ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΗ ΑΛΓΕΒΡΑ

3η σειρά ασκήσεων

Ονοματεπώνυμο:

Αριθμός μητρώου:

Προθεσμία παράδοσης: Μέχρι και την Δευτέρα 1 Ιουλίου 2024

Να λυθούν **τουλάχιστον 5 ασκήσεις** από την ενότητα **Εσωτερικό γινόμενο.**

Σημειώστε τις ασκήσεις για τις οποίες έχετε παραδώσει λύση:

Εσωτερικό γινόμενο:

3.1	3.2	3.3	3.4	3.5	3.6

Να εκτυπώσετε αυτή τη σελίδα και να τη χρησιμοποιήσετε ως εξώφυλλο στις ασκήσεις που θα παραδώσετε. Συμπληρώστε το ονοματεπώνυμο και τον ΑΜ και σημειώστε με Χ τις ασκήσεις που λύσατε.
Στη συνέχεια, σκανάρετε το εξώφυλλο και τα χειρόγραφά σας, σε ένα αρχείο pdf, το οποίο θα παραδώσετε. Οι ασκήσεις μπορούν να παραδοθούν ΜΟΝΟ ΗΛΕΚΤΡΟΝΙΚΑ, μόνο σε μορφή ενός αρχείου pdf, μεγέθους το πολύ 10MB, στο email **jtas@unipi.gr**.
Ο τίτλος του αρχείου θα πρέπει να είναι **algebra_askhseis3_pXXXXX.pdf**, όπου **pXXXXX ο αριθμός μητρώου σας**.
Η σειρά ασκήσεων είναι προαιρετική και βαθμολογείται με άριστα το 0.5.

Εσωτερικό γινόμενο

3.1) (Ορθογώνια διαγωνιοποίηση 3×3 μήτρας) Δίδεται η συμμετρική μήτρα $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & 4 & -4 \\ 2 & -4 & 4 \end{bmatrix}$, με ιδιοτιμές $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$, $\lambda_3 = 9$ και ιδιοδιανύσματα για τις $\lambda = \lambda_2 = 0$: $\mathbf{v_1} = (-2, 0, 1)$, $\mathbf{v_2} = (2, 1, 0)$, για την $\lambda_3 = 9$: $\mathbf{v_3} = (1, -2, 2)$.

Να διαγωνιοποιηθεί ορθογωνίως η A.

(Απ. $A = UDU^t$ όπου $U = \begin{bmatrix} -\frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{45}} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{5}{\sqrt{45}} & -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{4}{\sqrt{45}} & \frac{2}{3} \end{bmatrix}$, $D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix}$.)

3.2) (Ορθοκανονικές βάσεις και προβολές) Δίδονται τα διανύσματα $u_1 = (1, 1, 1, 1, 1, 1)$, $u_2 = (3, 6, 4, 5, 6, 3)$ και $u_3 = (5, 9, 6, 8, 7, 6)$.

i) Να βρεθεί μια ορθοκανονική βάση του συνόλου των διανυσμάτων που παράγονται από τα διανύσματα u_1 και u_2. (Απ. Μια τέτοια βάση αποτελείται από τα διανύσματα $v_1 = \frac{1}{\sqrt{6}}(1, 1, 1, 1, 1, 1)$ και $v_2 = \frac{1}{\sqrt{38}}(-3, 3, -1, 1, 3, -3)$.)

ii) Να βρεθεί η προβολή του διανύσματος u_3 στο χώρο που παράγουν τα διανύσματα u_1 και u_2. (Απ. $v = \frac{1}{57}(313, 466, 364, 415, 466, 313)$.)

iii) Να εκφραστεί το διάνυσμα της προβολής του u_3 ως γραμμικός συνδυασμός των διανυσμάτων u_1 και u_2. (Απ. $v = \frac{160}{57}u_1 + \frac{17}{19}u_2$)

3.3) (*Ορθογώνια διανύσματα στον* $\mathbb{R}^3$) Θεωρούμε τον $\mathbb{R}^3$ εφοδιασμένο με το σύνηθες εσωτερικό γινόμενο.

i) Να βρεθούν τα $a, b, c \in \mathbb{R}$ ώστε τα διανύσματα $\mathbf{v}_1 = (4, a, 4)$, $\mathbf{v}_2 = (b, 4, 8)$ και $\mathbf{v}_3 = (8, 20, -c)$ να είναι ανά δύο ορθογώνια. (Απ. $a = -1$, $b = -7$, $c = 3$.)

