \frac{144}{14}$.
Άρα, η ελάχιστη τιμή της παράστασης Π ισούται με $\frac{144}{14}$.

(**2ος τρόπος**) Παρατηρούμε ότι

$$\Pi = \left\| \begin{bmatrix} x+y-1 \\ 2x-y+1 \\ y-5 \end{bmatrix} \right\|^2 = \left\| \begin{bmatrix} x+y \\ 2x-y \\ y \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 5 \end{bmatrix} \right\|^2$$

$$= \left\| \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 5 \end{bmatrix} \right\|^2$$

Άρα, η ελαχιστοποίηση του Π μπορεί να προκύψει από την λύση του συμβιβαστού συστήματος

$$A^t A X = A^t B$$

όπου

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},\ X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 5 \end{bmatrix}$$

Άσκηση 6

Να διαγωνιοποιηθεί ορθογωνίως η μήτρα

$$A = \begin{bmatrix} 7 & -1 & -2 \\ -1 & 7 & 2 \\ -2 & 2 & 10 \end{bmatrix}$$

Επειδή η μήτρα είναι συμμετρική έπεται ότι έχει ορθογώνια διαγωνιοποίηση.

Θεωρούμε την χαρακτηριστική εξίσωση

$$|A - \lambda I_3| = 0$$

$$\begin{vmatrix} 7-\lambda & -1 & -2 \\ -1 & 7-\lambda & 2 \\ -2 & 2 & 10-\lambda \end{vmatrix} = 0 \ (R_1 \to R_1 + R_2)$$

$$\begin{vmatrix} 6-\lambda & 6-\lambda & 0 \\ -1 & 7-\lambda & 2 \\ -2 & 2 & 10-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$(6-\lambda)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 7-\lambda & 2 \\ -2 & 2 & 10-\lambda \end{vmatrix} = 0 \ (C_2 \to C_2 - C_1)$$

$$(6-\lambda)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 8-\lambda & 2 \\ -2 & 4 & 10-\lambda \end{vmatrix} = 0 \ (\text{Ανάπτυγμα με βάση 1η γραμμή})$$

$$(6-\lambda) \cdot 1 \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 8-\lambda & 2 \\ 4 & 10-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$(6-\lambda)((8-\lambda)(10-\lambda)-8)=0$$
$$(6-\lambda)(\lambda^2-18\lambda+72)=0$$
$$(6-\lambda)^2(12-\lambda)=0$$

Άρα, η A έχει ιδιοτιμές $\lambda_1 = 12$ και $\lambda_2 = \lambda_3 = 6$ (διπλή).
Θα βρούμε τα ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν σε κάθε ιδιοτιμή.
Το χαρακτηριστικό σύστημα είναι

$$(A-\lambda I_3)X = O_{3\times 1},\ \text{όπου } X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

Για την ιδιοτιμή $\lambda_1 = 12$ προκύπτει το χαρακτηριστικό σύστημα:

$$\begin{cases} -5x_1 - x_2 - 2x_3 = 0 \\ -x_1 - 5x_2 + 2x_3 = 0 \\ -2x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} -6x_1 - 6x_2 = 0 \\ -x_1 - 5x_2 + 2x_3 = 0 \\ -2x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 0 \end{cases}$$

Άρα, $x_1 = -x_2$.
Οπότε $-4x_1 - 2x_3 = 0 \Leftrightarrow x_3 = -2x_1$.
Άρα, τα ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν στην ιδιοτιμή $\lambda_1 = 12$ έχουν την μορφή

$$(x_1, x_2, x_3) = (x_1, -x_1, -2x_1) = x_1(1, -1, -2).$$

Επομένως, μια βάση του ιδιόχωρου είναι το ιδιοδιάνυσμα

$$\mathbf{u}_1 = (1, -1, -2).$$

Για τις ιδιοτιμές $\lambda_2 = \lambda_3 = 6$ προκύπτει το χαρακτηριστικό σύστημα:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - 2x_3 = 0 \\ -x_1 + x_2 + 2x_3 = 0 \\ -2x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow x_1 - x_2 - 2x_3 = 0$$

