

# Εφαρμοσμένη Άλγεβρα

Εσωτερικό γινόμενο

2022-2023

## Άσκηση 1

i) Να βρεθεί μια ορθοκανονική βάση για τον χώρο  $W$  που παράγουν τα διανύσματα

$$\mathbf{x}_1 = (0, 1, 1, 1), \quad \mathbf{x}_2 = (1, 1, 2, 0), \quad \mathbf{x}_3 = (2, 1, 3, 0)$$

ii) Να βρεθεί η προβολή του διανύσματος  $\mathbf{v} = (0, 1, 4, 1)$  στον χώρο  $W$ .

iii) Να εξετασθεί αν το  $\mathbf{v}$  είναι γραμμικός συνδυασμός των  $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3$ .

iv) Να βρεθεί ένα διάνυσμα  $\mathbf{v}'$  το οποίο είναι ορθογώνιο στα  $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3$ .

v) Να βρεθεί το μήκος (η norm) της προβολής του  $\mathbf{v}$  πάνω στο χώρο που παράγουν τα  $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3$ .

i) Θα χρησιμοποιήσουμε τον αλγόριθμο Gram - Schmidt.

$$\mathbf{v}_1 = \frac{1}{\|\mathbf{y}_1\|} \mathbf{y}_1 \text{ όπου } \mathbf{y}_1 = \mathbf{x}_1 = (0, 1, 1, 1)$$

$$\|\mathbf{y}_1\| = \sqrt{0^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{3}.$$

$$\text{Άρα, } \mathbf{v}_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}(0, 1, 1, 1).$$

$$\mathbf{v}_2 = \frac{1}{\|\mathbf{y}_2\|} \mathbf{y}_2 \text{ όπου } \mathbf{y}_2 = \mathbf{x}_2 - \langle \mathbf{x}_2, \mathbf{v}_1 \rangle \mathbf{v}_1.$$

$$\langle \mathbf{x}_2, \mathbf{v}_1 \rangle = \left\langle (1, 1, 2, 0), \frac{1}{\sqrt{3}}(0, 1, 1, 1) \right\rangle =$$
$$\frac{1}{\sqrt{3}} \langle (1, 1, 2, 0), (0, 1, 1, 1) \rangle = \frac{3}{\sqrt{3}}.$$

$$\text{Άρα, } \mathbf{y}_2 = (1, 1, 2, 0) - \frac{3}{\sqrt{3}} \frac{1}{\sqrt{3}}(0, 1, 1, 1) = (1, 0, 1, -1).$$

$$\|\mathbf{y}_2\| = \sqrt{0^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{3}.$$

$$\text{Άρα, } \mathbf{v}_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 0, 1, -1).$$

$$\begin{aligned}
 \mathbf{v}_3 &= \frac{1}{\|\mathbf{y}_3\|} \mathbf{y}_3, \text{ όπου } \mathbf{y}_3 = \mathbf{x}_3 - \langle \mathbf{x}_3, \mathbf{v}_1 \rangle \mathbf{v}_1 - \langle \mathbf{x}_3, \mathbf{v}_2 \rangle \mathbf{v}_2 \quad \langle \mathbf{x}_3, \mathbf{v}_1 \rangle = \\
 &\left\langle (2, 1, 3, 0), \frac{1}{\sqrt{3}}(0, 1, 1, 1) \right\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}} \langle (2, 1, 3, 0), (0, 1, 1, 1) \rangle = \frac{4}{\sqrt{3}} \\
 \langle \mathbf{x}_3, \mathbf{v}_2 \rangle &= \left\langle (2, 1, 3, 0), \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 0, 1, -1) \right\rangle = \\
 &\frac{1}{\sqrt{3}} \langle (2, 1, 3, 0), (1, 0, 1, -1) \rangle = \frac{5}{\sqrt{3}} \\
 \mathbf{y}_3 &= (2, 1, 3, 0) - \frac{4}{\sqrt{3}} \frac{1}{\sqrt{3}}(0, 1, 1, 1) - \frac{5}{\sqrt{3}} \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 0, 1, -1) = \\
 &(2, 1, 3, 0) - \frac{4}{3}(0, 1, 1, 1) - \frac{5}{3}(1, 0, 1, -1) = (1/3, -1/3, 0, 1/3) = \\
 &\frac{1}{3}(1, -1, 0, 1).
 \end{aligned}$$

$$\|\mathbf{y}_3\| = \frac{1}{3} \sqrt{1^2 + (-1)^2 + 0^2 + 1^2} = \frac{1}{3} \sqrt{3}$$

$$\text{Άρα, } \mathbf{v}_3 = \frac{1}{\sqrt{3}/3} \frac{1}{3}(1, -1, 0, 1) = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, -1, 0, 1)$$