Στα επόμενα $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_3$ είναι τα διανύσματα που υπολογίσθηκαν στο πρώτο ερώτημα.

ii) Είναι τα $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_3$ βάση του $\mathbb{R}^3$;

Έστω $\mathbf{v} = (1, -2, 4)$.

iii) Να βρεθούν τα μήκη $\|\mathbf{v}_1\|$, $\|\mathbf{v}_2\|$, $\|\mathbf{v}_3\|$, $\|\mathbf{v}\|$ όπου $\|\mathbf{x}\| = \sqrt{\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle}$. (Απ. $\|\mathbf{v}_1\| = \sqrt{33}$, $\|\mathbf{v}_2\| = \sqrt{129}$, $\|\mathbf{v}_3\| = \sqrt{473}$, $\|\mathbf{v}\| = \sqrt{21}$.)

iv) Να υπολογισθούν τα εσωτερικά γινόμενα $\langle \mathbf{v}, \mathbf{v}_1 \rangle$, $\langle \mathbf{v}, \mathbf{v}_2 \rangle$, $\langle \mathbf{v}, \mathbf{v}_3 \rangle$. (Απ. $\langle \mathbf{v}, \mathbf{v}_1 \rangle = 22$, $\langle \mathbf{v}, \mathbf{v}_2 \rangle = 17$, $\langle \mathbf{v}, \mathbf{v}_3 \rangle = -44$.)

v) Να βρεθεί το συνημίτονο των γωνιών μεταξύ του $\mathbf{v}$ και των $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ $\mathbf{v}_3$ αντίστοιχα. Με ποιο από τα διανύσματα $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_3$ σχηματίζει την μικρότερη γωνία; (Απ. $\sqrt{\dfrac{1892}{2709}}$, $\sqrt{\dfrac{289}{2709}}$, $-\sqrt{\dfrac{528}{2709}}$, μικρότερη γωνία: με το $\mathbf{v}_1$)

vi) Να βρεθούν οι αποστάσεις μεταξύ του $\mathbf{v}$ και των $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_3$ αντίστοιχα, όπου $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|$. Με ποιο από τα διανύσματα $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_3$ απέχει την μικρότερη απόσταση; (Απ. $d(\mathbf{v}, \mathbf{v}_1) = \sqrt{10}$, $d(\mathbf{v}, \mathbf{v}_2) = \sqrt{116}$, $d(\mathbf{v}, \mathbf{v}_3) = \sqrt{582}$.)

vii) Να εκφραστεί στο διάνυσμα $\mathbf{v} = (1, -2, 4)$ ως γραμμικός συνδυασμός των $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_3$. (Απ. $\mathbf{v} = \dfrac{22}{33}\mathbf{v}_1 + \dfrac{17}{129}\mathbf{v}_2 - \dfrac{44}{473}\mathbf{v}_3$.)

3.4) (Ορθοκανονικές βάσεις και προβολές) Έστω W ο υπόχωρος του $\mathbb{R}^5$ με

$$W = \{(x, y, z, w, s) \in \mathbb{R}^5 : x + y = z = w + s\}.$$

i) Να βρεθεί μια βάση του W και η διάστασή του. (Απ. Μια τέτοια βάση αποτελείται από τα διανύσματα $\mathbf{x_1} = (-1, 1, 0, 0, 0)$, $\mathbf{x_2} = (0, 0, 0, 1, -1)$, $\mathbf{x_3} = (1, 0, 1, 0, 1)$)

ii) Να βρεθεί μια ορθοκανονική βάση του W. (Απ. Μια τέτοια βάση αποτελείται από τα διανύσματα $\mathbf{v_1} = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1, 1, 0, 0, 0)$, $\mathbf{v_2} = \frac{1}{\sqrt{2}}(0, 0, 0, 1, -1)$, $\mathbf{v_3} = \frac{1}{\sqrt{8}}(1, 1, 2, 1, 1)$)

iii) Να βρεθεί η προβολή του διανύσματος $\mathbf{v} = (1, 2, 1, -1, 1)$ στον W. (Απ. $P_W\mathbf{v} = \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{v_1} - \frac{2}{\sqrt{2}}\mathbf{v_2} + \frac{5}{\sqrt{8}}\mathbf{v_3} = \frac{1}{8}(1, 9, 10, -3, 13)$.)

3.5) (Προβλήματα ελαχίστων τετραγώνων) Να βρεθεί η προβολή P του διανύσματος $\mathbf{b} = (1, 1, 1, 1)$ στον χώρο που παράγουν οι στήλες της μήτρας $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 6 & 8 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

(Απ. $P = \dfrac{28}{69}(1, 2, 1, 3) - \dfrac{15}{46}(2, 6, 1, 1) + \dfrac{13}{46}(4, 8, 1, 1)$.)

3.6) (Ελάχιστη τιμή παράστασης) Δίδεται η παράσταση

$$A = (x + y + 2)^2 + (x - 2y + 5)^2 + (2x + 5y - 8)^2.$$

Να βρεθεί

i) η ελάχιστη τιμή της παράστασης A. (Απ. $\frac{81}{11}$)

ii) να βρεθούν τα $x, y \in \mathbb{R}$ για τα οποία προκύπτει η ελάχιστη τιμή. (Απ. $x = -\frac{18}{11}$, $y = \frac{23}{11}$)