1η ΔΙΑΛΕΞΗ

Ιδιοτιμές - Ιδιοδιανύσματα

- **Βασικοί ορισμοί και συμβολισμοί**
- **Ιδιότητες χαρακτηριστικών μεγεθών**

Επανάληψη βασικών εννοιών στους διανυσματικούς χώρους

Ένας διανυσματικός χώρος $V = (V, +, \cdot)$ είναι ένα σύνολο V εφοδιασμένο με δύο πράξεις $+$ (εσωτερική πράξη) και $\cdot$ (εξωτερική πράξη) που ικανοποιούν ορισμένες ιδιότητες.

Παραδείγματα:

1. Ο $\mathbb{R}^n = (\mathbb{R}^n, +, \cdot)$ όπου οι πράξεις ορίζονται ως εξής:

$$\begin{aligned}(x_1, x_2, \ldots, x_n) + (y_1, y_2, \ldots, y_n)\\ = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n)\end{aligned}$$

   και

$$\lambda \cdot (x_1, x_2, \ldots, x_n) = (\lambda x_1, \lambda x_2, \ldots, \lambda x_n)$$

   είναι ένας διανυσματικός χώρος.

2. Προφανώς, και το σύνολο των πινάκων-γραμμών καθώς και των πινάκων-στηλών, με n στοιχεία, με τις αντίστοιχες πράξεις είναι διανυσματικοί χώροι.

Επανάληψη βασικών εννοιών στους διανυσματικούς χώρους

Τα διανύσματα $v_1, v_2, \ldots, v_n$ λέγονται **γραμμικά ανεξάρτητα** αν ισχύει η ισοδυναμία

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots + \lambda_n v_n = 0 \Leftrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_n = 0$$

Βάση ενός διανυσματικού χώρου V είναι ένα σύνολο από όσο γίνεται λιγότερα διανύσματα $v_1, v_2, \ldots, v_n$ του V τα οποία είναι γραμμικά ανεξάρτητα και τα οποία \`\`**παράγουν**´´ το διανυσματικό χώρο V, (δηλαδή κάθε στοιχείο του V μπορεί να γραφεί ως *γραμμικός συνδυασμός* $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots + \lambda_n v_n$ των $v_1, v_2, \ldots, v_n$, όπου $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$).

Η **διάσταση** ενός διανυσματικού χώρου V ($\dim V$) ισούται με το πλήθος των στοιχείων οποιασδήποτε βάσης του (αφού αποδεικνύεται ότι όλες οι βάσεις ενός διανυσματικού χώρου V έχουν το ίδιο πλήθος στοιχείων).

Παράδειγμα: $\dim \mathbb{R}^n = n$ (και άρα, όμοια και για τους πίνακες-γραμμές και για τους πίνακες-στήλες, με n στοιχεία.)

Ιδιοτιμές - Ιδιοδιανύσματα

Έστω A: $n \times n$ μήτρα, X: $n \times 1$ μήτρα, $\lambda \in \mathbb{R}$ (ή $\mathbb{C}$).
Το σύστημα

$$AX = \lambda X$$

(ισοδύναμα $AX - \lambda X = O_{n\times 1}$, ή $(A - \lambda I_n)X = O_{n\times 1}$) ονομάζεται **χαρακτηριστικό σύστημα της** A.
Η μήτρα

$$A - \lambda I_n = \begin{bmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} - \lambda \end{bmatrix}$$

ονομάζεται **χαρακτηριστική μήτρα της** A.
Η ορίζουσα

$$\det(A - \lambda I_n) = f(\lambda) = \beta_n \lambda^n + \beta_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + \beta_0$$

είναι πολυώνυμο του λ βαθμού n (με $\beta_n = (-1)^n$) και ονομάζεται **χαρακτηριστικό πολυώνυμο της** A.

Ιδιοτιμές - Ιδιοδιανύσματα

Η εξίσωση

$$\det(A - \lambda I_n) = 0$$

ονομάζεται **χαρακτηριστική εξίσωση της** A.

Οι ρίζες λ_i της χαρακτηριστικής εξίσωσης ($\lambda_i \in \mathbb{R}$ ή $\lambda_i \in \mathbb{C}$) ονομάζονται **ιδιοτιμές** (ή **χαρακτηριστικές τιμές**) της A.

Παρατήρηση: Για κάθε ιδιοτιμή λ_i το ομογενές σύστημα $(A - \lambda_i I_n)X = O_{n\times 1}$ έχει και μη μηδενικές λύσεις (αφού $\det(A - \lambda_i I) = 0$).

Οι **μη μηδενικές λύσεις** του συστήματος

$$(A - \lambda I_n)X = O_{n\times 1}$$

ονομάζονται **χαρακτηριστικά διανύσματα** ή **ιδιοδιανύσματα της** A**, που αντιστοιχούν στην ιδιοτιμή** λ_i.

Για κάθε ιδιοτιμή λ_i το σύνολο των ιδιοδιανυσμάτων της A (μαζί με το μηδενικό διάνυσμα) παράγουν ένα διανυσματικό χώρο που ονομάζεται **ιδιόχωρος της** A**, που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή** λ_i.