Τελικά, η ζητούμενη ορθοκανονική βάση του χώρου που παράγουν τα  $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3$  αποτελείται από τα διανύσματα

$$\mathbf{v}_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}(0, 1, 1, 1).$$

$$\mathbf{v}_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 0, 1, -1).$$

$$\mathbf{v}_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, -1, 0, 1).$$

ii) Επειδή έχουμε υπολογίσει την ορθοκανονική βάση προκειμένου να βρούμε την προβολή  $P$  του  $\mathbf{v} = (0, 1, 4, 1)$  στον χώρο που παράγουν τα  $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3$  θα χρησιμοποιήσουμε τον τύπο της προβολής:

$$P = \langle \mathbf{v}, \mathbf{v}_1 \rangle \mathbf{v}_1 + \langle \mathbf{v}, \mathbf{v}_2 \rangle \mathbf{v}_2 + \langle \mathbf{v}, \mathbf{v}_3 \rangle \mathbf{v}_3$$

$$\langle \mathbf{v}, \mathbf{v}_1 \rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}(0 \cdot 0 + 1 \cdot 1 + 4 \cdot 1 + 1 \cdot 1) = \frac{6}{\sqrt{3}}.$$

$$\langle \mathbf{v}, \mathbf{v}_2 \rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}(0 \cdot 1 + 1 \cdot 0 + 4 \cdot 1 + 1 \cdot (-1)) = \frac{3}{\sqrt{3}}.$$

$$\langle \mathbf{v}, \mathbf{v}_3 \rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}(0 \cdot 1 + 1 \cdot (-1) + 4 \cdot 0 + 1 \cdot 1) = 0.$$

Άρα,

$$\begin{aligned} P &= \frac{6}{\sqrt{3}}\mathbf{v}_1 + \frac{3}{\sqrt{3}}\mathbf{v}_2 + 0 \cdot \mathbf{v}_3 \\ &= 2(0, 1, 1, 1) + (1, 0, 1, -1) \\ &= (1, 2, 3, 1) \end{aligned}$$

iii) Το  $\mathbf{v} = (0, 1, 4, 1)$  δεν είναι γραμμικός συνδυασμός των  $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3$  διότι η προβολή  $P = (1, 2, 3, 1)$  δεν ισούται με το  $\mathbf{v}$ , άρα το  $\mathbf{v}$  δεν ανήκει στον χώρο που παράγουν τα  $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3$ , επομένως δεν είναι γραμμικός συνδυασμός των  $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3$ .

iv) Ένα τέτοιο διάνυσμα είναι το διάνυσμα  $\mathbf{v} - P$ .

$$\mathbf{u} = \mathbf{v} - P = (0, 1, 4, 1) - (1, 2, 3, 1) = (-1, -1, 1, 0)$$

Πράγματι,

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{x}_1 \rangle = \langle (-1, -1, 1, 0), (0, 1, 1, 1) \rangle = 0$$

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{x}_2 \rangle = \langle (-1, -1, 1, 0), (1, 1, 2, 0) \rangle = 0$$

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{x}_3 \rangle = \langle (-1, -1, 1, 0), (2, 1, 3, 0) \rangle = 0$$

**Παρατήρηση:** Αν θέλουμε να βρούμε ένα ορθογώνιο διάνυσμα  $\mathbf{u}$  σε ένα σύνολο διανυσμάτων  $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_k$ , τότε επιλέγουμε “τυχαία” ένα διάνυσμα  $\mathbf{v}$ , βρίσκουμε την προβολή  $P$  του  $\mathbf{v}$  πάνω στα  $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_k$  και το ζητούμενο  $\mathbf{u}$  ισούται με  $\mathbf{v} - P$ .

ν) Θέλουμε να βρούμε το μήκος του  $P$ .  
Υπολογίσαμε ότι

$$P = \frac{6}{\sqrt{3}}\mathbf{v}_1 + \frac{3}{\sqrt{3}}\mathbf{v}_2 + 0 \cdot \mathbf{v}_3 = (1, 2, 3, 1)$$

Άρα,

$$\|P\| = \sqrt{1^2 + 2^2 + 3^2 + 1^2} = \sqrt{15}.$$

Όμως, ισχύει (θα το δούμε στην επόμενη άσκηση) ότι

$$\sqrt{\left(\frac{6}{\sqrt{3}}\right)^2 + \left(\frac{3}{\sqrt{3}}\right)^2 + 0^2} = \sqrt{\frac{36}{3} + \frac{9}{3}} = \sqrt{\frac{45}{3}} = \sqrt{15}$$



## Άσκηση 2

Έστω  $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n\}$  ορθοκανονικό σύνολο διανυσμάτων του  $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ .

i) (Ανισότητα Bessel) Ναδειχθεί ότι για κάθε  $\mathbf{x} \in V$  ισχύει ότι

$$\sum_{k=1}^n \langle \mathbf{x}, \mathbf{v}_k \rangle^2 \leq \|\mathbf{x}\|^2.$$

