Γραμμικά συστήματα

Εφαρμοσμένη Άλγεβρα

2023–2024

Άσκηση 1 (Γραμμικά συστήματα και μήτρες)

α) Να εκφραστεί ως γινόμενο μητρών το σύστημα

$$\begin{cases} 3x + 7y - 3z = 6 \\ 4x - y + 5z = 1 \\ x + y - 8z = 3 \end{cases}$$

β) Να γραφεί η επαυξημένη μήτρα του παραπάνω συστήματος
γ) Να εκφραστεί ως άθροισμα μητρών στηλών το παραπάνω σύστημα

Λύση. α) Έστω οι μήτρες

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 7 & -3 \\ 4 & -1 & 5 \\ 1 & 1 & -8 \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 6 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

των συντελεστών, των μεταβλητών και των σταθερών του συστήματος αντίστοιχα. Το σύστημα είναι ισοδύναμο με την εξίσωση

$$AX = B.$$

β) Η επαυξημένη μήτρα του συστήματος είναι η

$$E = [A|B] = \begin{bmatrix} 3 & 7 & -3 & 6 \\ 4 & -1 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & -8 & 3 \end{bmatrix}$$

γ) Έστω οι μήτρες στήλες

$$\begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 7 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} -3 \\ 5 \\ -8 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 6 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

των συντελεστών του x, του y, του z και των σταθερών όρων του συστήματος αντίστοιχα. Το σύστημα είναι ισοδύναμο με την εξίσωση

$$x \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix} + y \begin{bmatrix} 7 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} -3 \\ 5 \\ -8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Οι μέθοδοι linalg.solve και linalg.lst της numpy

```
#Examples of how to solve the systems of linear equations
#using numpy.linalg methods

import numpy as np

#Example 1: A system with a unique solution
# 3x + 7y - 3z = 6
# 4x - y + 5z = 1
# x + y - 8z = 3

#The matrix of the coefficients of the system
A = np.array([[3,7,-3],[4,-1,5],[1,1,-8]])
#The matrix of the constants of the system
B = np.array([6,1,3])

#Method linalg.solve works only if the system
#has unique solution (and the matrix A is square)
x = np.linalg.solve(A, B)
#Test if the solution is correct
if(np.allclose(np.dot(A, x), B)):
    print("System #1 has a (unique) solution:",x)
    print("Indeed", "A * x = ")
    print(A, x.T, "=", np.dot(A,x))
```

Output:

```
System #1 has a (unique) solution: [ 0.66007905  0.4743083  -0.23320158]
Indeed A * x =
[[ 3  7 -3]
 [ 4 -1  5]
 [ 1  1 -8]] [ 0.66007905  0.4743083  -0.23320158] = [6. 1. 3.]
```

```python
#Example 2: A system with infinite solutions
# x + y + z = 3
# x + 2y + 3z = 6
# 2x + 3x + 4z = 9

#The matrix of the coefficients of the system
A = np.array([[1,1,1],[1,2,3],[2,3,4]])
#The matrix of the constants of the system
B = np.array([3,6,9])

if(np.linalg.det(A)!=0):
    x = np.linalg.solve(A, B)
    print("System #2 has a (unique) solution:",x)
    print("Indeed", "A * x = ")
    print(A, x.T, "=", np.dot(A,x))
else:
    print("System #2 does not have a unique solution.")
    x = np.linalg.lstsq(A, B, rcond=None)[0]
    if(np.allclose(np.dot(A, x), B)):
        print("System #2 has infinite solutions.")
        print("One of the solutions is the following ",x)
        print("Indeed", "A * x = ")
        print(A, x.T, "=", np.dot(A,x))
```