Οπότε $x_2 = x_1 - 2x_3$.
Άρα, τα ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν στις ιδιοτιμές $\lambda_2 = \lambda_3 = 6$ έχουν την μορφή

$$\begin{aligned}(x_1, x_2, x_3) &= (x_1, x_1 - 2x_3, x_3) = (x_1, x_1, 0) + (0, -2x_3, x_3) \\ &= x_1(1, 1, 0) + x_3(0, -2, 1)\end{aligned}$$

Άρα, ο ιδιόχωρος που αντιστοιχεί στην διπλή ιδιοτιμή $\lambda_2 = \lambda_3 = 6$ έχει ως βάση τα διανύσματα
$\mathbf{u}_2 = (1, 1, 0)$ και $\mathbf{u}_3 = (0, -2, 1)$.

Για να κάνουμε την ορθογώνια διαγωνιοποίηση, προκειμένου να βρούμε την ορθογώνια μήτρα P, θα εφαρμόσουμε τον αλγόριθμο των Gram - Schmidt στα $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$, $\mathbf{u}_3$.
Επειδή το $\mathbf{u}_1$ ανήκει σε διαφορετικό ιδιόχωρο από τα $\mathbf{u}_2$, $\mathbf{u}_3$ έπεται είναι ορθογώνιο σ' αυτα. Άρα, αρκεί να εφαρμόσουμε τον αλγόριθμο μόνο στα $\mathbf{u}_2$, $\mathbf{u}_3$ και απλά να κανονικοποίησουμε το $\mathbf{u}_1$.

$\mathbf{v}_2 = \frac{1}{\|\mathbf{y}_2\|}\mathbf{y}_2$ όπου $\mathbf{y}_2 = \mathbf{u}_2$. $\|\mathbf{y}_2\| = \sqrt{1^2 + 1^2 + 0^2} = \sqrt{2}$. Άρα,

$$\mathbf{v}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1, 0) = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0)$$

$\mathbf{v}_3 = \frac{1}{\|\mathbf{y}_3\|}\mathbf{y}_3$ όπου $\mathbf{y}_3 = \mathbf{u}_3 - \langle \mathbf{u}_3, \mathbf{v}_2 \rangle \mathbf{v}_2$

$\langle \mathbf{u}_3, \mathbf{v}_2 \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \langle (0, -2, 1), (1, 1, 0) \rangle = -\frac{2}{\sqrt{2}}$

$\mathbf{y}_3 = (0, -2, 1) - (-\frac{2}{\sqrt{2}})\frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1, 0) = (1, -1, 1)$

$\|\mathbf{y}_3\| = \sqrt{1^2 + (-1)^2 + 1^2} = \sqrt{3}$. Άρα,

$$\mathbf{v}_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, -1, 1) = (\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$$

Τέλος, για τον υπολογισμό του $\mathbf{v}_1$ αρκεί να κανονικοποιήσουμε το $\mathbf{u}_1$. $\mathbf{v}_1 = \frac{1}{\|\mathbf{u}_1\|}\mathbf{u}_1$. $\|\mathbf{u}_1\| = \sqrt{1^2 + (-1)^2 + (-2)^2} = \sqrt{6}$. Άρα,

$$\mathbf{v}_1 = \frac{1}{\sqrt{6}}(1, -1, -2) = (\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{2}{\sqrt{6}})$$

Συνοψίζοντας

$\mathbf{v}_1 = (\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{2}{\sqrt{6}})$

$\mathbf{v}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0)$

$\mathbf{v}_3 = (\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$

Άρα, οι ζητούμενες μήτρες είναι η ορθογώνια μήτρα P και η διαγώνια μήτρα D όπου

$$P = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 & \mathbf{v}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{2}{\sqrt{6}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix} \text{ και } D = \begin{bmatrix} 12 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

και ισχύει ότι

$$A = PDP^t$$

(Υπενθυμίζεται ότι $P^{-1} = P^t$ διότι η P είναι ορθογώνια.)