Εφαρμοσμένη Άλγεβρα

Μήτρες

2022-2023

Μήτρες

Άσκηση 1

Έστω $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{2\times 3}$. *Να βρεθούν οι μήτρες:* $-2A$, $A+B$, B^t, AB^t *και* B^tA.

Λύση

$$-2A = -2\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -4 & -6 \\ 0 & 2 & -4 \end{bmatrix}$$

$$A + B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 4 & 4 & 8 \end{bmatrix}$$

$$B^t = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 4 & 4 & 8 \end{bmatrix}^t = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 4 \\ 4 & 8 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3\times 2}$$

$$AB^t = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 4 \\ 4 & 8 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1\cdot 2 + 2\cdot 3 + 3\cdot 4 & 1\cdot 4 + 1\cdot 4 + 3\cdot 8 \\ 0\cdot 2 + (-1)\cdot 3 + 2\cdot 4 & 0\cdot 4 + (-1)\cdot 4 + 2\cdot 8 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 20 & 36 \\ 5 & 12 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{2\times 2}$$

$$B^tA = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 4 \\ 4 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2\cdot 1 + 4\cdot 0 & 2\cdot 2 + 4\cdot(-1) & 2\cdot 3 + 4\cdot 2 \\ 3\cdot 1 + 4\cdot 0 & 3\cdot 2 + 4\cdot(-1) & 3\cdot 3 + 4\cdot 2 \\ 4\cdot 1 + 8\cdot 0 & 4\cdot 2 + 8\cdot(-1) & 4\cdot 3 + 8\cdot 2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & 0 & 14 \\ 3 & 2 & 17 \\ 4 & 0 & 28 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3\times 3}.$$

Άσκηση 2

Αν

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \qquad \textit{και} \qquad B^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Να υπολογισθούν οι πίνακες $(AB)^{-1}$ *και* $(A^{-1}B^{-1})^t$.

Λύση

Ισχύει ότι $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 6 \end{bmatrix}$.

Ισχύει ότι $(A^{-1}B^{-1})^t = (B^{-1})^t(A^{-1})^t = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 10 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$.

Άσκηση 3

Να αποδειχθεί ότι $A^2 = A$, *όπου*

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -2 & -4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & -3 \end{bmatrix}$$

και στη συνέχεια να υπολογισθεί ο $B = 2A^5 - 3A^2 + A$.

Λύση

$$A^2 = A{\cdot}A = \begin{bmatrix} 2 & -2 & -4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -2 & -4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \cdots = A$$

Πράγματι,

```
import sympy as sp
A = sp.Matrix([[2,-2,-4],[-1,3,4],[1,-2,-3]])
print("A**2:", A**2)
```

Output:

```
A**2: Matrix([[2, -2, -4], [-1, 3, 4], [1, -2, -3]])
```

Επομένως,

$$B = 2A^5 - 3A^2 + A = 2A^5 - 3A + A = 2A^5 - 2A$$

Όμως, $A^5 = A^2A^2A = AAA = A^2A = AA = A^2 = A$.
Άρα,

$$B = 2A^5 - 2A = 2A - 2A = O$$

Παρατήρηση. Η μήτρα A ονομάζεται **αδύναμη** (δεν έχει δύναμη).

Άσκηση 4

Να βρεθούν οι μήτρες C^n, όπου $n \in \mathbb{N}^*$, σε κάθε μία από τις παρακάτω περιπτώσεις:

i) $C_1 = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$

ii) $C_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Λύση

i) Θα προσπαθήσουμε να εικάσουμε τον τύπο της μήτρας C_1^n υπολογίζοντας μερικές από τις δυνάμεις της.

```python
import sympy as sp
n = sp.symbols('n')
C1 = sp.Matrix([[2,1],[0,3]])
print((C1**n).table(sp.StrPrinter()))
```

Output:

```
[2**n, -2**n + 3**n]
[   0,         3**n]
```

Εικασία: $C_1^n = \begin{bmatrix} 2^n & 3^n - 2^n \\ 0 & 3^n \end{bmatrix}$

Για την απόδειξη του τύπου θα χρησιμοποιήσουμε επαγωγή ως προς n.

Για $n = 1$ έχουμε ότι $C_1^1 = \begin{bmatrix} 2^1 & 3^1 - 2^1 \\ 0 & 3^1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} = C_1$, άρα ο τύπος ισχύει για $n = 1$.

Έστω ότι ο τύπος ισχύει για $n = k$, δηλαδή $C_1^k = \begin{bmatrix} 2^k & 3^k - 2^k \\ 0 & 3^k \end{bmatrix}$.