Output:

```
System #2 does not have a unique solution.
System #2 has infinite solutions.
One of the solutions is the following  [1. 1. 1.]
Indeed A * x =
[[1 1 1]
 [1 2 3]
 [2 3 4]] [1. 1. 1.] = [3. 6. 9.]
```

```python
#Example 3: A system with no solution
# x + y + z = 3
# x + 2y + 3z = 6
# 2x + 3x + 4z = 10

#The matrix of the coefficients of the system
A = np.array([[1,1,1],[1,2,3],[2,3,4]])
#The matrix of the constants of the system
B = np.array([3,6,10])

if(np.linalg.det(A)!=0):
    x = np.linalg.solve(A, B)
    print("System #3 has a (unique) solution:",x)
else:
    print("System #3 does not have a unique solution.")
    x = np.linalg.lstsq(A, B, rcond=None)[0]
    if(np.allclose(np.dot(A, x), B)):
        print("System #3 has infinite solutions.")
        print("One of the solutions is the following ",x)
    else:
        print("System #3 does not have a solution.")
        print("The least squares solution is",x)
        print("Which gives", "A * x = ")
        print(A, x.T, "=", np.dot(A,x))
```

Output:

```
System #3 does not have a unique solution.
System #3 does not have a solution.
The least squares solution is [1.27777778 1.11111111 0.94444444]
Which gives A * x =
[[1 1 1]
 [1 2 3]
 [2 3 4]] [1.27777778 1.11111111 0.94444444] = [3.33333333
    6.33333333 9.66666667]
```

```python
#Example 4: A random 100 x 100 system
#A random 100x100 array with integers between [0..999]
A = np.random.randint(1000, size=(100, 100))
#A random 1x100 array with integers between [0..999]
B = np.random.randint(1000, size=100)
x = np.linalg.solve(A, B)
print("System #4 has a (unique) solution:",x)
print("Indeed", "A * x = ")
print(A, x.T, "=", np.dot(A,x))
```

Output:

```
System #4 has a (unique) solution: [-0.02244909  0.3995418  -0.57378884  0.09327363 -0
    .57370786 -0.14783846
 -0.12759525  0.23665549  0.2490102   0.29337865 -0.20680842 -0.38929738
 -0.61462801  0.28175698  0.27595784 -0.02918202 -0.19337778  0.52800834
 -0.63155547  0.03455544 -0.03392223 -0.28286898 -0.95000787  0.18486298
 -0.3465653   0.00360698  0.00426087 -0.30015354 -0.03941799  0.02029472
  0.19693206  0.39298503 -0.27173143 -0.09385911  0.09051104 -0.24000956
  0.10017632  0.52803302 -0.15992044 -0.76756229  0.07292124  0.14819958
  0.69487766 -0.36995357  0.33091358 -0.72586202  0.31328108  0.13857928
  0.30855817  0.12202547 -0.06675897 -0.68511511 -0.06901967  0.06482062
  0.2527178  -0.67728348  0.3640744  -0.21428303  0.06629991  0.35962228
 -0.0372542   0.02293898 -0.12550636  0.44009579  0.37572559 -0.00265277
  0.72945642  0.28285439 -0.14965088  0.35611668  0.35192245  0.04253403
 -0.18832733 -0.26802137 -0.03485027  0.1026539  -0.48033264  0.25595232
  0.23032938  0.46893493  0.0086549   0.32223418 -0.07682241  0.26099854
  0.26189182  0.68410003  0.59451823 -0.11083344 -0.5352956   0.29208091
 -0.28037708  0.00152869 -0.19101464  0.09722628 -0.22463409  0.08488019
  0.20071439 -0.5611845   0.17958756  0.03577552]
```

```
Indeed A * x =
[[549 197 883 ... 345 715 957]
 [470 851 290 ... 190 853 661]
 [706 969 176 ... 488 294   7]
 ...
 [532 908 533 ... 311 566 797]
 [335  99 163 ... 359 931 234]
 [659  58 356 ... 405 370 845]] [-0.02244909  0.3995418  -0.57378884  0.09327363 -0
    .57370786 -0.14783846
 -0.12759525  0.23665549  0.2490102   0.29337865 -0.20680842 -0.38929738
 -0.61462801  0.28175698  0.27595784 -0.02918202 -0.19337778  0.52800834
 -0.63155547  0.03455544 -0.03392223 -0.28286898 -0.95000787  0.18486298
 -0.3465653   0.00360698  0.00426087 -0.30015354 -0.03941799  0.02029472
  0.19693206  0.39298503 -0.27173143 -0.09385911  0.09051104 -0.24000956
  0.10017632  0.52803302 -0.15992044 -0.76756229  0.07292124  0.14819958
  0.69487766 -0.36995357  0.33091358 -0.72586202  0.31328108  0.13857928
  0.30855817  0.12202547 -0.06675897 -0.68511511 -0.06901967  0.06482062
  0.2527178  -0.67728348  0.3640744  -0.21428303  0.06629991  0.35962228
 -0.0372542   0.02293898 -0.12550636  0.44009579  0.37572559 -0.00265277
  0.72945642  0.28285439 -0.14965088  0.35611668  0.35192245  0.04253403
 -0.18832733 -0.26802137 -0.03485027  0.1026539  -0.48033264  0.25595232
  0.23032938  0.46893493  0.0086549   0.32223418 -0.07682241  0.26099854
  0.26189182  0.68410003  0.59451823 -0.11083344 -0.5352956   0.29208091
 -0.28037708  0.00152869 -0.19101464  0.09722628 -0.22463409  0.08488019
  0.20071439 -0.5611845   0.17958756  0.03577552] = [ 34. 481. 643. 455. 808.  48. 344.
    211. 113. 897. 486. 832. 974. 491.
 609.   8. 394.  99.  74. 569. 620.  83. 380. 770. 476. 199. 937. 976.
 603. 358. 559. 479. 371. 397. 696.  30. 222. 645. 350. 138. 892. 527.
 189.  23. 209. 414. 398. 768. 188. 266. 508. 215. 969. 267. 824. 556.
 229. 237. 733. 461. 370. 469. 886. 702. 235. 455. 559. 428. 880. 596.
 853. 228. 580. 698. 531.   7. 151. 413. 273. 543. 634. 705. 926. 131.
 425. 764. 897. 881.  19. 216. 638. 875. 945. 416. 732. 331. 608. 468.
 995. 699.]
```