Παράδειγμα 1

Έστω
$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & -2 \\ 3 & 6 & 6 \end{bmatrix}.$$

Το χαρακτηριστικό σύστημα της A είναι

$$AX = \lambda X \Leftrightarrow$$
$$\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & -2 \\ 3 & 6 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \Leftrightarrow$$
$$\left(\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & -2 \\ 3 & 6 & 6 \end{bmatrix} - \lambda I_3 \right) \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow$$

Ιδιοτιμές - Ιδιοδιανύσματα

$$\left(\begin{bmatrix}3 & 0 & 0\\ 2 & -1 & -2\\ 3 & 6 & 6\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}\lambda & 0 & 0\\ 0 & \lambda & 0\\ 0 & 0 & \lambda\end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\ 0\\ 0\end{bmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\begin{bmatrix}3-\lambda & 0 & 0\\ 2 & -1-\lambda & -2\\ 3 & 6 & 6-\lambda\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\ 0\\ 0\end{bmatrix}.$$

Η παραπάνω 3×3 μήτρα είναι η χαρακτηριστική μήτρα της A.
Άρα, προκύπτει το σύστημα

$$\begin{cases}(3-\lambda)x_1 = 0\\ 2x_1 + (-1-\lambda)x_2 - 2x_3 = 0\\ 3x_1 + 6x_2 + (6-\lambda)x_3 = 0.\end{cases}$$

Ιδιοτιμές - Ιδιοδιανύσματα

$$
\begin{aligned}
\det(A - \lambda I_n) &= \begin{vmatrix} 3-\lambda & 0 & 0 \\ 2 & -1-\lambda & -2 \\ 3 & 6 & 6-\lambda \end{vmatrix} \\
&= (3-\lambda) \begin{vmatrix} -1-\lambda & -2 \\ 6 & 6-\lambda \end{vmatrix} \\
&= (3-\lambda)\left((-1-\lambda)(6-\lambda) + 12\right) \\
&= (3-\lambda)(-6+\lambda-6\lambda+\lambda^2+12) \\
&= (3-\lambda)(\lambda^2-5\lambda+6) \\
&= 3\lambda^2 - 15\lambda + 18 - \lambda^3 + 5\lambda^2 - 6\lambda \\
&= -\lambda^3 + 8\lambda^2 - 21\lambda + 18.
\end{aligned}
$$

Το παραπάνω πολυώνυμο είναι το χαρακτηριστικό πολυώνυμο της A.

Άρα, η χαρακτηριστική εξίσωση της A είναι

$$
\begin{aligned}
\det(A - \lambda I_n) = 0 \Leftrightarrow \\
-\lambda^3 + 8\lambda^2 - 21\lambda + 18 = 0 \Leftrightarrow \\
(3 - \lambda)(\lambda^2 - 5\lambda + 6) = 0 \Leftrightarrow \\
(3 - \lambda)(\lambda - 3)(\lambda - 2) = 0 \Leftrightarrow \\
-(\lambda - 3)^2(\lambda - 2) = 0 \Leftrightarrow \\
\begin{cases} \lambda_1 = \lambda_2 = 3 \text{ (διπλή)} \\ \lambda_3 = 2. \end{cases}
\end{aligned}
$$

Άρα οι ιδιοτιμές της A είναι οι

$$\lambda_1 = \lambda_2 = 3, \lambda_3 = 2.$$

Ιδιοτιμές - Ιδιοδιανύσματα

Για $\lambda_1 = \lambda_2 = 3$ ισχύει ότι

$$(A - 3I_3) = O_{3\times 1} \Leftrightarrow \begin{cases} 0x_1 = 0 \\ 2x_1 - 4x_2 - 2x_3 = 0 \\ 3x_1 + 6x_2 + 3x_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x_1 = 0 \\ 2x_2 + x_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_3 = -2x_2. \end{cases}$$

Άρα, τα ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν στην ιδιοτιμή $\lambda_1 = \lambda_2 = 3$ είναι

$$X = \begin{bmatrix} 0 \\ a \\ -2a \end{bmatrix} = a \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}, \ a \in \mathbb{R}^*.$$

Για $\lambda_3 = 2$ ισχύει ότι

$$(A - 2I_3) = O_{3\times 1} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ 2x_1 - 3x_2 - 2x_3 = 0 \\ 3x_1 + 6x_2 + 4x_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x_1 = 0 \\ 3x_2 + 2x_3 = 0 \\ 3x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_3 = -\frac{3}{2}x_2. \end{cases}$$

Άρα, τα ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν στην ιδιοτιμή $\lambda_3 = 2$ είναι

$$X = \begin{bmatrix} 0 \\ b \\ -\frac{3}{2}b \end{bmatrix} = b \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -\frac{3}{2} \end{bmatrix}, \; b \in \mathbb{R}^*.$$

Παράδειγμα 2

Έστω
$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

Χαρακτηριστικό σύστημα:

$$\begin{cases} (1-\lambda)x_1 - 2x_2 = 0 \\ -2x_1 + (4-\lambda)x_2 = 0 \\ (3-\lambda)x_3 = 0. \end{cases}$$

Χαρακτηριστική μήτρα:

$$A - \lambda I = \begin{bmatrix} 1-\lambda & -2 & 0 \\ -2 & 4-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 3-\lambda \end{bmatrix}.$$

Ιδιοτιμές - Ιδιοδιανύσματα

Χαρακτηριστική πολυώνυμο:

$$\det(A - \lambda I) = -\lambda^3 + 8\lambda^2 - 15\lambda.$$

Χαρακτηριστική εξίσωση:

$$-\lambda^3 + 8\lambda^2 - 15\lambda = 0.$$

Ιδιοτιμές:

$$\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 3, \lambda_3 = 5.$$

Ιδιοδιανύσματα: (δηλαδή μη μηδενικές λύσεις των αντίστοιχων συστημάτων):
Για $\lambda_1 = 0$:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 = 0 \\ -2x_1 + 4x_2 = 0 \\ 3x_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2a \\ a \\ 0 \end{bmatrix} = a \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$a \in \mathbb{R}^*$.

Ιδιοτιμές - Ιδιοδιανύσματα

Για $\lambda_2 = 3$:

$$\begin{cases} -2x_1 - 2x_2 = 0 \\ -2x_1 + x_2 = 0 \\ 0x_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ b \end{bmatrix} = b \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

$b \in \mathbb{R}^*$.
Για $\lambda_3 = 5$:

$$\begin{cases} -4x_1 - 2x_2 = 0 \\ -2x_1 - x_2 = 0 \\ -2x_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c \\ -2c \\ 0 \end{bmatrix} = c \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$c \in \mathbb{R}^*$.