Θα δειχθεί ότι ισχύει και για $n = k + 1$. Πράγματι

$$\begin{aligned} C_1^{k+1} = C_1 \cdot C_1^k &= \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2^k & 3^k - 2^k \\ 0 & 3^k \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 2 \cdot 2^k & 2 \cdot 3^k - 2 \cdot 2^k + 3^k \\ 0 & 3 \cdot 3^k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2^{k+1} & 3^{k+1} - 2^{k+1} \\ 0 & 3^{k+1} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Άρα, ο τύπος ισχύει για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$.

ii) Θα προσπαθήσουμε να εικάσουμε τον τύπο της μήτρας C_2^n υπολογίζοντας μερικές από τις δυνάμεις της.

```python
import sympy as sp
C2 = sp.Matrix([[1,0,1],[0,1,0],[1,0,1]])
for i in range(1,5):
    print("C2**",i,"=")
    print((C2**i).table(sp.StrPrinter()))
```

Output:

```
C2** 1 =
[1, 0, 1]
[0, 1, 0]
[1, 0, 1]
C2** 2 =
[2, 0, 2]
[0, 1, 0]
[2, 0, 2]
C2** 3 =
[4, 0, 4]
[0, 1, 0]
[4, 0, 4]
C2** 4 =
[8, 0, 8]
[0, 1, 0]
[8, 0, 8]
```

Εικασία: $C_2^n = \begin{bmatrix} 2^{n-1} & 0 & 2^{n-1} \\ 0 & 1 & 0 \\ 2^{n-1} & 0 & 2^{n-1} \end{bmatrix}$.

Για την απόδειξη του τύπου θα χρησιμοποιήσουμε επαγωγή ως προς n.

Για $n = 1$ έχουμε ότι $C_2^1 = \begin{bmatrix} 2^0 & 0 & 2^0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2^0 & 0 & 2^0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = C_2$, άρα ο τύπος ισχύει για $n = 1$.

Έστω ότι ο τύπος ισχύει για $n = k$, δηλαδή $C_2^k = \begin{bmatrix} 2^{k-1} & 0 & 2^{k-1} \\ 0 & 1 & 0 \\ 2^{k-1} & 0 & 2^{k-1} \end{bmatrix}$.

Θα δειχθεί ότι ισχύει και για $n = k + 1$. Πράγματι

$$\begin{aligned} C_2^{k+1} = C_2 \cdot C_2^k &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2^{k-1} & 0 & 2^{k-1} \\ 0 & 1 & 0 \\ 2^{k-1} & 0 & 2^{k-1} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 2^{k-1} + 2^{k-1} & 0 & 2^{k-1} + 2^{k-1} \\ 0 & 1 & 0 \\ 2^{k-1} + 2^{k-1} & 0 & 2^{k-1} + 2^{k-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2^k & 0 & 2^k \\ 0 & 1 & 0 \\ 2^k & 0 & 2^k \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Άρα, ο τύπος ισχύει για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$.

Άσκηση 5

Να βρεθεί ο τύπος της ακολουθίας a_n όπου

$$a_n = 5a_{n-1} - 6a_{n-2}$$

και $a_0 = a_1 = 1$.

Λύση

$$\begin{cases} a_n = 5a_{n-1} - 6a_{n-2} \\ a_{n-1} = 1a_{n-1} + 0a_{n-2} \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} a_n \\ a_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & -6 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{n-1} \\ a_{n-2} \end{bmatrix}$$

$n = 2$

$$\begin{bmatrix} a_2 \\ a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & -6 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & -6 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$n = 3$

$$\begin{bmatrix} a_3 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & -6 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_2 \\ a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & -6 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & -6 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & -6 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$n = 4$

$$\begin{bmatrix} a_4 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & -6 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_3 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & -6 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^3 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Γενικότερα για $n \geq 2$

$$\begin{bmatrix} a_n \\ a_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & -6 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^{n-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

```python
import sympy as sp
n = sp.symbols('n')
A = sp.Matrix([[5,-6],[1,0]])
print((A**n).table(sp.StrPrinter()))
```

Output:

```
[-2*2**n + 3*3**n, 6*2**n - 6*3**n]
[    -2**n + 3**n, 3*2**n - 2*3**n]
```

Επομένως, μπορούμε να αποδείξουμε με επαγωγή ότι,

$$\begin{bmatrix} a_n \\ a_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \cdot 2^{n-1} + 3 \cdot 3^{n-1} & 6 \cdot 2^{n-1} - 6 \cdot 3^{n-1} \\ -2^{n-1} + 3^{n-1} & 3 \cdot 2^{n-1} - 2 \cdot 3^{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Οπότε

$$a_n = -2 \cdot 2^{n-1} + 3 \cdot 3^{n-1} + 6 \cdot 2^{n-1} - 6 \cdot 3^{n-1} = 4 \cdot 2^{n-1} - 3 \cdot 3^{n-1} = 2^{n+1} - 3^n.$$