Άσκηση 2 (Παραμετρικό γραμμικό σύστημα 3×3)

Να λυθεί το γραμμικό σύστημα

$$\begin{cases} x + 2y + z = 3 \\ x - 5y - 2z = 1 \\ 3x - 6y + az = 6 \end{cases}$$

όπου x, y, z *είναι οι άγνωστοι και* $a \in \mathbb{R}$ *είναι παράμετρος.*

Λύση με την μέθοδο Gauss. Θεωρούμε την επαυξημένη μήτρα του συστήματος

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & -5 & -2 & 1 \\ 3 & -6 & a & 6 \end{bmatrix}$$

από την οποία προκύπτουν τα ισοδύναμα συστήματα

$$E \overset{\substack{R_2 \to R_2 - R_1 \\ R_3 \to R_3 - 3R_1}}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & -7 & -3 & -2 \\ 0 & -12 & a-3 & -3 \end{bmatrix}$$

$$\overset{R_2 \to \frac{1}{-7} R_2}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 3/7 & 2/7 \\ 0 & -12 & a-3 & -3 \end{bmatrix}$$

$$\overset{\substack{R_1 \to R_1 - 2R_2 \\ R_3 \to R_3 + 12R_2}}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1/7 & 17/7 \\ 0 & 1 & 3/7 & 2/7 \\ 0 & 0 & (7a+15)/7 & 3/7 \end{bmatrix}$$

Διακρίνουμε περιπτώσεις:

- Αν $(7a + 15)/7 = 0 \Leftrightarrow a = -15/7$ τότε η μήτρα E είναι ισοδύναμη με την μήτρα
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1/7 & 17/7 \\ 0 & 1 & 3/7 & 2/7 \\ 0 & 0 & 0 & 3/7 \end{bmatrix}$$
της οποίας η τρίτη γραμμή αντιστοιχεί στην εξίσωση $0x + 0y + 0z = 3/7$, η οποία είναι αδύνατη.