Ιδιοτιμές - Ιδιοδιανύσματα

Παράδειγμα 3

Έστω
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Χαρακτηριστική μήτρα:
$$A - \lambda I = \begin{bmatrix} 1-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 1-\lambda \end{bmatrix}.$$

Χαρακτηριστική εξίσωση: $\det(A - \lambda I) \;=\; 0$

$$\Leftrightarrow \cdots \Leftrightarrow -\lambda^3 + 3\lambda^2 = 0 \Leftrightarrow \lambda^2(3-\lambda) = 0.$$

Ιδιοτιμές: $\lambda_1 = \lambda_2 = 0, \lambda_3 = 3$

Ιδιοτιμές - Ιδιοδιανύσματα

Ιδιοδιανύσματα:
Για $\lambda = 0$ το σύστημα γίνεται

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x_1 + x_2 + x_3 = 0 \Leftrightarrow x_3 = -x_1 - x_2.$$

Άρα,

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ -a-b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ 0 \\ -a \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ b \\ -b \end{bmatrix} = a \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix},$$

όπου $|a| + |b| \neq 0$.
Παρατήρηση: Όταν τα ιδιοδιανύσματα έχουν πάνω από ένα ελεύθερο άγνωστο, τα διασπάμε (όπως προηγουμένως) γράφοντάς τα ως γραμμικό συνδυασμό άλλων (γραμμικά ανεξάρτητων) διανυσμάτων.

Για $\lambda = 3$ το σύστημα γίνεται

$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 = 0. \end{cases}$$

Το λύνουμε με τη μέθοδο Gauss

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right] \underset{\sim}{R_3 \to R_3 + R_2 + R_1} \left[\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \underset{\sim}{R_1 \leftrightarrow R_2}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \underset{\sim}{R_2 \to R_2 + 2R_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \underset{\sim}{R_2 \to -\frac{1}{3} R_2}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \underset{\sim}{R_1 \to R_1 + 2R_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Άρα

$$\begin{cases} x_1 - x_3 = 0 \\ x_2 - x_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x_1 = x_2 = x_3,$$

οπότε

$$X = \begin{bmatrix} c \\ c \\ c \end{bmatrix} = c \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, c \neq 0.$$

Βασικές ιδιότητες χαρακτηριστικών μεγεθών

Έστω $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ ιδιοτιμές της $A \in \mathcal{M}_n$. Τότε:

1. $\mathrm{tr}A = \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n$.
2. $\det A = \lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n$.
   Επομένως, η A είναι αντιστρέψιμη αν και μόνο αν το 0 δεν είναι ιδιοτιμή της.
3. Αν η A είναι τριγωνική, οι ιδιοτιμές της συμπίπτουν με τα στοιχεία της διαγωνίου της.
4. Αν η A είναι συμμετρική, τότε όλες οι ιδιοτιμές της είναι πραγματικές, δηλαδή $\lambda_i \in \mathbb{R}$, για κάθε $i = 1, \ldots, n$.
   Γενικότερα, αν η A είναι ερμιτιανή, τότε όλες οι ιδιοτιμές της είναι πραγματικές
5. Η A επαληθεύει την χαρακτηριστική της εξίσωση (**Θεώρημα Cayley-Hamilton**).

Βασικές ιδιότητες χαρακτηριστικών μεγεθών

6. Έστω ότι η μήτρα A είναι αντιστρέψιμη. Αν τα λ, X είναι χαρακτηριστικά μεγέθη της αντιστρέψιμης μήτρας, τότε τα λ^{-1}, X είναι αντίστοιχα χαρακτηριστικά μεγέθη της A^{-1}, δηλαδή

$$AX = \lambda X \Leftrightarrow A^{-1}X = \frac{1}{\lambda}X.$$

7. Αν λ, X είναι χαρακτηριστικά μεγέθη της A, τότε τα λ^k, X είναι αντίστοιχα χαρακτηριστικά μεγέθη της A^k, δηλαδή

$$AX = \lambda X \Rightarrow A^kX = \lambda^kX.$$

Παράδειγμα: Είδαμε ότι για την μήτρα

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & -2 \\ 3 & 6 & 6 \end{bmatrix}$$

του Παραδείγματος 1 έχουμε $\lambda_1 = \lambda_2 = 3$ (διπλή), $\lambda_3 = 2$.
Ισχύει ότι

- $\mathrm{tr} A = 3 + (-1) + 6 = 8$, αλλά και
  $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 3 + 3 + 2 = 8$,
  επαληθεύοντας την ιδιότητα 1.
- $\det A = 3(-6 + 12) = 18$, αλλά και
  $\lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \lambda_3 = 3 \cdot 3 \cdot 2 = 18$,
  επαληθεύοντας την ιδιότητα 2.

Ιδιοτιμές - Ιδιοδιανύσματα

- Η συμμετρική μήτρα $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ του παραδείγματος 2 έχει πραγματικές ιδιοτιμές 0, 3, 5, επαληθεύοντας την ιδιότητα 4.
- Η μήτρα $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & -2 \\ 3 & 6 & 6 \end{bmatrix}$ του παραδείγματος 1 έχει χαρακτηριστικό πολυώνυμο $-\lambda^3 + 8\lambda^2 - 12\lambda + 18$ και ισχύει ότι $-A^3 + 8A^2 - 21A + 18I_3 = O_3$, επαληθεύοντας την ιδιότητα 5.

Ιδιοτιμές - Ιδιοδιανύσματα

- Οι ιδιοτιμές της μήτρας

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & -2 \\ 3 & 6 & 6 \end{bmatrix}$$

είναι οι

$$\lambda_1 = \lambda_2 = 3 \neq 0 \text{ (διπλή)}, \; \lambda_3 = 2 \neq 0,$$

άρα η μήτρα A είναι αντιστρέψιμη.
Επίσης, στο παράδειγμα 3 βρήκαμε ότι οι ιδιοτιμές της μήτρας

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

είναι οι

$$\lambda_1 = \lambda_2 = 0 \text{ (διπλή)}, \; \lambda_3 = 3$$

άρα η μήτρα A δεν είναι αντιστρέψιμη.