Άσκηση 6

Έστω $A = \begin{bmatrix} 0 & -4 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix}$ *και* $B = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ -1 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$.

i) *Να δειχθεί ότι* $AB = 7I_2$.

ii) *Να υπολογισθεί η μήτρα* $(BA)^n$, *όπου* $n \in \mathbb{N}^*$

Λύση

$$AB = \begin{bmatrix} 0 & -4 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ -1 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 7 \end{bmatrix} = 7 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = 7I_2$$

$$
\begin{aligned}
(BA)^n &= \underbrace{(BA)(BA)(BA)\cdots(BA)}_{n \text{ φορές}} \\
&= B\underbrace{(AB)(AB)\cdots(AB)}_{n-1 \text{ φορές}}A \\
&= B(AB)^{n-1}A \\
&= B(7I_2)^{n-1}A \\
&= B7^{n-1}I_2^{n-1}A = 7^{n-1}BA \\
&= 7^{n-1}\begin{bmatrix} 10 & -3 & -3 \\ 2 & 5 & -2 \\ 8 & -8 & -1 \end{bmatrix}.
\end{aligned}
$$

Άσκηση 7

Να βρεθούν όλες οι μήτρες $B \in \mathcal{M}_2$ οι οποίες αντιμετατίθενται με την μήτρα $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$

Λύση

Έστω $B = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$. Θέλουμε να ισχύει:

$$AB = BA \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$$

Ισοδύναμα,

$$\begin{bmatrix} a & b \\ 2a & 2b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a + 2b & 0 \\ c + 2d & 0 \end{bmatrix}$$

Άρα, ισοδύναμα

$$\begin{cases} a = a + 2b \\ b = 0 \\ 2a = c + 2d \\ 2b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 0 \\ 2a = c + 2d \end{cases}$$

Άρα, οι μήτρες B που αντιμετατίθενται με την A είναι της μορφής

$$B = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 2(a-d) & d \end{bmatrix}, \text{ όπου } a, d \in \mathbb{R}.$$

Άσκηση 8

Έστω $A \in \mathcal{M}_n$. Να δειχθεί ότι αν η μήτρα A^5 είναι αντιστρέψιμη, τότε και η μήτρα A είναι επίσης αντιστρέψιμη.

Λύση

Για να δείξουμε ότι μια μήτρα A είναι αντιστρέψιμη πρέπει να βρούμε μια άλλη μήτρα C ώστε $AC = I_n$.
Επειδή A^5 είναι αντιστρέψιμη υπάρχει μήτρα B ώστε

$$A^5 B = I_n \Leftrightarrow AA^4 B = I_n$$

οπότε η μήτρα $A^4 B$ είναι η αντίστροφη της A, δηλαδή η A είναι αντιστρέψιμη.

Άσκηση 9

Να βρεθούν, αν υπάρχουν, οι αντίστροφες των παρακάτω μητρών:

i) $A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -2 & -6 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}.$

ii) $A_2 = \begin{bmatrix} 1 & a & 3 \\ -2 & b & a \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}, a, b \in \mathbb{R}.$

Λύση

i) Η μήτρα A_1 αντιστρέφεται ανν είναι R-ισοδύναμη με την I_3
Για τον υπολογισμό της αντίστροφής της, χρησιμοποιούμε στοιχειώδεις μετασχηματισμούς γραμμών και μετασχηματίζουμε τη μήτρα A_1 στη μήτρα I_3 (ταυτόχρονα μετασχηματίζουμε τη μήτρα I_3, εφαρμόζοντας τους ίδιους μετασχηματισμούς, και προκύπτει η αντίστροφη της A_1).

$$\begin{bmatrix}1&2&1\\-2&-6&3\\1&2&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\underset{\substack{R_2\to R_2+2R_1\\R_3\to R_3-R_1}}{\sim}\begin{bmatrix}1&2&1\\0&-2&5\\0&0&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\2&1&0\\-1&0&1\end{bmatrix}\underset{R_2\to-\frac{1}{2}R_2}{\sim}$$

$$\begin{bmatrix}1&2&1\\0&1&-\frac{5}{2}\\0&0&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\-1&-\frac{1}{2}&0\\-1&0&1\end{bmatrix}\underset{R_1\to R_1-2R_2}{\sim}$$

$$\begin{bmatrix}1&0&6\\0&1&-\frac{5}{2}\\0&0&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3&1&0\\-1&-\frac{1}{2}&0\\-1&0&1\end{bmatrix}\underset{R_3\to\frac{1}{2}R_3}{\sim}$$

$$\begin{bmatrix}1&0&6\\0&1&-\frac{5}{2}\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3&1&0\\-1&-\frac{1}{2}&0\\-\frac{1}{2}&0&\frac{1}{2}\end{bmatrix}\underset{\substack{R_1\to R_1-6R_3\\R_2\to R_2+\frac{5}{2}R_3}}{\sim}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}6&1&-3\\-\frac{9}{4}&-\frac{1}{2}&\frac{5}{4}\\-\frac{1}{2}&0&\frac{1}{2}\end{bmatrix}$$

Άρα, $A_1^{-1}=\begin{bmatrix}6&1&-3\\-9/4&-1/2&5/4\\-1/2&0&1/2\end{bmatrix}$.