Η ισότητα ισχύει αν το  $\mathbf{x}$  ανήκει στον χώρο  $W$  που παράγουν τα  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n$ .

ii) (Ταυτότητα Parseval)

$$\|\mathbf{x}\|^2 = \sum_{k=1}^n \langle \mathbf{x}, \mathbf{v}_k \rangle^2, \text{ για κάθε } \mathbf{x} \in W.$$

iii)

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \sum_{k=1}^n \langle \mathbf{x}, \mathbf{v}_k \rangle \langle \mathbf{v}_k, \mathbf{y} \rangle, \text{ για κάθε } \mathbf{x} \in W \text{ και } \mathbf{y} \in V.$$

## Λύση

- i) Για κάθε  $\mathbf{x} \in V$  ισχύει ότι η προβολή  $P$  του  $\mathbf{x}$  πάνω στο χώρο που παράγουν τα (ορθοκανονικά διανύσματα)  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n$  δίδεται από τον τύπο

$$P = \langle \mathbf{x}, \mathbf{v}_1 \rangle \mathbf{v}_1 + \langle \mathbf{x}, \mathbf{v}_2 \rangle \mathbf{v}_2 + \dots + \langle \mathbf{x}, \mathbf{v}_n \rangle \mathbf{v}_n$$

Επίσης,

$$\mathbf{x} = P + (\mathbf{x} - P)$$

και τα διανύσματα  $P, \mathbf{x} - P$  είναι ορθογώνια.  
Άρα, από το Πυθαγόρειο θεώρημα ισχύει ότι

$$\|P\|^2 + \|\mathbf{x} - P\|^2 = \|\mathbf{x}\|^2$$

Άρα,  $\|P\|^2 \leq \|\mathbf{x}\|^2 \Leftrightarrow \|P\| \leq \|\mathbf{x}\|$ .

Επιπλέον, επειδή τα διανύσματα  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n$  είναι ανά δύο ορθογώνια έπεται ότι και τα διανύσματα  $\langle \mathbf{x}, \mathbf{v}_1 \rangle \mathbf{v}_1, \langle \mathbf{x}, \mathbf{v}_2 \rangle \mathbf{v}_2, \dots, \langle \mathbf{x}, \mathbf{v}_n \rangle \mathbf{v}_n$  είναι ανά δύο ορθογώνια, οπότε από το Πυθαγόρειο θεώρημα ισχύει ότι

$$\begin{aligned}\|P\|^2 &= \|\langle \mathbf{x}, \mathbf{v}_1 \rangle \mathbf{v}_1 + \langle \mathbf{x}, \mathbf{v}_2 \rangle \mathbf{v}_2 + \dots + \langle \mathbf{x}, \mathbf{v}_n \rangle \mathbf{v}_n\|^2 \\ &= \|\langle \mathbf{x}, \mathbf{v}_1 \rangle \mathbf{v}_1\|^2 + \|\langle \mathbf{x}, \mathbf{v}_2 \rangle \mathbf{v}_2\|^2 + \dots + \|\langle \mathbf{x}, \mathbf{v}_n \rangle \mathbf{v}_n\|^2 \\ &= \langle \mathbf{x}, \mathbf{v}_1 \rangle^2 \|\mathbf{v}_1\|^2 + \langle \mathbf{x}, \mathbf{v}_2 \rangle^2 \|\mathbf{v}_2\|^2 + \dots + \langle \mathbf{x}, \mathbf{v}_n \rangle^2 \|\mathbf{v}_n\|^2 \\ &= \langle \mathbf{x}, \mathbf{v}_1 \rangle^2 + \langle \mathbf{x}, \mathbf{v}_2 \rangle^2 + \dots + \langle \mathbf{x}, \mathbf{v}_n \rangle^2\end{aligned}$$

Άρα,

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{v}_1 \rangle^2 + \langle \mathbf{x}, \mathbf{v}_2 \rangle^2 + \dots + \langle \mathbf{x}, \mathbf{v}_n \rangle^2 \leq \|\mathbf{x}\|^2$$

Η ισότητα ισχύει μόνο αν  $\|\mathbf{x} - P\|^2 = 0$ , δηλαδή  $\mathbf{x} = P$ , δηλαδή το  $\mathbf{x}$  ισούται με την προβολή του, δηλαδή το  $\mathbf{x}$  ανήκει στον χώρο που παράγουν τα  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n$ .

ii) Η ταυτότητα του Parseval προκύπτει άμεσα από την ανισότητα Bessel θεωρώντας  $\mathbf{x} = P$  και άρα θα ισχύει η ισότητα οπότε

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{v}_1 \rangle^2 + \langle \mathbf{x}, \mathbf{v}_2 \rangle^2 + \cdots + \langle \mathbf{x}, \mathbf{v}_n \rangle^2 = \|\mathbf{x}\|^2$$

iii) Θέλουμε να δείξουμε ότι

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \sum_{k=1}^n \langle \mathbf{x}, \mathbf{v}_k \rangle \langle \mathbf{v}_k, \mathbf{y} \rangle, \text{ για κάθε } \mathbf{x} \in W \text{ και } \mathbf{y} \in V.$$