2η ΔΙΑΛΕΞΗ
Ιδιοτιμές - Ιδιοδιανύσματα

- **Διαγωνιοποίηση**
- **Βασική εφαρμογή διαγωνιοποίησης**
- **Φασματικό θεώρημα**

Διαγωνιοποίηση

Έστω $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Λέμε ότι η A **διαγωνιοποιείται** όταν υπάρχει αντιστρέψιμη μήτρα $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ με

$$P^{-1}AP = D \Leftrightarrow A = PDP^{-1}$$

όπου D διαγώνια. (Στην περίπτωση αυτή, οι μήτρες D, A λέγονται **όμοιες**.)

Πρόταση 1

Έστω $A \in \mathcal{M}_n$. Η μήτρα A διαγωνιοποιείται αν και μόνο αν έχει n γραμμικώς ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα.

Πρόταση 2

Έστω $A \in \mathcal{M}_n$. Τα ιδιοδιανύσματα της A που αντιστοιχούν σε διαφορετικές ιδιοτιμές είναι γραμμικώς ανεξάρτητα.

Πόρισμα 3

Έστω $A \in \mathcal{M}_n$. Αν η A έχει διακεκριμένες ιδιοτιμές, τότε διαγωνιοποιείται.

Διαγωνιοποίηση

Διαδικασία Διαγωνιοποίησης

1. Βρίσκουμε τις ιδιοτιμές $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ της A (όχι κατ' ανάγκη διαφορετικές μεταξύ τους), λύνοντας τη χαρακτηριστική εξίσωση.
2. Βρίσκουμε τις βάσεις των αντίστοιχων ιδιοχώρων:
   - Βρίσκουμε τα ιδιοδιανύσματα για κάθε λ_i.
   - Κάθε ιδιοδιάνυσμα το εκφράζουμε ως γραμμικό συνδυασμό ενός, ή περισσότερων, γραμμικά ανεξάρτητων διανυσμάτων που παράγουν το χώρο. (Το πλήθος των γραμμικά ανεξάρτητων αυτών διανυσμάτων πρέπει να είναι συνολικά ίσο με n, αλλιώς η A δεν διαγωνιοποιείται.)
3. Φτιάχνουμε τη μήτρα $P \in \mathcal{M}_n$ με στήλες τα παραπάνω n γραμμικά ανεξάρτητα διανύσματα, (η οποία είναι πάντοτε αντιστρέψιμη). Τότε,

$$P^{-1}AP = D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}.$$

Παράδειγμα: Να διαγωνιοποιηθεί η μήτρα

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

1ο βήμα: Βρίσκουμε τις ιδιοτιμές:

$$\lambda_1 = 2,\ \lambda_2 = 1.$$

2ο βήμα: Βρίσκουμε τα ιδιοδιανύσματα:

$$\begin{bmatrix} a \\ 0 \end{bmatrix} = a \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix},\ a \in \mathbb{R}^* \text{ και } \begin{bmatrix} 3b \\ b \end{bmatrix} = b \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix},\ b \in \mathbb{R}^*.$$

3ο βήμα: Βρίσκουμε τις μήτρες P και D:

Αν διαλέξουμε τα ιδιοδιανύσματα

$\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$, (για $a = 1$) και $\begin{bmatrix}3\\1\end{bmatrix}$, (για $b = 1$), έχουμε

$$P = \begin{bmatrix}1 & 3\\0 & 1\end{bmatrix}.$$

Τότε, βρίσκουμε την $P^{-1} = \begin{bmatrix}1 & -3\\0 & 1\end{bmatrix}$, και έχουμε

$$\begin{aligned} D = P^{-1}AP &= \begin{bmatrix}1 & -3\\0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & -3\\0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 3\\0 & 1\end{bmatrix}\\ &= \begin{bmatrix}2 & -6\\0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 3\\0 & 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Παρατήρηση: Για κάθε διαφορετική επιλογή ιδιοδιανύσματος, σχηματίζεται διαφορετική μήτρα P.

Διαγωνιοποίηση

Παρατήρηση: Η υπόθεση της προηγούμενης πρότασης (να έχει η A διακεκριμένες ιδιοτιμές) είναι ικανή αλλά όχι αναγκαία, δηλαδή αν η A δεν έχει διακεκριμένες ιδιοτιμές, δεν γνωρίζουμε αν διαγωνιοποιείται ή όχι.

Παράδειγμα: Έτσι, η μήτρα $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & -2 \\ 3 & 6 & 6 \end{bmatrix}$, που έχει $\lambda_1 = \lambda_2 = 3$ (διπλή) και $\lambda_3 = 2$ (δηλ. δεν έχει διακεκριμένες ιδιοτιμές) *δεν διαγωνιοποιείται*.

Διαγωνιοποίηση

Πράγματι, για $\lambda_1 = \lambda_2 = 3$ τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα είναι τα $a \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$, $a \in \mathbb{R}^*$, ενώ για $\lambda_3 = 2$, είναι τα $b \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -\frac{3}{2} \end{bmatrix}$, $b \in \mathbb{R}^*$.

Τα ιδιοδιανύσματα αυτά δίνουν προφανώς τα γραμμικά ανεξάρτητα διανύσματα $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -\frac{3}{2} \end{bmatrix}$ που είναι μόνο $2 \neq 3 = n$.

Άρα, με βάση την σχετική παρατήρηση στο βήμα 2 της διαδικασίας διαγωνιοποίησης, ο A δεν διαγωνιοποιείται.

Αντίθετα όμως, ας δούμε το παρακάτω παράδειγμα.