- Αν $(7a+15)/7 \neq 0 \Leftrightarrow a \neq -15/7$ τότε προκύπτει το ισοδύναμο σύστημα

$$E \overset{R_3 \to \frac{7}{7a+15} R_3}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1/7 & 17/7 \\ 0 & 1 & 3/7 & 2/7 \\ 0 & 0 & 1 & 3/(7\alpha+15) \end{bmatrix}$$

$$\overset{\substack{R_1 \to R_1 - (1/7)R_3 \\ R_2 \to R_2 - (3/7)R_3}}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & (17a+36)/(7a+15) \\ 0 & 1 & 0 & (2a+3)/(7a+15) \\ 0 & 0 & 1 & 3/(7\alpha+15) \end{bmatrix}$$

οπότε το σύστημα έχει την μοναδική λύση

$$x = \frac{17a+36}{7a+15}, \quad y = \frac{2a+3}{7a+15}, \quad z = \frac{3}{7a+15}.$$

Λύση με την μέθοδο Cramer. Επειδή το σύστημα είναι τετραγωνικό (έχει 3 εξισώσεις και 3 αγνώστους) μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε και την μέθοδο των οριζουσών.
Η ορίζουσα D των συντελεστών του συστήματος ισούται με

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -5 & -2 \\ 3 & -6 & a \end{vmatrix} \overset{\substack{R_2 \to R_2 - R_1 \\ R_3 \to R_3 - 3R_1}}{=} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -7 & -3 \\ 0 & -12 & a-3 \end{vmatrix}$$

$$\overset{\text{ανάπτυγμα ως προς 1η στήλη}}{=} 1 \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} -7 & -3 \\ -12 & a-3 \end{vmatrix}$$

$$= (-7)(a-3) - (-3)(-12) = -7a - 15.$$

Διακρίνουμε περιπτώσεις:

- Αν $D \neq 0 \Leftrightarrow -7a - 15 \neq 0 \Leftrightarrow a \neq -15/7$ τότε το σύστημα έχει μοναδική λύση που δίνεται από τους τύπους

$$x = \frac{D_x}{D} \quad y = \frac{D_y}{D} \quad z = \frac{D_z}{D}$$

όπου

$$D_x = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & -5 & -2 \\ 6 & -6 & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 17 & 7 \\ 1 & -5 & -2 \\ 0 & 24 & a+12 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 17 & 7 \\ 24 & a+12 \end{vmatrix} =$$
$$-(17(a+12) - 7 \cdot 24) = -17a - 36.$$

$$D_y = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 3 & 6 & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & -2 & -3 \\ 0 & -3 & a-3 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} -2 & -3 \\ -3 & a-3 \end{vmatrix} =$$
$$(-2)(a-3) - (-3) \cdot (-3) = -2a - 3.$$

$$D_z = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -5 & 1 \\ 3 & -6 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & -7 & -2 \\ 0 & -12 & -3 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} -7 & -2 \\ -12 & -3 \end{vmatrix} =$$
$$(-7)(-3) - (-12)(-2) = -3.$$

άρα για $a \neq -15/7$ έχουμε ότι

$$x = \frac{17+36}{7a+15}, \quad y = \frac{2a+3}{7a+15}, \quad z = \frac{3}{7a+15}$$

- Αν $D = 0 \Leftrightarrow -7a - 15 = 0 \Leftrightarrow a = -15/7$, τότε επειδή $D_z \neq 0$ έπεται ότι το σύστημα είναι αδύνατο.

Η μέθοδος linsolve της sympy

```
#Examples of how to solve the systems of linear equations
#using sympy methods
import sympy as sp
#Example 1: A parametric system
# x + 2y + z = 3
# x - 5y - 2z = 1
# 3x - 6y + az = 6
x,y,z,a  = sp.symbols('x y z a')
A = sp.Matrix([[1,2,1],[1,-5,-2],[3,-6,a]])
B = sp.Matrix([3,1,6])
X = sp.linsolve((A,B), [x, y, z])
print("General case:", X)

#a = -15/7 #approx 2.14286
A1 = A.subs(a,-15/7)
X = sp.linsolve((A1,B), [x, y, z])
X1 = sp.Matrix(list(X))
print("Special case (wrong answer):", X)
print("A*X =",(A1@X1.T),"not equal to B =",list(B))

#a = sp.Rational(str("-15/7"))
A2 = A.subs(a,sp.Rational(str("-15/7")))
X = sp.linsolve((A2,B), [x, y, z])
print("Special case (correct answer):", X)
```