Αφού  $\mathbf{x} \in W$  ισχύει ότι

$$\mathbf{x} = \langle \mathbf{x}, \mathbf{v}_1 \rangle \mathbf{v}_1 + \langle \mathbf{x}, \mathbf{v}_2 \rangle \mathbf{v}_2 + \cdots + \langle \mathbf{x}, \mathbf{v}_n \rangle \mathbf{v}_n$$

Άρα,

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle &= \langle \langle \mathbf{x}, \mathbf{v}_1 \rangle \mathbf{v}_1 + \langle \mathbf{x}, \mathbf{v}_2 \rangle \mathbf{v}_2 + \cdots + \langle \mathbf{x}, \mathbf{v}_n \rangle \mathbf{v}_n, \mathbf{y} \rangle \\ &= \langle \langle \mathbf{x}, \mathbf{v}_1 \rangle \mathbf{v}_1, \mathbf{y} \rangle + \langle \langle \mathbf{x}, \mathbf{v}_2 \rangle \mathbf{v}_2, \mathbf{y} \rangle + \cdots \\ &\quad + \langle \langle \mathbf{x}, \mathbf{v}_n \rangle \mathbf{v}_n, \mathbf{y} \rangle \\ &= \langle \mathbf{x}, \mathbf{v}_1 \rangle \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{y} \rangle + \langle \mathbf{x}, \mathbf{v}_2 \rangle \langle \mathbf{v}_2, \mathbf{y} \rangle + \cdots + \langle \mathbf{x}, \mathbf{v}_n \rangle \langle \mathbf{v}_n, \mathbf{y} \rangle \end{aligned}$$

**Παρατήρηση** Με βάση την προηγούμενη άσκηση έστω ότι σε κάποιο διανυσματικό χώρο τα διανύσματα  $\mathbf{w}_1$ ,  $\mathbf{w}_2$  εκφράζονται σε μια ορθοκανονική βάση που αποτελείται από 3 διανύσματα  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$  ως εξής:

$$\mathbf{w}_1 = 5\mathbf{v}_1 + 3\mathbf{v}_2 + (-2)\mathbf{v}_3$$

και

$$\mathbf{w}_2 = 3\mathbf{v}_1 + (-2)\mathbf{v}_2 + 8\mathbf{v}_3$$

Τότε

$$\|\mathbf{w}_1\| = \sqrt{5^2 + 3^2 + (-2)^2} = \sqrt{38}.$$

$$\|\mathbf{w}_2\| = \sqrt{3^2 + (-2)^2 + 8^2} = \sqrt{77}.$$

και

$$\langle \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2 \rangle = 5 \cdot 3 + 3 \cdot (-2) + (-2) \cdot 8 = -7.$$

$$\langle \mathbf{w}_1 + 2\mathbf{w}_2, \mathbf{w}_2 \rangle = \langle \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2 \rangle + 2 \langle \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_2 \rangle = -7 + 2 \cdot 77 = 147.$$

### Άσκηση 3

Έστω  $W$  ο χώρος που παράγουν τα διανύσματα

$$\mathbf{x}_1 = (0, 1, 1, 1, 1), \quad \mathbf{x}_2 = (1, 1, 2, 0, 1), \quad \mathbf{x}_3 = (2, 1, 3, 0, 0)$$

α) Να υπολογισθεί μια βάση του ορθογώνιου συμπληρώματος  $W^\perp$ .

Ένα διάνυσμα  $\mathbf{y} = (y_1, y_2, y_3, y_4, y_5)$  ανήκει στον  $W^\perp$  αν και μόνο αν

$$\begin{cases} \langle \mathbf{y}, \mathbf{x}_1 \rangle = 0 \\ \langle \mathbf{y}, \mathbf{x}_2 \rangle = 0 \\ \langle \mathbf{y}, \mathbf{x}_3 \rangle = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y_2 + y_3 + y_4 + y_5 = 0 \\ y_1 + y_2 + 2y_3 + y_5 = 0 \\ 2y_1 + y_2 + 3y_3 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y_2 + y_3 + y_4 + y_5 = 0 \\ y_1 + y_2 + 2y_3 + y_5 = 0 \\ y_1 = -\frac{1}{2}(y_2 + 3y_3) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y_2 + y_3 + y_4 + y_5 = 0 \\ y_5 = -\frac{1}{2}(y_2 + y_3) \\ y_1 = -\frac{1}{2}(y_2 + 3y_3) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y_4 = -\frac{1}{2}(y_2 + y_3) \\ y_5 = -\frac{1}{2}(y_2 + y_3) \\ y_1 = -\frac{1}{2}(y_2 + 3y_3) \end{cases}$$