Μπορούμε να επαληθεύσουμε ότι το αποτέλεσμα που βρήκαμε είναι σωστό πολλαπλασιάζοντας τις δύο μήτρες:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -2 & -6 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 6 & 1 & -3 \\ -9/4 & -1/2 & 5/4 \\ -1/2 & 0 & 1/2 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 1\cdot 6 + 2\cdot(-\frac{9}{4}) + 1\cdot(-\frac{1}{2}) & 1\cdot 1 + 2\cdot(-\frac{1}{2}) + 1\cdot 0 & 1\cdot(-3) + 2\cdot\frac{5}{4} + 1\cdot\frac{1}{2} \\ (-2)\cdot 6 + (-6)\cdot(-\frac{9}{4}) + 3\cdot(-\frac{1}{2}) & (-2)\cdot 1 + (-6)\cdot(-\frac{1}{2}) + 3\cdot 0 & (-2)\cdot(-3) + (-6)\cdot\frac{5}{4} + 3\cdot\frac{1}{2} \\ 1\cdot 6 + 2\cdot(-\frac{9}{4}) + 3\cdot(-\frac{1}{2}) & 1\cdot 1 + 2\cdot(-\frac{1}{2}) + 3\cdot 0 & 1\cdot(-3) + 2\cdot\frac{5}{4} + 3\cdot\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Υπενθυμίζουμε ότι αν η μήτρα δεν αντιστρέφεται αυτό θα προκύψει κατά τη διαδικασία μετατροπής της σε ανηγμένη κλιμακωτή, όπου θα εμφανισθούν μηδενικές γραμμές.

ii) Η εύρεση της αντίστροφης της μήτρας A_2 παρουσιάζει τη δυσκολία ότι δεν γνωρίζουμε ποιες είναι οι τιμές των a, b.

$$\begin{bmatrix} 1 & a & 3 \\ -2 & b & a \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \overset{R_2 \to R_2 + 2R_1}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & a & 3 \\ 0 & b+2a & a+6 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Επειδή δεν γνωρίζουμε αν $b + 2a \neq 0$ δεν μπορούμε να εφαρμόσουμε τον στοιχειώδη μετασχηματισμό $R_2 \to \frac{1}{b+2a} R_2$ χωρίς να πάρουμε περιπτώσεις. Για το συγκεκριμένο παράδειγμα όμως μπορούμε να εναλλάξουμε τις γραμμές 2 και 3 και να συνεχίσουμε τη διαδικασία χωρίς περιπτώσεις:

$$\overset{R_2 \leftrightarrow R_3}{\sim} \left[\begin{matrix} 1 & a & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & b+2a & a+6 \end{matrix}\right] \left[\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{matrix}\right] \overset{\substack{R_1 \to R_1 - aR_2 \\ R_3 \to R_3 - (b+2a)R_2}}{\sim}$$

$$\left[\begin{matrix} 1 & 0 & 3-2a \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 6-2b-3a \end{matrix}\right] \left[\begin{matrix} 1 & 0 & -a \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -b-2a \end{matrix}\right]$$

Τώρα, προκειμένου να συνεχίσουμε πρέπει οπωσδήποτε να διακρίνουμε περιπτώσεις:

Αν $6 - 2b - 3a = 0$, ή ισοδύναμα $b = 3 - \frac{3}{2}a$ τότε η μήτρα A_2 δεν αντιστρέφεται, αφού είναι R-ισοδύναμη με τη μήτρα

$$\left[\begin{matrix} 1 & 0 & 3-2a \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix}\right]$$

η οποία περιέχει μηδενική γραμμή.