Output:

```
General case: {((17*a + 36)/(7*a + 15), (2*a + 3)/(7*a + 15), 3/(7*
    a + 15))}
Special case (wrong solution): {(-160842843834658.0,
    -482528531503981.0, 1.12589990684262e+15)}
A*X = Matrix([[3.00000000000000], [1.00000000000000],
    [5.50000000000000]]) not equal to B = [3, 1, 6]
Special case (correct solution): EmptySet
```

Άσκηση 3 (Παραμετρικό γραμμικό σύστημα 2×3)

Να λυθεί το γραμμικό σύστημα

$$\begin{cases} x + 4y + 3z = a \\ bx + 2y + z = 15 \end{cases}$$

όπου x, y, z *είναι οι άγνωστοι και* a, b *παράμετροι.*

Λύση. Επειδή το σύστημα δεν είναι τετραγωνικό η μοναδική μέθοδος επίλυσης είναι ο αλγόριθμος του Gauss.
Παρατηρούμε ότι η παράμετρος b εμφανίζεται στην στήλη των συντελεστών του x, ενώ οι στήλες των συντελεστών των μεταβλητών y, z δεν περιέχουν παραμέτρους.
Προκειμένου να αναβάλλουμε, ή ακόμα και να αποφύγουμε , την εξέταση περιπτώσεων για το b, μας συμφέρει **να αλλάξουμε την σειρά των μεταβλητών του συστήματος ώστε στις πρώτες στήλες της επαυξημένης μήτρας να μην εμφανίζονται παράμετροι**.

Στο συγκεκριμένο σύστημα γράφουμε ισοδύναμα τις εξισώσεις ως εξής:

$$\begin{cases} 4y + 3z + x = a \\ 2y + z + bx = 15 \end{cases}$$

οπότε η επαυξημένη μήτρα είναι η

$$E = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 1 & a \\ 2 & 1 & b & 15 \end{bmatrix}$$

από την οποία προκύπτουν τα ισοδύναμα συστήματα

$$E \overset{R_1 \to R_2}{\sim} \begin{bmatrix} 2 & 1 & b & 15 \\ 4 & 3 & 1 & a \end{bmatrix} \overset{R_2 \to R_2 - 2R_1}{\sim} \begin{bmatrix} 2 & 1 & b & 15 \\ 0 & 1 & 1-2b & a-30 \end{bmatrix}$$
$$\overset{R_1 \to R_1 - R_2}{\sim} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 3b-1 & 45-a \\ 0 & 1 & 1-2b & a-30 \end{bmatrix}.$$

Το τελευταίο σύστημα γράφεται σε μορφή εξισώσεων ως

$$\begin{cases} 2y + (3b - 1)x = 45 - a \\ z + (1 - 2b)x = a - 30 \end{cases}$$

Επομένως, το σύστημα έχει άπειρες λύσεις της μορφής

$$(x, y, z) = (x, \frac{45 - a - (3b - 1)x}{2}, a - 30 - (1 - 2b)x), \text{ όπου } x \in \mathbb{R}$$

Παρατήρηση. Αν δεν είχαμε κάνει την αλλαγή της σειράς των μεταβλητών, για την επίλυση του αρχικού συστήματος θα εργαζόμασταν ως εξής:

Θεωρούμε την επαυξημένη μήτρα E του συστήματος

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 & a \\ b & 2 & 1 & 15 \end{bmatrix}$$

από την οποία προκύπτει το ισοδύναμο σύστημα

$$E \overset{R_2 \to R_2 - bR_1}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 & a \\ 0 & 2-4b & 1-3b & 15-ab \end{bmatrix}$$

Διακρίνουμε περιπτώσεις για το $2-4b$.