Παράδειγμα: Η $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ που επίσης δεν έχει διακεκριμένες ιδιοτιμές ($\lambda_1 = \lambda_2 = 0, \lambda_3 = 3$) *διαγωνιοποιείται*. Πράγματι, όπως είδαμε ήδη, τα ιδιοδιανύσματα της A είναι τα

$$a \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, b \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, c \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \text{ όπου } a, b, c \in \mathbb{R}^*.$$

Σχηματίζουμε λοιπόν την

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Διαγωνιοποίηση

Βρίσκουμε

$$P^{-1} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

και παίρνουμε

$$\begin{aligned} P^{-1}AP &= \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \cdots = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} = D. \end{aligned}$$

Διαγωνιοποίηση

Παράδειγμα: Να διαγωνιοποιηθεί η μήτρα

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 6 & 0 \\ -3 & -5 & 0 \\ -3 & -6 & -5 \end{bmatrix}.$$

1ο βήμα: Βρίσκουμε τις ιδιοτιμές:

$$\det(A - \lambda I) = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 4-\lambda & 6 & 0 \\ -3 & -5-\lambda & 0 \\ -3 & -6 & -5-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow \cdots \Leftrightarrow -(\lambda+5)(\lambda^2+\lambda-2) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\lambda_1 = -5, \lambda_2 = -2, \lambda_3 = 1.$$

Οι ιδιοτιμές είναι διαφορετικές ανά δύο, άρα η A είναι διαγωνιοποίησιμη.

Διαγωνιοποίηση

2ο βήμα: Βρίσκουμε τα ιδιοδιανύσματα και τους ιδιόχωρους: Από το χαρακτηριστικό σύστημα προκύπτει

$$\begin{bmatrix} 4-\lambda & 6 & 0 \\ -3 & -5-\lambda & 0 \\ -3 & -6 & -5-\lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} (4-\lambda)x_1 + 6x_2 = 0 \\ -3x_1 - (5+\lambda)x_2 = 0 \\ -3x_1 - 6x_2 - (5+\lambda)x_3 = 0. \end{cases}$$

Για $\lambda = -5$ έχουμε ότι

$$\begin{cases} 9x_1 + 6x_2 = 0 \\ -3x_1 = 0 \\ -3x_1 - 6x_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0. \end{cases}$$

Άρα

$$X = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ a \end{bmatrix} = a \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \ a \in \mathbb{R}^*.$$

Διαγωνιοποίηση

Για $\lambda = -2$ έχουμε ότι

$$\begin{cases} 6x_1 + 6x_2 = 0 \\ -3x_1 - 3x_2 = 0 \\ -3x_1 - 6x_2 - 3x_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -x_2 \\ x_3 = -x_2. \end{cases}$$

Άρα

$$X = \begin{bmatrix} -b \\ b \\ -b \end{bmatrix} = b \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix},\ b \in \mathbb{R}^*.$$

Για $\lambda = 1$ έχουμε ότι

$$\begin{cases} 3x_1 + 6x_2 = 0 \\ -3x_1 - 6x_2 = 0 \\ -3x_1 - 6x_2 - 6x_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -2x_2 \\ x_3 = 0. \end{cases}$$

Άρα

$$X = \begin{bmatrix} -2c \\ c \\ 0 \end{bmatrix} = c \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \ c \in \mathbb{R}^*.$$

Διαγωνιοποίηση

3ο βήμα: Βρίσκουμε τις μήτρες P και D.

Από τα προηγούμενα,

$$P = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Βρίσκουμε την

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

και άρα,

$$D = \begin{bmatrix} -5 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

με

$$A = PDP^{-1}$$

Βασική εφαρμογή διαγωνιοποίησης

Θα μας χρειαστούν τα παρακάτω αποτελέσματα:

1. Για κάθε διαγώνια μήτρα

$$D = \begin{bmatrix} a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_n \end{bmatrix}$$

   ισχύει ότι

$$D^k = \begin{bmatrix} a_1^k & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_2^k & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_n^k \end{bmatrix}$$

   Η απόδειξη γίνεται με επαγωγή. (Άσκηση.)

Βασική εφαρμογή διαγωνιοποίησης

2. Αν η P είναι αντιστρέψιμη, τότε

$$(P^{-1}AP)^k = P^{-1}A^kP.$$

Η απόδειξη γίνεται με επαγωγή. (Άσκηση.)

Έστω τώρα $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Αν η A διαγωνιοποιείται, τότε η A^k μπορεί να υπολογισθεί ως εξής:
Αν $P^{-1}AP = D$ μια διαγωνιοποίηση της A, τότε

$$(P^{-1}AP)^k = D^k \overset{2}{\Rightarrow} P^{-1}A^kP = D^k \Rightarrow A^k = PD^kP^{-1}.$$

Δεδομένου ότι η D^k υπολογίζεται εύκολα (λόγω της 1), υπολογίζουμε και την A^k.

Βασική εφαρμογή διαγωνιοποίησης

Παράδειγμα: Αν $A = \begin{bmatrix} -4 & -4 & -4 \\ 6 & 4 & 6 \\ 2 & 4 & 2 \end{bmatrix}$, βρίσκουμε τις ιδιοτιμές

$$\lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = 4, \quad \lambda_3 = -2,$$

που δίνουν τα ιδιοδιανύσματα

$$\begin{bmatrix} -a \\ 0 \\ a \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -b \\ b \\ b \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ -c \\ c \end{bmatrix}, \quad \text{όπου } a, b, c \in \mathbb{R}^*,$$

δηλαδή

$$a \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, b \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, c \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \text{όπου } a, b, c \in \mathbb{R}^*.$$

Βασική εφαρμογή διαγωνιοποίησης

Σχηματίζουμε λοιπόν την

$$P = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

με στήλες τα ιδιοδιανύσματα (για $a = b = c = 1$).
Βρίσκουμε

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Τότε

$$D = P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

Βασική εφαρμογή διαγωνιοποίησης

και άρα,

$$\begin{aligned}
A^k &= PD^kP^{-1} \\
&= \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4^k & 0 \\ 0 & 0 & (-2)^k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 0 & -4^k & 0 \\ 0 & 4^k & -(-2)^k \\ 0 & 4^k & (-2)^k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} -4^k & -4^k & -4^k \\ 4^k-(-2)^k & 4^k & 4^k-(-2)^k \\ 4^k+(-2)^k & 4^k & 4^k+(-2)^k \end{bmatrix}, n \in \mathbb{N}^*.
\end{aligned}$$

Φασματικό θεώρημα

Το σύνολο όλων των ιδιοτιμών μιας τετραγωνικής μήτρας A ονομάζεται **φάσμα** της μήτρας και συμβολίζεται με $\mathbf{sp}(\mathbf{A})$.