Αν $6-2b-3a \neq 0$ τότε έχουμε ότι

$$
\left[\begin{array}{ccc|ccc}
1 & 0 & 3-2a & 1 & 0 & -a \\
0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 6-2b-3a & 2 & 1 & -b-2a
\end{array}\right]
\overset{R_3 \to \frac{1}{6-2b-3a} R_3}{\sim}
$$

$$
\left[\begin{array}{ccc|ccc}
1 & 0 & 3-2a & 1 & 0 & -a \\
0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 1 & \frac{2}{6-2b-3a} & \frac{1}{6-2b-3a} & \frac{-b-2a}{6-2b-3a}
\end{array}\right]
\overset{\substack{R_1 \to R_1-(3-2a)R_3 \\ R_2 \to R_2-2R_3}}{\sim}
$$

$$
\left[\begin{array}{ccc|ccc}
1 & 0 & 0 & \frac{a-2b}{6-2b-3a} & -\frac{3-2a}{6-2b-3a} & -\frac{a^2-3b}{6-2b-3a} \\
0 & 1 & 0 & -\frac{4}{6-2b-3a} & -\frac{2}{6-2b-3a} & \frac{a+6}{6-2b-3a} \\
0 & 0 & 1 & \frac{2}{6-2b-3a} & \frac{1}{6-2b-3a} & \frac{-b-2a}{6-2b-3a}
\end{array}\right].
$$

Άρα, αν $6-2b-3a \neq 0$ τότε

$$
A_2^{-1} = \frac{1}{6-2b-3a} \begin{bmatrix} a-2b & 2a-3 & 3b-a^2 \\ -4 & -2 & a+6 \\ 2 & 1 & -b-2a \end{bmatrix}.
$$

Άσκηση 10

Να λυθεί το σύστημα

$$\begin{aligned} x + y + z &= 3 \\ 2x - y + 3z &= 4 \\ x + 2y - 2z &= 1 \end{aligned}$$

Λύση

Αν τεθεί

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & -2 \end{bmatrix}, \; X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \text{ και } B = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}$$

τότε το σύστημα είναι ισοδύναμο με την εξίσωση μητρών

$$AX = B.$$

Πράγματι,

$$\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 2 & -1 & 3\\ 1 & 2 & -2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\\ z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3\\ 4\\ 1\end{bmatrix}\Leftrightarrow\begin{bmatrix}1\cdot x+1\cdot y+1\cdot z\\ 2\cdot x+(-1)\cdot y+3\cdot z\\ 1\cdot x+2\cdot x+(-2)\cdot z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3\\ 4\\ 1\end{bmatrix}\Leftrightarrow$$
$$\begin{bmatrix}x+y+z\\ 2x-y+3z\\ x+2y-2z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3\\ 4\\ 1\end{bmatrix}.$$

Από την τελευταία ισότητα μητρών προκύπτει το αρχικό σύστημα των τριών εξισώσεων.

Αν πολλαπλασιάσουμε την εξίσωση $AX = B$ από τα αριστερά με τη μήτρα

$$C=-\frac{1}{8}\begin{bmatrix}4 & -4 & -4\\ -7 & 3 & 1\\ -5 & 1 & 3\end{bmatrix}$$

έχουμε ότι

$$-\frac{1}{8}\begin{bmatrix}4 & -4 & -4\\ -7 & 3 & 1\\ -5 & 1 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 2 & -1 & 3\\ 1 & 2 & -2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\\ z\end{bmatrix} = -\frac{1}{8}\begin{bmatrix}4 & -4 & -4\\ -7 & 3 & 1\\ -5 & 1 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3\\ 4\\ 1\end{bmatrix} \Leftrightarrow$$

$$-\frac{1}{8}\begin{bmatrix}-8 & 0 & 0\\ 0 & -8 & 0\\ 0 & 0 & -8\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\\ z\end{bmatrix} = -\frac{1}{8}\begin{bmatrix}-8\\ -8\\ -8\end{bmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\\ z\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\ 1\\ 1\end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix}x\\ y\\ z\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\ 1\\ 1\end{bmatrix}$$

Άρα, $x = y = z = 1$.

Άσκηση 11

Έστω $A, B \in \mathcal{M}_n$. Να δειχθεί ότι οι μήτρες AA^t και A^tA είναι συμμετρικές.

Λύση.

Πράγματι
$$(AA^t)^t = (A^t)^t A^t = AA^t$$
και
$$(A^tA)^t = A^t(A^t)^t = A^tA$$

□

Άσκηση 12

Να δειχθεί ότι αν οι $n \times n$ μήτρες A, B είναι ορθογώνιες, τότε και η μήτρα AB είναι ορθογώνια.

Λύση

Επειδή οι A, B είναι ορθογώνιες έπεται ότι $AA^t = BB^t = I_n$. Αρκεί να δείξουμε ότι

$$(AB)(AB)^t = I_n$$

Πράγματι,

$$(AB)(AB)^t = (AB)(B^tA^t) = A(BB^t)A^t = AIA^t = AA^t = I_n$$

Άσκηση 13

Να βρεθεί ο αριθμός των πολλαπλασιασμών (και των προσθέσεων) που απαιτούνται για τον υπολογισμό του γινομένου $C = A \cdot B$, όταν οι μήτρες $A = [a_{ij}]$, $B = [b_{ij}]$ έχουν τύπο

i) A: $1 \times n$ και B: $n \times 1$.