Άρα,

$$\begin{aligned} \mathbf{y} &= \left(-\frac{1}{2}(y_2 + 3y_3), y_2, y_3, -\frac{1}{2}(y_2 + y_3), -\frac{1}{2}(y_2 + y_3)\right) \\ &= \left(-\frac{1}{2}y_2, y_2, 0, -\frac{1}{2}y_2, -\frac{1}{2}y_2\right) + \left(-\frac{3}{2}y_3, 0, y_3, -\frac{1}{2}y_3, -\frac{1}{2}y_3\right) \\ &= -\frac{y_2}{2}(1, -2, 0, 1, 1) - \frac{y_3}{2}(3, 0, -2, 1, 1) \end{aligned}$$

Άρα, μια βάση του ορθογωνίου συμπληρώματος  $W^\perp$  αποτελείται από τα διανύσματα

$$\mathbf{y}_1 = (1, -2, 0, 1, 1), \mathbf{y}_2 = (3, 0, -2, 1, 1)$$

β) Να εξετασθεί αν το διάνυσμα  $\mathbf{x} = (3, 0, 1, -2, -1)$  είναι γραμμικός συνδυασμός των  $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3$ .

$$\mathbf{x} \in W \Leftrightarrow \langle \mathbf{x}, \mathbf{y}_1 \rangle = 0 \text{ και } \langle \mathbf{x}, \mathbf{y}_2 \rangle = 0$$

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y}_1 \rangle = 1 \cdot 3 + (-2) \cdot 0 + 0 \cdot 1 + 1 \cdot (-2) + 1 \cdot (-1) = 0$$

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y}_2 \rangle = 3 \cdot 3 + 0 \cdot 0 + (-2) \cdot 1 + 1 \cdot (-2) + 1 \cdot (-1) = 4 \neq 0.$$

Άρα,  $\mathbf{x} \notin W$ , οπότε δεν είναι γραμμικός συνδυασμός των  $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3$ .

γ) Να βρεθεί η μορφή των  $\mathbf{x} \in W$ .

Αν  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in W$  πρέπει

$$\begin{cases} \langle \mathbf{x}, \mathbf{y}_1 \rangle = 0 \\ \langle \mathbf{x}, \mathbf{y}_2 \rangle = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_4 + x_5 = 0 \\ 3x_1 - 2x_3 + x_4 + x_5 = 0 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = \frac{1}{2}(x_1 + x_4 + x_5) \\ x_3 = \frac{1}{2}(3x_1 + x_4 + x_5) \end{cases}$$

Το διάνυσμα  $\mathbf{x} = (5, 5, 10, 2, 3)$  ανήκει στον  $W$  αφού ικανοποιεί τις παραπάνω 2 συνθήκες.

## Άσκηση 4

Να βρεθεί η εξίσωση της ευθείας

$$y = ax + b$$

για την οποία το άθροισμα των τετραγώνων των κατακόρυφων αποστάσεων από τα σημεία

$$A = (1, 3), B = (2, 5), C = (3, 4)$$

είναι ελάχιστο.

## Λύση

Η ιδανική ευθεία θα διέρχονταν και από τα 3 σημεία, επόμενως θα ικανοποιούσε τις επόμενες εξισώσεις.

$$\begin{cases} a \cdot 1 + b = 3 \\ a \cdot 2 + b = 5 \\ a \cdot 3 + b = 4 \end{cases}$$

Ισοδύναμα, υπάρχουν  $a, b \in \mathbb{R}$  ώστε

$$a \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Αυτό είναι αδύνατο.

Η ζητούμενη βέλτιστη είναι αυτή για την οποία η norm

$$\left\| a \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 4 \end{bmatrix} \right\|$$

είναι ελάχιστη.

Υπάρχουν δύο τρόποι να λύσουμε το πρόβλημα:

**(1ος τρόπος)**

Θεωρούμε την μήτρα  $A$  με στήλες τα διανύσματα  $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$  και  $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ , την

μήτρα στήλη  $B = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 4 \end{bmatrix}$  και την μήτρα  $X = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ .

Θα λύσουμε το συμβιβαστό σύστημα

$$A^t A X = A^t B$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 14 & 6 \\ 6 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 25 \\ 12 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} 14a + 6b = 25 \\ 6a + 3b = 12 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 14a + 6b = 25 \\ 2a + b = 4 \end{cases}$$

$$a = \frac{1}{2}, \quad b = 3$$

Δηλαδή, η εξίσωση της ευθείας που ελαχιστοποιεί το άθροισμα των τετραγώνων των κατακόρυφων αποστάσεων από τα σημεία  $A$ ,  $B$  και  $C$  έχει εξίσωση

$$y = \frac{1}{2}x + 3$$

Τότε, το άθροισμα των τετραγώνων των κατακόρυφων αποστάσεων της ευθείας από τα σημεία  $A$ ,  $B$ ,  $C$  ισούται με

$$\begin{aligned}\|AX - B\|^2 &= \left\| \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/2 \\ 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 4 \end{bmatrix} \right\|^2 \\ &= \left\| \begin{bmatrix} 7/2 \\ 4 \\ 9/2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 4 \end{bmatrix} \right\|^2 \\ &= \left\| \begin{bmatrix} 1/2 \\ -1 \\ 1/2 \end{bmatrix} \right\|^2 = (1/2)^2 + (-1)^2 + (1/2)^2 = 3/2\end{aligned}$$