Πρόταση 4 (Φασματικό θεώρημα)

Για κάθε μήτρα $A \in \mathcal{M}_n$ και κάθε πολυώνυμο $q(x)$ ισχύει ότι

$$\mathrm{sp}(q(A)) = \{q(\lambda) : \lambda \in \mathrm{sp}(A)\}.$$

Θα δειχθεί ότι $\{q(\lambda) : \lambda \in \mathrm{sp}(A)\} \subseteq \mathrm{sp}(q(A))$.
(Η απόδειξη της σχέσης $\mathrm{sp}(q(A)) \subseteq \{q(\lambda) : \lambda \in \mathrm{sp}(A)\}$ παραλείπεται.)
Έστω

$$q(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_m x^m \text{ με } a_m \neq 0.$$

και λ μια ιδιοτιμή της μήτρας A, δηλαδή $\lambda \in \mathrm{sp}(A)$.
Θα δείξουμε ότι $q(\lambda) \in \mathrm{sp}(q(A))$.
Αρκεί, ισοδύναμα, να δείξουμε ότι η μήτρα $q(A) - q(\lambda)I$ δεν είναι αντιστρέψιμη. (Υπενθυμίζουμε ότι αν το λ είναι ιδιοτιμή της μήτρας A, τότε και μόνο τότε η μήτρα $A - \lambda I$ δεν είναι αντιστρέψιμη.)

Φασματικό θεώρημα

Ισχύει ότι

$$q(A)-q(\lambda)I=a_1(A-\lambda I)+a_2(A^2-\lambda^2 I)+\cdots+a_m(A^m-\lambda^m I)$$

Από την ταυτότητα

$$A^k-\lambda^k I=(A-\lambda I)(A^{k-1}+\lambda A^{k-2}+\cdots+\lambda^{k-2}A+\lambda^{k-1}I)$$

προκύπτει ότι η μήτρα $A-\lambda I$ είναι παράγοντας κάθε όρου του αθροίσματος, οπότε υπάρχει πολυώνυμο $r(A)$ ώστε

$$q(A)-q(\lambda)I=(A-\lambda I)r(A).$$

Αν η μήτρα $q(A)-q(\lambda)I$ είναι αντιστρέψιμη, τότε

$$I=(A-\lambda I)r(A)(q(A)-q(\lambda)I)^{-1}$$

δηλαδή, η μήτρα $A-\lambda I$ είναι αντιστρέψιμη, άτοπο.
Άρα, η μήτρα $q(A)-q(\lambda)I$ είναι μη αντιστρέψιμη, δηλαδή $|q(A)-q(\lambda)I|=0$, οπότε το $q(\lambda)$ είναι ιδιοτιμή της μήτρας $q(A)$, δηλαδή $q(\lambda)\in\mathrm{sp}(q(A))$.

Φασματικό θεώρημα

Παράδειγμα: Έστω A μια 3×3 μήτρα με φάσμα $\mathrm{sp}(A) = \{0, 1, 2\}$.
Τότε η μήτρα $A^2 + 3A - I$, η οποία ισούται με $q(A)$ όπου $q(x) = x^2 + 3x - 1$ έχει φάσμα $\mathrm{sp}(q(A)) = \{q(0), q(1), q(2)\} = \{-1, 3, 9\}$.

Παρατήρηση: Από τα παραπάνω, προκύπτει επίσης ότι η ορίζουσα της μήτρας A ισούται με $0 \cdot 1 \cdot 2 = 0$, δηλαδή η μήτρα A είναι μη αντιστρέψιμη, ενώ η ορίζουσα της μήτρας $q(A)$ ισούται με $(-1) \cdot 3 \cdot 9 = -27$, άρα η μήτρα $q(A)$ είναι αντιστρέψιμη.
Επιπλέον, το ίχνος της μήτρας A ισούται με $0 + 1 + 2 = 3$, ενώ το ίχνος της μήτρας $q(A)$ ισούται με $-1 + 3 + 9 = 11$.

3η ΔΙΑΛΕΞΗ
Ιδιοτιμές - Ιδιοδιανύσματα

- **Ορθογώνια διαγωνιοποίηση**
- **Φασματική ανάλυση συμμετρικής μήτρας**

Η μήτρα $A \in \mathcal{M}_n$ λέγεται **ορθογωνίως διαγωνιοποίησιμη** αν υπάρχει ορθογώνια μήτρα P τέτοια ώστε

$$P^{-1} \cdot A \cdot P = D \Leftrightarrow A = P \cdot D \cdot P^t$$

όπου D είναι διαγώνια μήτρα. (Επειδή η P είναι ορθογώνια ισχύει ότι $P^{-1} = P^t$).

Δεν είναι ορθογωνίως διαγωνιοποίησιμες όλες οι μήτρες. Συγκεκριμένα, ισχύει ότι

Πρόταση 5

Η μήτρα A είναι ορθογωνίως διαγωνιοποίησιμη αν και μόνο αν είναι συμμετρική.