- Αν $2-4b \neq 0 \Leftrightarrow b \neq 1/2$ τότε προκύπτει το ισοδύναμο σύστημα

  $$E \overset{R_2 \to \frac{1}{2-4b}R_2}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 & a \\ 0 & 1 & \frac{1-3b}{2-4b} & \frac{15-ab}{2-4b} \end{bmatrix} \overset{R_1 \to R_1 - 4R_2}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{2}{2-4b} & \frac{2a-60}{2-4b} \\ 0 & 1 & \frac{1-3b}{2-4b} & \frac{15-ab}{2-4b} \end{bmatrix}$$

  το οποίο μορφή εξισώσεων είναι

  $$\begin{cases} x + \frac{2}{2-4b} z = \frac{2a-60}{2-4b} \\ y + \frac{1-3b}{2-4b} z = \frac{15-ab}{2-4b} \end{cases}.$$

  Άρα, το σύστημα έχει άπειρες λύσεις της μορφής

  $$(x,y,z) = (\frac{2a-60}{2-4b} - \frac{2}{2-4b}z, \frac{15-ab}{2-4b} - \frac{1-3b}{2-4b}z, z), \text{ όπου } z \in \mathbb{R}.$$

- Αν $2-4b=0 \Leftrightarrow b=1/2$ τότε προκύπτει το ισοδύναμο σύστημα

$$E \sim \begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 & a \\ 0 & 0 & -1/2 & (30-a)/2 \end{bmatrix} \underset{\sim}{R_2 \to (-2)R_2} \begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 & a \\ 0 & 0 & 1 & a-30 \end{bmatrix}$$
$$\underset{\sim}{R_1 \to R_1 - 3R_2} \begin{bmatrix} 1 & 4 & 0 & 90-2a \\ 0 & 0 & 1 & a-30 \end{bmatrix}$$

το οποίο μορφή εξισώσεων είναι

$$\begin{cases} x+4y=90-2a \\ z=a-30 \end{cases} .$$

Άρα, το σύστημα (πάλι) έχει άπειρες λύσεις της μορφής

$$(x,y,z)=(90-2a-4y, y, a-30), \text{ όπου } y \in \mathbb{R}.$$

Άσκηση 4 (Παραμετρικό γραμμικό σύστημα 2×3)

Να λυθεί το γραμμικό σύστημα

$$\begin{cases} x + y + z = b \\ x + y + az = 1 \end{cases}$$

Λύση. Θεωρούμε την επαυξημένη μήτρα

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & b \\ 1 & 1 & a & 1 \end{bmatrix}$$

από την οποία έχουμε ισοδύναμα

$$E \overset{R_2 \to R_2 - R_1}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & b \\ 0 & 0 & a-1 & 1-b \end{bmatrix}$$

Διακρίνουμε περιπτώσεις για το $a-1$.

- Αν $a-1=0 \Leftrightarrow a=1$ τότε προκύπτει η μήτρα
$$\begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & b \\ 0 & 0 & 0 & 1-b\end{bmatrix}$$
Διακρίνουμε περιπτώσεις για το $1-b$.
  - Αν $1-b \neq 0 \Leftrightarrow b \neq 1$, τότε το σύστημα είναι αδύνατο, αφού περιέχει την εξίσωση $0x+0y+0z=1-b$.
  - Αν $1-b=0 \Leftarrow b=1$, τότε το σύστημα ανάγεται στην μοναδική εξίσωση $x+y+z=1$.
    Επομένως, έχει άπειρες λύσεις της μορφής
    $(x,y,z)=(x,y,1-x-y)$, όπου $x,y \in \mathbb{R}$.
- Αν $a-1 \neq 0 \Leftrightarrow a \neq 1$ τότε προκύπτουν οι ισοδύναμες μήτρες
$$\overset{R_2 \to \frac{1}{a-1}R_2}{\sim} \begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1-b}{1-a}\end{bmatrix} \overset{R_1 \to R_1 - R_2}{\sim} \begin{bmatrix}1 & 1 & 0 & \frac{b(2-a)-1}{1-a} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1-b}{1-a}\end{bmatrix}$$
Επομένως, το σύστημα έχεις άπειρες λύσεις της μορφής
$$(x,y,z)=\left(\frac{b(2-a)-1}{1-a}-y, y, \frac{1-b}{1-a}\right) \text{ όπου } y \in \mathbb{R}.$$

Άσκηση 5 (Παραμετρικό γραμμικό σύστημα με μοναδική λύση)

Να βρεθεί η τιμή της παραμέτρου a ώστε το γραμμικό σύστημα

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 6 \\ x + y + z = 3 \\ x - y + az = 1 \end{cases}$$

να έχει μοναδική λύση.

