

ΜΕΤΑΘΕΣΕΙΣ

- Μεταθέσεις του $[n]$
- Αντιστροφές μετάθεσης
- Άρτιες και περιπές μεταθέσεις
- Πρόσημο μετάθεσης

Μεταθέσεις του $[n]$

Έστω $n \in \mathbb{N}^*$.

Μετάθεση του $[n]$ ονομάζεται κάθε αμφιμονοσήμαντη απεικόνιση $\rho : [n] \rightarrow [n]$.

Παραδείγματα:

- $n = 4, \rho : [4] \rightarrow [4]$ με

$$\rho(1) = 2, \quad \rho(2) = 1, \quad \rho(3) = 3, \quad \rho(4) = 4.$$

- $n = 4, \pi : [4] \rightarrow [4]$ με

$$\pi(1) = 3, \quad \pi(2) = 4, \quad \pi(3) = 2, \quad \pi(4) = 1.$$

Το σύνολο των μεταθέσεων του $[n]$ συμβολίζεται με S_n

Οι μεταθέσεις του $[n]$ συχνά γράφονται στις παρακάτω δύο μορφές :

$$\rho = \rho(1)\rho(2)\cdots\rho(n) \text{ και } \rho = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ \rho(1) & \rho(2) & \cdots & \rho(n) \end{pmatrix}$$

Παραδείγματα:

- $n = 4, \rho = \rho(1)\rho(2)\rho(3)\rho(4) = 2\ 1\ 3\ 4$

$$\rho = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ \rho(1) & \rho(2) & \rho(3) & \rho(4) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

- $n = 4, \pi = \pi(1)\pi(2)\pi(3)\pi(4) = 3\ 4\ 2\ 1$

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ \pi(1) & \pi(2) & \pi(3) & \pi(4) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Αντιστροφές μετάθεσης

Κάθε ζεύγος (i, j) στοιχείων του $[n]$ που ικανοποιεί τις συνθήκες
 $i < j$ και $\rho(i) > \rho(j)$

ονομάζεται **αντιστροφή** της μετάθεσης ρ .

Παραδείγματα:

- $\rho = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix} = 2\ 1\ 3\ 4$ Η ρ έχει 1 αντιστροφή: Το ζεύγος $(1, 2)$ διότι $1 < 2$ και $\rho(1) = 2 > 1 = \rho(2)$.

- $\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix} = 3\ 4\ 2\ 1$

Η π έχει 5 αντιστροφές:

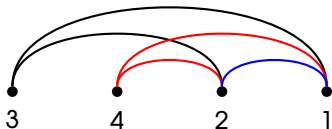
$$1 < 3 \text{ και } \pi(1) = 3 > 2 = \pi(3)$$

$$1 < 4 \text{ και } \pi(1) = 3 > 1 = \pi(4)$$

$$2 < 3 \text{ και } \pi(2) = 4 > 2 = \pi(3)$$

$$2 < 4 \text{ και } \pi(2) = 4 > 1 = \pi(4)$$

$$3 < 4 \text{ και } \pi(3) = 2 > 1 = \pi(4)$$



Άρτιες και περιπές μεταθέσεις

Αν ο συνολικός αριθμός των αντιστροφών μιας μετάθεσης ρ είναι **άρτιος**, τότε η μετάθεση ρ ονομάζεται **άρτια**, ενώ αν είναι **περιπός**, τότε η μετάθεση ρ ονομάζεται **περιπή**.

Παραδείγματα:

- Η μετάθεση $\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ έχει 5 αντιστροφές, άρα είναι περιπή.
- Η μετάθεση $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ έχει 2 αντιστροφές, άρα είναι άρτια.

Πρόσημο μετάθεσης

Το **πρόσημο** μια μετάθεσης ρ ορίζεται ως εξής:

$$\operatorname{sgn}(\rho) = \varepsilon_\rho = \begin{cases} 1, & \text{αν η } \rho \text{ είναι άρτια} \\ -1, & \text{αν η } \rho \text{ είναι περιπτή} \end{cases}$$

Παραδείγματα:

- Η $\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ είναι περιπτή, άρα $\operatorname{sgn}(\pi) = -1$
- Η $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ είναι άρτια, άρα $\operatorname{sgn}(\sigma) = 1$.