ii) A: $m \times n$ και B: $n \times k$.

i) A: $1 \times n$ και B: $n \times 1$.
Στην περίπτωση αυτή, το γινόμενο AB είναι μια μήτρα $C = [c_{ij}]$ τύπου 1×1 και

$$c_{11} = \sum_{p=1}^{n} a_{1p} b_{p1}$$

οπότε απαιτούνται n πολλαπλασιασμοί (και $n - 1$ προσθέσεις).

ii) A: $m \times n$ και B: $n \times k$.
Στην περίπτωση αυτή, το γινόμενο AB είναι μια μήτρα $C = [c_{ij}]$ τύπου $m \times k$, άρα έχει $m \cdot k$ στοιχεία.
Ο υπολογισμός κάθε στοιχείου c_{ij} της C γίνεται βάση του τύπου

$$c_{ij} = \sum_{p=1}^{n} a_{ip} b_{pj}$$

άρα, για κάθε στοιχείο απαιτούνται $n - 1$ προσθέσεις και n πολλαπλασιασμοί.
Επομένως, για να βρούμε όλα τα στοιχεία της μήτρας C απαιτούνται $m \cdot n \cdot k$ πολλαπλασιασμοί (και $m \cdot (n-1) \cdot k$ προσθέσεις).

Παραδείγματα:

- Αν η A έχει διαστάσεις 5×7 και B έχει διαστάσεις 7×2, τότε η μήτρα AB έχει διαστάσεις 5×2 και για τον υπολογισμό του AB απαιτούνται: $5 \cdot 7 \cdot 2 = 70$ πολλαπλασιασμοί.
- Αν η A έχει διαστάσεις 10×30 και B έχει διαστάσεις 30×20, τότε η μήτρα AB έχει διαστάσεις 10×20 και για τον υπολογισμό του AB απαιτούνται: $10 \cdot 30 \cdot 20 = 6000$ πολλαπλασιασμοί.

– Αν η A έχει διαστάσεις 10×5, η B έχει διαστάσεις 5×3 και η C έχει διαστάσεις 3×9. Τότε η μήτρα ABC θα έχει διαστάσεις 10×9. Πόσοι πολλαπλασιασμοί χρειάζομαι για να την υπολογίσω?
Υπάρχουν δύο τρόποι να υπολογισθεί το γινόμενο ABC.
  - 1ος τρόπος: $(AB)C$
    Το (AB) έχει διαστάσεις 10×3 και για να υπολογισθεί απαιτούνται $10 \cdot 5 \cdot 3 = 150$ πολλαπλασιασμοί.
    Το $(AB)C$ έχει διαστάσεις 10×9 και για να υπολογισθεί απαιτούνται $10 \cdot 3 \cdot 9 = 270$ πολλαπλασιασμοί.
    Συνολικά, με αυτό τον τρόπο απαιτούνται $150 + 270 = 420$ πολλαπλασιασμοί.
  - 2ος τρόπος: $A(BC)$.
    Το (BC) έχει διαστάσεις 5×9 και για να υπολογισθεί απαιτούνται $5 \cdot 3 \cdot 9 = 135$ πολλαπλασιασμοί.
    Το $A(BC)$ έχει διαστάσεις 10×9 και για να υπολογισθεί απαιτούνται $10 \cdot 5 \cdot 9 = 450$ πολλαπλασιασμοί.
    Συνολικά, με αυτό τον τρόπο απαιτούνται $135 + 450 = 585$ πολλαπλασιασμοί.

Άσκηση 14

Να βρεθεί ο βέλτιστος τρόπος υπολογισθεί το γινόμενο $A \cdot B \cdot C \cdot D$ *των μητρών* A, B, C, D *με τύπους*

A: 10×4

B: 4×12

C: 12×8

D: 8×20

Λύση

Ο πολλαπλασιασμός μητρών είναι προσεταιριστικός, δηλαδή δεν εξαρτάται από την σειρά που θα γίνουν (ανά δύο) οι πολλαπλασιασμοί.

Υπάρχουν 5 τρόποι να υπολογίσουμε το γινόμενο $A \cdot B \cdot C \cdot D$

- 1ος τρόπος: $((AB)C)D$.
  AB έχει διαστάσεις 10×12 και χρειαζόμαστε $10 \cdot 4 \cdot 12 = 480$ πολλαπλασιασμούς.
  $(AB)C$ έχει διαστάσεις 10×8 και χρειαζόμαστε $10 \cdot 12 \cdot 8 = 960$ πολλαπλασιασμούς.
  $((AB)C)D$ έχει διαστάσεις 10×20 και χρειαζόμαστε $10 \cdot 8 \cdot 20 = 1600$ πολλαπλασιασμούς.
  Συνολικά, 3040 πολλαπλασιασμοί.