Ορθογώνια διαγωνιοποίηση

Παρατήρηση: (Μέθοδος για ορθογώνια διαγωνιοποίηση). Αν η $P \in \mathcal{M}_n$ σχηματίζεται από τις στήλες $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$, οι οποίες αποτελούν μια ορθοκανονική βάση του διανυσματικού χώρου $\mathbb{R}^n$, τότε η P είναι ορθογώνια. Πράγματι, αφού η i-γραμμή της P^t ισούται με την i-στήλη της P (δηλαδή με $\mathbf{v}_i$), τότε το στοιχείο b_{ii} της μήτρας $B = P^t P$ θα είναι το $\langle \mathbf{v}_i, \mathbf{v}_i \rangle = 1$, ενώ το στοιχείο b_{ij} για $i \neq j$ θα είναι το $\langle \mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j \rangle = 0$. ΄Αρα

$$B = P^t P = I$$

δηλαδή η P είναι ορθογώνια.

Ορθογώνια διαγωνιοποίηση

Για παράδειγμα, είδαμε ότι το σύνολο
$\left\{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right), \left(-\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}\right), \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right\}$
αποτελεί μια ορθοκανονική βάση του $\mathbb{R}^3$.
Τότε η μήτρα

$$P = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}$$

είναι ορθογώνια.
Πράγματι,

$$P^t P = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix} = I.$$

Για να διαγωνιοποίησουμε ορθογωνίως λοιπόν μια μήτρα A, αρκεί να βρούμε μια μήτρα P που να την διαγωνιοποιεί και στη συνέχεια να ορθοκανονικοποίησουμε τις στήλες της μήτρας P.

Ορθογώνια διαγωνιοποίηση

Παράδειγμα (ορθογώνιας διαγωνιοποίησης):

Έστω η μήτρα $A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{bmatrix}$.

Να βρεθούν ορθογώνια P και διαγώνια D ώστε $A = PDP^{-1}$.

Η A είναι συμμετρική, επομένως είναι ορθογωνίως διαγωνιοποιήσιμη.

1. Εύρεση των ιδιοτιμών:

$$|A - \lambda I| = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 4-\lambda & 2 & 2 \\ 2 & 4-\lambda & 2 \\ 2 & 2 & 4-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow (2-\lambda)^2(8-\lambda) = 0,$$

οπότε βρίσκουμε τις ιδιοτιμές $\lambda_1 = 2$ (διπλή) και $\lambda_2 = 8$ (απλή).

Ορθογώνια διαγωνιοποίηση

2. Εύρεση ιδιοδιανυσμάτων και ιδιοχώρων:

$$\begin{bmatrix} 4-\lambda & 2 & 2 \\ 2 & 4-\lambda & 2 \\ 2 & 2 & 4-\lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (4-\lambda)w_1 + 2w_2 + 2w_3 = 0 \\ 2w_1 + (4-\lambda)w_2 + 2w_3 = 0 \\ 2w_1 + 2w_2 + (4-\lambda)w_3 = 0 \end{cases}$$

Ορθογώνια διαγωνιοποίηση

Για $\lambda = 2$:

$$\begin{cases} 2w_1 + 2w_2 + 2w_3 = 0 \\ 2w_1 + 2w_2 + 2w_3 = 0 \\ 2w_1 + 2w_2 + 2w_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow w_1 + w_2 + w_3 = 0 \Leftrightarrow w_1 = -w_2 - w_3.$$

Άρα

$$\begin{aligned} X = \begin{bmatrix} -w_2 - w_3 \\ w_2 \\ w_3 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -w_2 \\ w_2 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -w_3 \\ 0 \\ w_3 \end{bmatrix} \\ &= w_2 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + w_3 \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, |w_2| + |w_3| \neq 0. \end{aligned}$$

Η αντίστοιχη βάση είναι η $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2\} = \left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$.

Ορθογώνια διαγωνιοποίηση

Για $\lambda = 8$:

$$\begin{cases} -4w_1 + 2w_2 + 2w_3 = 0 \\ 2w_1 + -4w_2 + 2w_3 = 0 \\ 2w_1 + 2w_2 + -4w_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow w_1 = w_2 = w_3.$$

Άρα $X = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_1 \\ w_1 \end{bmatrix} = w_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, w_1 \in \mathbb{R}^*.$

Η αντίστοιχη βάση είναι η

$$\{\mathbf{x}_3\} = \{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}\}.$$

Ορθογώνια διαγωνιοποίηση

Παρατήρηση: Αν ζητούσαμε να διαγωνιοποιήσουμε απλά (και όχι ορθογωνίως) την A, θα τελειώναμε εδώ, με

$$P = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

οπότε

$$P^{-1} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix},$$

και

$$D = \begin{bmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

με

$$A = PDP^{-1}$$

Για την ορθογώνια διαγωνιοποίηση, συνεχίζουμε ορθοκανονικοποιώντας το σύνολο των ιδιοδιανυσμάτων:

$$\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{x}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

σύμφωνα με την μέθοδο Gram-Schmidt

Έχουμε $\mathbf{y}_1 = \mathbf{x}_1$ και

$$\|\mathbf{y}_1\| = \|\mathbf{x}_1\| = \sqrt{1+1+0} = \sqrt{2},$$

οπότε

$$\mathbf{v}_1 = \frac{1}{\|\mathbf{y}_1\|}\mathbf{y}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Ορθογώνια διαγωνιοποίηση

$\mathbf{y}_2 = \mathbf{x}_2 - \langle \mathbf{x}_2, \mathbf{v}_1 \rangle \mathbf{v}_1$. Αλλά, $\langle \mathbf{x}_2, \mathbf{v}_1 \rangle = \left\langle \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{bmatrix} \right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} + 0 + 0 = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Άρα, $\langle \mathbf{x}_2, \mathbf{v}_1 \rangle \mathbf{v}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{bmatrix}$ και

$$\mathbf{y}_2 = \mathbf{x}_2 - \langle \mathbf{x}_2, \mathbf{v}_1 \rangle \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix},$$

με $\|\mathbf{y}_2\| = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + 1} = \frac{\sqrt{6}}{2}$. Άρα,

$$\mathbf{v}_2 = \frac{1}{\|\mathbf{y}_2\|}\mathbf{y}_2 = \frac{1}{\frac{\sqrt{6}}{2}} \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{2}{\sqrt{6}} \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} \end{bmatrix}.$$