Λύση. Για να απαντήσουμε στο ερώτημα δεν χρειάζεται να λύσουμε το σύστημα. Επειδή το σύστημα είναι τετραγωνικό αρκεί να βρούμε πότε η ορίζουσα D των συντελεστών του είναι διάφορη του μηδενός.

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & a-1 \end{vmatrix} = (-1) \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -2 & a-1 \end{vmatrix} = -(a+3).$$

Επομένως, το σύστημα έχει μοναδική λύση όταν $a \neq -3$.

Άσκηση 6 (Παραμετρικό ομογενές γραμμικό σύστημα με άπειρες λύσεις)

Να βρεθεί η τιμή της παραμέτρου a ώστε το ομογενές γραμμικό σύστημα

$$\begin{cases} ax+y+z=0 \\ x+ay+z=0 \\ x+y+az=0 \end{cases}$$

να έχει άπειρες λύσεις

Λύση. Ένα ομογενές σύστημα ποτέ δεν είναι αδύνατο. (Πάντα έχει την μηδενική λύση.) Το σύστημα έχει άπειρες λύσεις ανν η ορίζουσα D του συστήματος ισούται με 0.

$$D = \begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1-a & 1-a^2 \\ 0 & a-1 & 1-a \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix} = 1(-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 1-a & 1-a^2 \\ a-1 & 1-a \end{vmatrix}$$

$$= (1-a)(1-a) + (1-a)(1-a^2) = (1-a)(2-a-a^2) = (1-a)^2(2+a)$$

Το σύστημα έχει άπειρες λύσεις όταν $D = 0 \Leftrightarrow a = 1$ ή $a = -2$.

Άσκηση 7 (Εξίσωση ευθείας που διέρχεται από δύο σημεία)

Να αποδειχθεί ότι η ευθεία που διέρχεται από τα σημεία (x_1, y_1), (x_2, y_2) *ικανοποιεί την εξίσωση*

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Λύση. Η εξίσωση μιας ευθείας του επιπέδου έχει την μορφή

$$c_1 x + c_2 y + c_3 = 0$$

Αν η ευθεία διέρχεται από τα σημεία (x_1, y_1) και (x_2, y_2) τότε ισχύουν οι σχέσεις

$$\begin{cases} c_1 x_1 + c_2 y_1 + c_3 = 0 \\ c_1 x_2 + c_2 y_2 + c_3 = 0 \end{cases}$$

για κάθε άλλο σημείο (x, y) που διέρχεται η ευθεία επίσης ισχύει

$$c_1 x + c_2 y + c_3 = 0$$

Θεωρούμε το σύστημα που περιγράφει το σύνολο όλων σημείων από τα οποία διέρχεται η ευθεία (οι άγνωστοι είναι τα c_1, c_2, c_3)

$$\begin{cases} c_1 x + c_2 y + c_3 = 0 \\ c_1 x_1 + c_2 y_1 + c_3 = 0 \\ c_1 x_2 + c_2 y_2 + c_3 = 0 \end{cases}$$

Το σύστημα είναι ομογενές, άρα ποτέ δεν είναι αδύνατο.
Αν η ορίζουσα D του συστήματος είναι διάφορη του μηδενός, τότε το σύστημα έχει μοναδική λύση $c_1 = c_2 = c_3 = 0$, η οποία δεν αντιστοιχεί στην εξίσωση της ευθείας.
Άρα, πρέπει η ορίζουσα D του συστήματος να ισούται με μηδέν, δηλαδή