Στο ίδιο αποτέλεσμα φτάνουμε αν μετρήσουμε τις κατακόρυφες αποστάσεις απευθείας:

Για τις κατακόρυφες αποστάσεις: Έστω μια ευθεία με εξίσωση  $y = ax + b$  και τα σημεία  $A(x_0, y_0)$ ,  $B(x_1, y_1)$ ,  $C(x_2, y_2)$ .

Η κατακόρυφη απόσταση της ευθείας από το σημείο  $A(x_0, y_0)$ . ισούται με

$$|y_0 - (ax_0 + b)|$$

Η κατακόρυφη απόσταση της ευθείας από το σημείο  $B(x_1, y_1)$ . ισούται με

$$|y_1 - (ax_1 + b)|$$

Η κατακόρυφη απόσταση της ευθείας από το σημείο  $C(x_2, y_2)$ . ισούται με

$$|y_2 - (ax_2 + b)|$$

$$\begin{aligned} (3 - ((1/2)1 + 3))^2 + (5 - ((1/2)2 + 3))^2 + (4 - ((1/2)3 + 3))^2 \\ = (-1/2)^2 + 1^2 + (-1/2)^2 \\ = 3/2 \end{aligned}$$



(2ος τρόπος) Θα βρούμε μια ορθοκανονική βάση του χώρου που

παράγουν τα διανύσματα  $\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$  και  $\mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$  και έπειτα θα

βρούμε την προβολή  $P$  του  $B = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 4 \end{bmatrix}$  στον χώρο που παράγουν τα  $\mathbf{x}_1,$

$\mathbf{x}_2$  και μετά θα λύσουμε το συμβιβαστό σύστημα

$$a \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = P$$

Θα χρησιμοποιήσουμε τον αλγόριθμο Gram-Schmidt στα  $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2$ .

$$\mathbf{v}_1 = \frac{1}{\|\mathbf{y}_1\|} \mathbf{y}_1 \text{ όπου } \mathbf{y}_1 = \mathbf{x}_1 = (1, 1, 1).$$

$$\|\mathbf{y}_1\| = \sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{3}$$

$$\text{Άρα, } \mathbf{v}_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1).$$

$$\mathbf{v}_2 = \frac{1}{\|\mathbf{y}_2\|} \mathbf{y}_2 \text{ όπου } \mathbf{y}_2 = \mathbf{x}_2 - \langle \mathbf{x}_2, \mathbf{v}_1 \rangle \mathbf{v}_1.$$

$$\mathbf{y}_2 = (1, 2, 3) - \frac{6}{\sqrt{3}} \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1) = (-1, 0, 1).$$

$$\|\mathbf{y}_2\| = \sqrt{(-1)^2 + 0^2 + 1^2} = \sqrt{2}.$$

$$\text{Άρα, } \mathbf{v}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1, 0, 1).$$

Επομένως, η προβολή του  $B$  πάνω στον χώρο που παράγουν τα  $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2$  (ή ισοδύναμα τα  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ ) δίδεται από τον τύπο

$$\begin{aligned} P &= \langle B, \mathbf{v}_1 \rangle \mathbf{v}_1 + \langle B, \mathbf{v}_2 \rangle \mathbf{v}_2 = \frac{12}{\sqrt{3}} \mathbf{v}_1 + \frac{1}{\sqrt{2}} \mathbf{v}_2 \\ &= (4, 4, 4) + (-1/2, 0, 1/2) = (7/2, 4, 9/2) \end{aligned}$$

Τέλος θα λύσουμε το συμβιβαστό σύστημα

$$\begin{cases} a + b = 7/2 \\ 2a + b = 4 \\ 3a + b = 9/2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1/2 \\ b = 3 \end{cases}$$

## Άσκηση 5

Να βρεθεί η ελάχιστη τιμή της παράστασης

$$\Pi = (x + y - 1)^2 + (2x - y + 1)^2 + (y - 5)^2$$

## Λύση

Θα χρησιμοποιήσουμε την ανισότητα Cauchy - Schwarz:

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle^2 \leq \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle \langle \mathbf{y}, \mathbf{y} \rangle$$

Θεωρούμε το διάνυσμα

$$\mathbf{x} = (x + y - 1, 2x - y + 1, y - 5)$$

τότε

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = (x + y - 1)^2 + (2x - y + 1)^2 + (y - 5)^2 = \Pi$$

Το τέχνασμα είναι να βρούμε ένα διάνυσμα  $\mathbf{y} = (a, b, c) \neq \mathbf{0}$  έτσι ώστε το εσωτερικό γινόμενο  $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$  να μην εξαρτάται από τις μεταβλητές  $x, y$ .