- 2ος τρόπος: $(AB)(CD)$.
  AB έχει διαστάσεις 10×12 και χρειαζόμαστε $10 \cdot 4 \cdot 12 = 480$ πολλαπλασιασμούς.
  CD έχει διαστάσεις 12×20 και χρειαζόμαστε $12 \cdot 8 \cdot 20 = 1920$ πολλαπλασιασμούς.
  $(AB)(CD)$ έχει διαστάσεις 10×20 και χρειαζόμαστε $10 \cdot 12 \cdot 20 = 2400$ πολλαπλασιασμούς.
  Συνολικά, 4800 πολλαπλασιασμοί.

- 3ος τρόπος: $(A(BC))D$.
  BC έχει διαστάσεις 4×8 και χρειαζόμαστε $4 \cdot 12 \cdot 8 = 384$ πολλαπλασιασμούς.
  $A(BC)$ έχει διαστάσεις 10×8 και χρειαζόμαστε $10 \cdot 4 \cdot 8 = 320$ πολλαπλασιασμούς.
  $(A(BC))D$ έχει διαστάσεις 10×20 και χρειαζόμαστε $10 \cdot 8 \cdot 20 = 1600$ πολλαπλασιασμούς.
  Συνολικά, 2304 πολλαπλασιασμοί.

- 4ος τρόπος: $A((BC)D)$.
  BC έχει διαστάσεις 4×8 και χρειαζόμαστε $4 \cdot 12 \cdot 8 = 384$ πολλαπλασιασμούς.
  $(BC)D$ έχει διαστάσεις 4×20 και χρειαζόμαστε $4 \cdot 8 \cdot 20 = 640$ πολλαπλασιασμούς.
  $A((BC)D)$ έχει διαστάσεις 10×20 και χρειαζόμαστε $10 \cdot 4 \cdot 20 = 800$ πολλαπλασιασμούς.
  Συνολικά, 1824 πολλαπλασιασμοί.

- 5ος τρόπος: $A(B(CD))$.
  CD έχει διαστάσεις 12×20 και χρειαζόμαστε $12 \cdot 8 \cdot 20 = 1920$ πολλαπλασιασμούς.
  $B(CD)$ έχει διαστάσεις 4×20 και χρειαζόμαστε $4 \cdot 12 \cdot 20 = 960$ πολλαπλασιασμούς.
  $A(B(CD))$ έχει διαστάσεις 10×20 και χρειαζόμαστε $10 \cdot 4 \cdot 20 = 800$ πολλαπλασιασμούς.
  Συνολικά, 3680 πολλαπλασιασμοί.

Άρα, ο αποδοτικότερος τρόπος υπολογισμού του γινομένου $ABCD$ είναι $A((BC)D)$.

Παρατήρηση: Μπορούμε να διαπιστώσουμε και πειραματικά την απόδοση των διαφορετικών τρόπων υπολογισμού του γινομένου $ABCD$. (Προκειμένου να γίνουν εμφανέστερες οι διαφορές θα χρησιμοποιήσουμε μήτρες A, B, C, D των οποίων οι διαστάσεις είναι πολλαπλασιασμένες επί 20).

```python
import sympy as sp
import datetime
A = sp.ones(200,80) #200 x 80 matrix where every element equals to 1
B = sp.ones(80,240)
C = sp.ones(240,160)
D = sp.ones(160,400)
start = datetime.datetime.now()

R0 = A@B@C@D   #default? ((A@B)@C)@D
finish = datetime.datetime.now()
diarkeia0 = finish - start
print("A@B@C@D", diarkeia0)

#1os tropos
start = datetime.datetime.now()
R1 = ((A@B)@C)@D
finish = datetime.datetime.now()
diarkeia1 = finish - start
print("((A@B)@C)@D", diarkeia1)

#2os tropos
start = datetime.datetime.now()
R2 = (A@B)@(C@D)
finish = datetime.datetime.now()
diarkeia2 = finish - start
print("(A@B)@(C@D)", diarkeia2)

#3os tropos
start = datetime.datetime.now()
R3 = (A@(B@C))@D
finish = datetime.datetime.now()
diarkeia3 = finish - start
print("(A@(B@C))@D", diarkeia3)
```

```
#4os tropos
start = datetime.datetime.now()
R4 = A@((B@C)@D)
finish = datetime.datetime.now()
diarkeia4 = finish - start
print("A@((B@C)@D)", diarkeia4)

#5os tropos
start = datetime.datetime.now()
R5 = A@(B@(C@D))
finish = datetime.datetime.now()
diarkeia5 = finish - start
print("A@(B@(C@D))", diarkeia5)
```