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_2 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Παράδειγμα. Η εξίσωση της ευθείας του επιπέδου που διέρχεται από τα σημεία $(2,1)$ και $(3,7)$ ικανοποιεί την εξίσωση

$$D = \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 7 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Όμως

$$\begin{aligned} D = \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 7 & 1 \end{vmatrix} &\overset{\substack{R_2 \to R_2 - R_1 \\ R_3 \to R_3 - R_1}}{=} \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 2-x & 1-y & 0 \\ 3-x & 7-y & 0 \end{vmatrix} \\ &= (2-x)(7-y) - (3-x)(1-y) \\ &= 14 - 2y - 7x + xy - 3 + 3y + x - xy = 11 - 6x + y \end{aligned}$$

Άρα, η εξίσωση της ζητούμενης ευθείας είναι η $11 - 6x + y = 0$.

Παρατήρηση. Μέσω της ορίζουσας βρήκαμε την εξίσωση της ευθείας χωρίς να λύσουμε σύστημα! Εναλλακτικά θα λύναμε το σύστημα

$$\begin{cases} 2c_1 + c_2 + c_3 = 0 \\ 3c_1 + 7c_2 + c_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \cdots \Leftrightarrow \begin{cases} c_1 = -\frac{6}{11} c_3 \\ c_2 = \frac{1}{11} c_3 \end{cases} \quad \text{όπου } c_3 \in \mathbb{R}.$$

Από το οποίο, για $c_3 = 11$ προκύπτει η ζητούμενη εξίσωση.

Άσκηση 8 (Εξίσωση κύκλου που διέρχεται από τρία σημεία)

Να δειχθεί ότι η εξίσωση του κύκλου που διέρχεται από τα σημεία (x_1, y_1), (x_2, y_2) και (x_3, y_3) δίδεται από την ισότητα

$$\begin{vmatrix} x^2+y^2 & x & y & 1 \\ x_1^2+y_1^2 & x_1 & y_1 & 1 \\ x_2^2+y_2^2 & x_2 & y_2 & 1 \\ x_3^2+y_3^2 & x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Λύση. Η εξίσωση ενός κύκλου έχει την μορφή

$$c_1(x^2+y^2)+c_2x+c_3y+c_4=0$$

Αν ο κύκλος διέρχεται από τα τρία σημεία (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3) προκύπτει το σύστημα

$$\begin{cases} c_1(x^2+y^2)+c_2x+c_3y+c_4=0 \\ c_1(x_1^2+y_1^2)+c_2x_1+c_3y_1+c_4=0 \\ c_1(x_2^2+y_2^2)+c_2x_2+c_3y_2+c_4=0 \\ c_1(x_3^2+y_3^2)+c_2x_3+c_3y_3+c_4=0 \end{cases}$$

Το σύστημα είναι ομογενές, άρα ποτέ δεν είναι αδύνατο. Αν η ορίζουσα D του συστήματος είναι διάφορη του μηδενός, τότε το σύστημα έχει μοναδική λύση $c_1 = c_2 = c_3 = c_4 = 0$, η οποία δεν αντιστοιχεί στην εξίσωση του κύκλου.
Άρα, πρέπει η ορίζουσα D του συστήματος να ισούται με μηδέν, δηλαδή

$$\begin{vmatrix} x^2+y^2 & x & y & 1 \\ x_1^2+y_1^2 & x_1 & y_1 & 1 \\ x_2^2+y_2^2 & x_2 & y_2 & 1 \\ x_3^2+y_3^2 & x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Παράδειγμα. Η εξίσωση του κύκλου που διέρχεται από τα σημεία $(1,1)$, $(1,2)$ και $(3,1)$ είναι

$$\begin{vmatrix} x^2+y^2 & x & y & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 5 & 1 & 2 & 1 \\ 10 & 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x^2+y^2-2 & x-1 & y-1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 0 \\ 8 & 2 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x^2+y^2-2 & x-1 & y-1 \\ 3 & 0 & 1 \\ 8 & 2 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= -3 \begin{vmatrix} x-1 & y-1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} x^2+y^2-2 & x-1 \\ 8 & 2 \end{vmatrix} = 6(y-1) - (2x^2+2y^2-4-8x+8)$$

$$= -2x^2 - 2y^2 + 8x + 6y - 10 = 0.$$