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle &= a(x + y - 1) + b(2x - y + 1) + c(y - 5) \\ &= (a + 2b)x + (a - b + c)y + b - a - 5c \end{aligned}$$

Άρα, αρκεί να επιλέξουμε τα  $a, b, c$  ώστε

$$a + 2b = 0 \text{ και } a - b + c = 0$$

$$a = -2b \text{ και } -3b + c = 0$$

$$a = -2b \text{ και } c = 3b$$

Επιλέγουμε  $b = 1$ , οπότε  $\mathbf{y} = (-2, 1, 3)$ .

Τότε

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle^2 = (b - a - 5c)^2 = (1 - (-2) - 5 \cdot 3)^2 = (-12)^2 = 144.$$

$$\langle \mathbf{y}, \mathbf{y} \rangle = (-2)^2 + 1^2 + 3^2 = 14$$

Άρα,

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle^2 \leq \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle \langle \mathbf{y}, \mathbf{y} \rangle$$

$$144 \leq ((x + y - 1)^2 + (2x - y + 1)^2 + (y - 5)^2) \cdot 14$$

$$\text{Άρα, } (x + y - 1)^2 + (2x - y + 1)^2 + (y - 5)^2 \geq \frac{144}{14}.$$

Άρα, η ελάχιστη τιμή της παράστασης  $\Pi$  ισούται με  $\frac{144}{14}$ .

(2ος τρόπος) Παρατηρούμε ότι

$$\begin{aligned} \Pi &= \left\| \begin{bmatrix} x + y - 1 \\ 2x - y + 1 \\ y - 5 \end{bmatrix} \right\|^2 = \left\| \begin{bmatrix} x + y \\ 2x - y \\ y \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 5 \end{bmatrix} \right\|^2 \\ &= \left\| \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 5 \end{bmatrix} \right\|^2 \end{aligned}$$

Άρα, η ελαχιστοποίηση του  $\Pi$  μπορεί να προκύψει από την λύση του συμβιβαστού συστήματος

$$A^t A X = A^t B$$

όπου

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 5 \end{bmatrix}$$

## Άσκηση 6

Να διαγωνιοποιηθεί ορθογωνίως η μήτρα

$$A = \begin{bmatrix} 7 & -1 & -2 \\ -1 & 7 & 2 \\ -2 & 2 & 10 \end{bmatrix}$$

Επειδή η μήτρα είναι συμμετρική έπεται ότι έχει ορθογώνια διαγωνιοποίηση.



Θεωρούμε την χαρακτηριστική εξίσωση

$$|A - \lambda I_3| = 0$$

$$\begin{vmatrix} 7 - \lambda & -1 & -2 \\ -1 & 7 - \lambda & 2 \\ -2 & 2 & 10 - \lambda \end{vmatrix} = 0 \quad (R_1 \rightarrow R_1 + R_2)$$

$$\begin{vmatrix} 6 - \lambda & 6 - \lambda & 0 \\ -1 & 7 - \lambda & 2 \\ -2 & 2 & 10 - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$(6 - \lambda) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 7 - \lambda & 2 \\ -2 & 2 & 10 - \lambda \end{vmatrix} = 0 \quad (C_2 \rightarrow C_2 - C_1)$$

$$(6 - \lambda) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 8 - \lambda & 2 \\ -2 & 4 & 10 - \lambda \end{vmatrix} = 0 \quad (\text{Ανάπτυγμα με βάση 1η γραμμή})$$

$$(6 - \lambda) \cdot 1 \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 8 - \lambda & 2 \\ 4 & 10 - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$(6 - \lambda)((8 - \lambda)(10 - \lambda) - 8) = 0$$

$$(6 - \lambda)(\lambda^2 - 18\lambda + 72) = 0$$

$$(6 - \lambda)^2(12 - \lambda) = 0$$

Άρα, η  $A$  έχει ιδιοτιμές  $\lambda_1 = 12$  και  $\lambda_2 = \lambda_3 = 6$  (διπλή).

Θα βρούμε τα ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν σε κάθε ιδιοτιμή.

Το χαρακτηριστικό σύστημα είναι

$$(A - \lambda I_3)X = O_{3 \times 1}, \text{ όπου } X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

Για την ιδιοτιμή  $\lambda_1 = 12$  προκύπτει το χαρακτηριστικό σύστημα:

$$\begin{cases} -5x_1 - x_2 - 2x_3 = 0 \\ -x_1 - 5x_2 + 2x_3 = 0 \\ -2x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -6x_1 - 6x_2 = 0 \\ -x_1 - 5x_2 + 2x_3 = 0 \\ -2x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 0 \end{cases}$$

Άρα,  $x_1 = -x_2$ .