Output:

```
A@B@C@D 0:00:29.513232
((A@B)@C)@D 0:00:33.169644
(A@B)@(C@D) 0:00:47.781566
(A@(B@C))@D 0:00:24.835258
A@((B@C)@D) 0:00:18.673987
A@(B@(C@D)) 0:00:35.918524
```

Άσκηση 15

Μια $n \times n$ μήτρα A ονομάζεται **στοχαστική** *αν τα στοιχεία της είναι μη αρνητικά και το άθροισμα των στοιχείων οποιασδήποτε γραμμή της A είναι ίσο με 1.*

i) Να δειχθεί ότι μια $n \times n$ μήτρα A με στοιχεία μη αρνητικούς αριθμούς είναι στοχαστική αν και μόνο αν $AX = X$ όπου X είναι η μήτρα στήλη $n \times 1$ της οποίας όλα τα στοιχεία είναι ίσα με 1.

ii) Να δειχθεί ότι το γινόμενο δύο στοχαστικών $n \times n$ μητρών A, B είναι επίσης στοχαστική μήτρα.

i) Έστω $A = [a_{ij}]$ και $X = [x_{i1}]$ όπου $x_{i1} = 1$ για κάθε $i \in [n]$. Η μήτρα $C = AX$ έχει διαστάσεις $n \times 1$ δηλαδή είναι μήτρα στήλη. Το στοιχείο c_{i1} της C ισούται με

$$c_{i1} = \sum_{p=1}^{n} a_{ip} x_{p1} = \sum_{p=1}^{n} a_{ip} \cdot 1 = \sum_{p=1}^{n} a_{ip}$$

δηλαδή το στοιχείο c_{i1} ισούται με το άθροισμα των στοιχείων της i-οστής γραμμής της A.

- Αν η μήτρα A είναι στοχαστική (δηλαδή τα στοιχεία οποιασδήποτε γραμμής της αθροίζουν στο 1) τότε $c_{i1} = 1$ για κάθε $i \in [n]$, άρα $C = X$.
- Αν η μήτρα A δεν είναι στοχαστική (δηλαδή υπάρχει γραμμή με άθροισμα στοιχείων διάφορο του 1) τότε υπάρχει στοιχείο $c_{i1} \neq 1$ για κάποιο $i \in [n]$, άρα $C \neq X$.

ii) Επειδή ο τύπος υπολογισμού οποιουδήποτε στοιχείου του γινομένου δύο μητρών A, B χρησιμοποιεί μόνο πρόσθεση και πολλαπλασιασμό και επειδή οι μήτρες A, B έχουν μη αρνητικά στοιχεία, έπεται ότι και η μήτρα AB έχει επίσης μη αρνητικά στοιχεία.
Προκειμένου να δείξουμε ότι η μήτρα AB είναι στοχαστική αρκεί να δείξουμε ότι $(AB)X = X$.
Πράγματι, $ABX = A(BX) = AX = X$.
Άρα, η μήτρα AB είναι επίσης στοχαστική μήτρα.

Παρατήρηση. Μπορούμε να δημιουργήσουμε μια τυχαία στοχαστική μήτρα S από μια τυχαία μήτρα μη αρνητικών αριθμών R διαιρώντας κάθε στοιχείο της R με το άθροισμα των στοιχείων της γραμμής στο οποίο ανήκει.

```python
import sympy as sp

S = sp.randMatrix(7,7,0,10)
print("A random nonnegative", S.rows, "x", S.cols, "matrix:")
print(S.table(sp.StrPrinter()))
for i in range(S.rows):
    rowsum = 0
    for j in range(S.cols):
        rowsum += S[i,j]
    for j in range(S.cols):
        S[i,j] /= rowsum
print("A random stochastic", S.rows, "x", S.cols, "matrix:")
print(S.table(sp.StrPrinter()))
```

Output:

```
A random nonnegative 7 x 7 matrix:
[3,  4, 0, 8, 10, 1,  7]
[2,  0, 8, 0,  4, 7,  4]
[8,  2, 4, 0,  7, 8,  1]
[6, 10, 0, 9,  6, 6,  7]
[2,  7, 6, 3,  5, 9, 10]
[8, 10, 5, 3,  8, 0,  1]
[4,  3, 6, 3,  8, 5,  6]
A random stochastic 7 x 7 matrix:
[1/11, 4/33,    0, 8/33, 10/33, 1/33, 7/33]
[2/25,    0, 8/25,    0,  4/25, 7/25, 4/25]
[4/15, 1/15, 2/15,    0,  7/30, 4/15, 1/30]
[3/22, 5/22,    0, 9/44,  3/22, 3/22, 7/44]
[1/21,  1/6,  1/7, 1/14,  5/42, 3/14, 5/21]
[8/35,  2/7,  1/7, 3/35,  8/35,    0, 1/35]
[4/35, 3/35, 6/35, 3/35,  8/35,  1/7, 6/35]
```