Ορθογώνια διαγωνιοποίηση

$\mathbf{y}_3 = \mathbf{x}_3 - \langle \mathbf{x}_3, \mathbf{v}_2 \rangle \mathbf{v}_2 - \langle \mathbf{x}_3, \mathbf{v}_1 \rangle \mathbf{v}_1$. Αλλά,

$$\langle \mathbf{x}_3, \mathbf{v}_1 \rangle = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{bmatrix} \right\rangle = 0 \text{ και } \langle \mathbf{x}_3, \mathbf{v}_2 \rangle = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} \end{bmatrix} \right\rangle = 0,$$

οπότε

$$\mathbf{y}_3 = \mathbf{x}_3 - 0 \cdot \mathbf{v}_2 - 0 \cdot \mathbf{v}_1 = \mathbf{x}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

και συνεπώς $\|\mathbf{y}_3\| = \sqrt{1+1+1} = \sqrt{3}$, δίνοντας τελικά

$$\mathbf{v}_3 = \frac{1}{\|\mathbf{y}_3\|}\mathbf{y}_3 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}.$$

Ορθογώνια διαγωνιοποίηση

Τελικά, η ζητούμενη **ορθογώνια** μήτρα P είναι η μήτρα με στήλες τα διανύσματα $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$:

$$P = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}.$$

Ορθογώνια διαγωνιοποίηση

Ισχύει ότι

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{bmatrix} = PDP^t$$

όπου

$$D = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{bmatrix}$$

.και

$$P = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}.$$

Παρατήρηση: Όπως στην (απλή) διαγωνιοποίηση, έτσι και στην ορθογώνια διαγωνιοποίηση, η διαγώνια μήτρα $D = P^{-1}AP(= P^tAP)$ έχει ως στοιχεία της διαγωνίου της τις αντίστοιχες ιδιοτιμές της μήτρας A.

Ορθογώνια διαγωνιοποίηση

Παρατήρηση: Η διαδικασία ορθογώνιας διαγωνιοποίησης μιας μήτρας A, (η οποία, όπως ήδη αναφέραμε, είναι αναγκαίο να είναι συμμετρική) μπορεί να διευκολυνθεί με την χρήση του παρακάτω αποτελέσματος.

Πρόταση 6

Αν μια μήτρα είναι συμμετρική, τότε τα ιδιοδιανύσματά της, που ανήκουν σε διαφορετικούς ιδιόχωρους είναι ορθογώνια.

Έτσι, στο προηγούμενο παράδειγμα, για την εύρεση του $\mathbf{v}_3$, γνωρίζουμε εκ των προτέρων, βάσει της τελευταίας πρότασης, ότι $\langle \mathbf{x}_3, \mathbf{x}_2 \rangle = \langle \mathbf{x}_3, \mathbf{x}_1 \rangle = 0$ (και άρα $\langle \mathbf{x}_3, \mathbf{v}_2 \rangle = \langle \mathbf{x}_3, \mathbf{v}_1 \rangle = 0$) και άρα γνωρίζουμε εκ των προτέρων ότι ο τύπος

$$\mathbf{y}_3 = \mathbf{x}_3 - \langle \mathbf{x}_3, \mathbf{v}_2 \rangle \mathbf{v}_2 - \langle \mathbf{x}_3, \mathbf{v}_1 \rangle \mathbf{v}_1$$

θα έδινε τελικά $\mathbf{y}_3 = \mathbf{x}_3$ (οπότε μπορούσαμε να συνεχίσουμε κατευθείαν από το $\mathbf{y}_3 = \mathbf{x}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$).

Φασματική ανάλυση συμμετρικής μήτρας

Πρόταση 7 (Φασματική ανάλυση συμμετρικής μήτρας)

Έστω A μια συμμετρική $n \times n$ μήτρα με ορθογώνια διαγωνιοποίηση $A = PDP^t$, όπου $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ είναι οι ιδιοτιμές της (τα στοιχεία της D) και $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \cdots, \mathbf{v}_n$ είναι τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα (στήλες της μήτρας P). Τότε

$$A = \lambda_1 \mathbf{v}_1 \mathbf{v}_1^t + \lambda_2 \mathbf{v}_2 \mathbf{v}_2^t + \cdots + \lambda_n \mathbf{v}_n \mathbf{v}_n^t \tag{1}$$

Το άθροισμα (1) ονομάζεται **φασματική ανάλυση της μήτρας** A.

Παρατηρήστε ότι οι μήτρες $\lambda_i \mathbf{v}_i \mathbf{v}_i^t$ έχουν rank 1, επομένως η μήτρα A εκφράζεται ως άθροισμα μητρών που έχουν rank 1 (οι οποίες προκύπτουν από τις ιδιοτιμές και τα ιδιοανύσματα της A).

Φασματική ανάλυση συμμετρικής μήτρας

Για παράδειγμα, η συμμετρική μήτρα $A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{bmatrix}$ με ορθογώνια διαγωνιοποίηση $A = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}$
γράφεται στην μορφή

$$A = \lambda_1 \mathbf{v}_1 \mathbf{v}_1^t + \lambda_2 \mathbf{v}_2 \mathbf{v}_2^t + \lambda_3 \mathbf{v}_3 \mathbf{v}_3^t$$

$$= 2 \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} \frac{-1}{\sqrt{6}} \\ \frac{-1}{\sqrt{6}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{-1}{\sqrt{6}} & \frac{-1}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{6}} \end{bmatrix} + 8 \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{-2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{-2}{3} \\ \frac{-2}{3} & \frac{-2}{3} & \frac{4}{3} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{8}{3} & \frac{8}{3} & \frac{8}{3} \\ \frac{8}{3} & \frac{8}{3} & \frac{8}{3} \\ \frac{8}{3} & \frac{8}{3} & \frac{8}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{bmatrix}.$$