Οπότε  $-4x_1 - 2x_3 = 0 \Leftrightarrow x_3 = -2x_1$ .

Άρα, τα ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν στην ιδιοτιμή  $\lambda_1 = 12$  έχουν την μορφή

$$(x_1, x_2, x_3) = (x_1, -x_1, -2x_1) = x_1(1, -1, -2).$$

Επομένως, μια βάση του ιδιόχωρου είναι το ιδιοδιάνυσμα

$$\mathbf{u}_1 = (1, -1, -2).$$

Για τις ιδιοτιμές  $\lambda_2 = \lambda_3 = 6$  προκύπτει το χαρακτηριστικό σύστημα:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - 2x_3 = 0 \\ -x_1 + x_2 + 2x_3 = 0 \\ -2x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x_1 - x_2 - 2x_3 = 0$$

Οπότε  $x_2 = x_1 - 2x_3$ .

Άρα, τα ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν στις ιδιοτιμές  $\lambda_2 = \lambda_3 = 6$  έχουν την μορφή

$$\begin{aligned} (x_1, x_2, x_3) &= (x_1, x_1 - 2x_3, x_3) = (x_1, x_1, 0) + (0, -2x_3, x_3) \\ &= x_1(1, 1, 0) + x_3(0, -2, 1) \end{aligned}$$

Άρα, ο ιδιόχωρος που αντιστοιχεί στην διπλή ιδιοτιμή  $\lambda_2 = \lambda_3 = 6$  έχει ως βάση τα διανύσματα

$\mathbf{u}_2 = (1, 1, 0)$  και  $\mathbf{u}_3 = (0, -2, 1)$ .

Για να κάνουμε την ορθογώνια διαγωνιοποίηση, προκειμένου να βρούμε την ορθογώνια μήτρα  $P$ , θα εφαρμόσουμε τον αλγόριθμο των Gram - Schmidt στα  $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3$ .

Επειδή το  $\mathbf{u}_1$  ανήκει σε διαφορετικό ιδιόχωρο από τα  $\mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3$  έπεται είναι ορθογώνιο σ' αυτά. Άρα, αρκεί να εφαρμόσουμε τον αλγόριθμο μόνο στα  $\mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3$  και απλά να κανονικοποιήσουμε το  $\mathbf{u}_1$ .

$$\mathbf{v}_2 = \frac{1}{\|\mathbf{y}_2\|} \mathbf{y}_2 \text{ όπου } \mathbf{y}_2 = \mathbf{u}_2. \|\mathbf{y}_2\| = \sqrt{1^2 + 1^2 + 0^2} = \sqrt{2}. \text{ Άρα,}$$

$$\mathbf{v}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1, 0) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$$

$$\mathbf{v}_3 = \frac{1}{\|\mathbf{y}_3\|} \mathbf{y}_3 \text{ όπου } \mathbf{y}_3 = \mathbf{u}_3 - \langle \mathbf{u}_3, \mathbf{v}_2 \rangle \mathbf{v}_2$$

$$\langle \mathbf{u}_3, \mathbf{v}_2 \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \langle (0, -2, 1), (1, 1, 0) \rangle = -\frac{2}{\sqrt{2}}$$

$$\mathbf{y}_3 = (0, -2, 1) - \left(-\frac{2}{\sqrt{2}}\right) \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1, 0) = (1, -1, 1)$$

$$\|\mathbf{y}_3\| = \sqrt{1^2 + (-1)^2 + 1^2} = \sqrt{3}. \text{ Άρα,}$$

$$\mathbf{v}_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, -1, 1) = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

Τέλος, για τον υπολογισμό του  $\mathbf{v}_1$  αρκεί να κανονικοποιήσουμε το

$$\mathbf{u}_1. \mathbf{v}_1 = \frac{1}{\|\mathbf{u}_1\|} \mathbf{u}_1. \|\mathbf{u}_1\| = \sqrt{1^2 + (-1)^2 + (-2)^2} = \sqrt{6}. \text{ Άρα,}$$

$$\mathbf{v}_1 = \frac{1}{\sqrt{6}}(1, -1, -2) = \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{2}{\sqrt{6}}\right)$$

Συνοψίζοντας

$$\mathbf{v}_1 = \left( \frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{2}{\sqrt{6}} \right)$$

$$\mathbf{v}_2 = \left( \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0 \right)$$

$$\mathbf{v}_3 = \left( \frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}} \right)$$

Άρα, οι ζητούμενες μήτρες είναι η ορθογώνια μήτρα  $P$  και η διαγώνια μήτρα  $D$  όπου

$$P = [\mathbf{v}_1 \quad \mathbf{v}_2 \quad \mathbf{v}_3] = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad D = \begin{bmatrix} 12 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

και ισχύει ότι

$$A = PDP^t$$

(Υπενθυμίζεται ότι  $P^{-1} = P^t$  διότι η  $P$  είναι ορθογώνια.)