Τριγωνομετρία

Βασικές ιδιότητες: $\cos(-x) = \cos x$, $\sin(-x) = -\sin x$,
$\cos^2 x + \sin^2 x = 1$, $\quad 1 + \mathrm{tg}^2 x = 1/\cos^2 x$,
$n \in \mathbb{N} \Rightarrow \cos(n\pi) = (-1)^n$, $\quad \sin((2n-1)\pi/2) = (-1)^{n-1}$

Βασικές τιμές:

x	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$
$\sin x$	0	$1/2$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1
$\cos x$	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	$1/2$	0

Βασικές ταυτότητες:
$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$
$\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$
$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 1 - 2\sin^2 x = 2\cos^2 x - 1 = \frac{1-\mathrm{tg}^2 x}{1+\mathrm{tg}^2 x}$
$\sin 2x = 2\cos x \sin x = \frac{2\,\mathrm{tg}\, x}{1+\mathrm{tg}^2 x}$
$2\cos x \cos y = \cos(x-y) + \cos(x+y)$
$2\sin x \sin y = \cos(x-y) - \cos(x+y)$
$2\sin x \cos y = \sin(x+y) + \sin(x-y)$
$\sin x + \sin y = 2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}$, $\quad \sin x - \sin y = 2\cos\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}$
$\cos x + \cos y = 2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}$, $\quad \cos y - \cos x = 2\sin\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}$

Συναρτήσεις Γάμμα, Βήτα

Συνάρτηση Γάμμα: $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}dt$, $x > 0$.

- $\Gamma^{(n)}(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}(\ln t)^n dt$
- $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ (οπότε $\Gamma(n+1) = n!$, για $n \in \mathbb{N}$)
- $\Gamma(x)\Gamma(x+\frac{1}{2}) = \frac{\sqrt{\pi}}{2^{2x-1}}\Gamma(2x)$ (και $\Gamma(n+1/2) = \frac{1\cdot 3\cdots(2n-1)}{2^n}\sqrt{\pi}$)
- $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$
- $\Gamma(x)\Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\sin \pi x}$, για $x > 0$, $x \notin \mathbb{N}$

Συνάρτηση Βήτα: $B(m,n) = \int_0^1 x^{m-1}(1-x)^{n-1}dx$, $m,n > 0$

- $B(m,n) = B(n,m)$
- $B(m,n) = 2\int_0^{\pi/2} \sin^{2m-1}\theta \cos^{2n-1}\theta\, d\theta$
- $B(m,n) = \frac{\Gamma(m)\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)}$

Βασικές δυναμοσειρές - σειρές Maclaurin

- $\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$, $x \in (-1,1)$.
- $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$, $x \in \mathbb{R}$.
- $(1+x)^r = \sum_{n=0}^{\infty}\binom{r}{n}x^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{r(r-1)\cdots(r-n+1)}{n!}x^n$, $x \in (-1,1)$, $r \in \mathbb{R}$.
- $\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n$, $x \in (-1,1]$.
- $\sin x = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1}$, $\quad \cos x = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n}$, $x \in \mathbb{R}$.
- $\sinh x = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)!}x^{2n+1}$, $\quad \cosh x = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n)!}x^{2n}$, $x \in \mathbb{R}$.

Μετασχηματισμός Laplace (ML)

ML: $\mathcal{L}[f(t)] = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-st}dt$

Συνέλιξη ML: $(f*g)(t) = f(t)*g(t) = \int_0^t f(x)g(t-x)dx$

ML συνέλιξης: Αν $f,g \in L_a$, τότε $\mathcal{L}[(f*g)(t)] = \mathcal{L}[f(t)]\mathcal{L}[g(t)]$.

Συνάρτηση Bessel: $J_p(t) = \sum_{i=0}^{\infty}\frac{(-1)^i t^{2i+p}}{2^{2i+p}i!\Gamma(p+i+1)}$, $p \in \mathbb{R}$

$\mathcal{L}[J_p(t)] = \frac{(\sqrt{s^2+1}-s)^p}{\sqrt{s^2+1}}$, για κάθε $s > -1$, $p > -1$.

Βασικοί μετασχηματισμοί Laplace:

- $\mathcal{L}[e^{at}] = \frac{1}{s-a}$, για $s > a$.
- $\mathcal{L}[t^a] = \frac{\Gamma(a+1)}{s^{a+1}}$, για $s > 0$ και $a > -1$.
- $\mathcal{L}[\cos(at)] = \frac{s}{s^2+a^2}$ και $\mathcal{L}[\sin(at)] = \frac{a}{s^2+a^2}$, για $s > 0$.
- $\mathcal{L}[\cosh(at)] = \frac{s}{s^2-a^2}$ και $\mathcal{L}[\sinh(at)] = \frac{a}{s^2-a^2}$, για $s > |a|$.

Ιδιότητες ML

Αν $f, f_1, f_2 \in L_c$, για κάποιο $c > 0$, τότε

1. $\mathcal{L}[c_1f_1(t) + c_2f_2(t)] = c_1\mathcal{L}[f_1(t)] + c_2\mathcal{L}[f_2(t)]$
2. $\mathcal{L}[e^{at}f(t)] = F(s-a)$, $s - a > c$.
3. Αν $g(t) = \begin{cases} f(t-a) & t \geq a \\ 0 & t < a \end{cases}$, τότε $g \in L_c$ και $\mathcal{L}[g(t)] = e^{-as}\mathcal{L}[f(t)]$, ($a > 0$).
4. $\mathcal{L}[f(at)] = \frac{1}{a}F\left(\frac{s}{a}\right)$, $a > 0$, $s > ca$.
5. $\mathcal{L}[f'(t)] = sF(s) - f(0)$, $s > c$.
6. $\mathcal{L}[f^{(n)}(t)] = s^nF(s) - s^{n-1}f(0) - s^{n-2}f'(0) - \cdots - f^{(n-1)}(0)$, $s > c$.
7. $\mathcal{L}\left[\int_0^t f(u)du\right] = \frac{1}{s}F(s)$, $s > c$.
8. $\mathcal{L}[t^nf(t)] = (-1)^nF^{(n)}(s)$, $s > c$, $n \in \mathbb{N}^*$.
9. Αν $\lim_{t\to 0^+}\frac{f(t)}{t} \in \mathbb{R}$, τότε $\mathcal{L}\left[\frac{f(t)}{t}\right] = \int_s^{+\infty} F(u)du$, $s > c$.

Ιδιότητες αντίστροφου ML

Αν f συνεχής, $f \in L_c$, για κάποιο $c > 0$, και $\mathcal{L}[f(t)] = F(s)$, τότε

1. $\mathcal{L}^{-1}[c_1F_1(s) + c_2F_2(s)] = c_1\mathcal{L}^{-1}[F_1(s)] + c_2\mathcal{L}^{-1}[F_2(s)]$, $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$
2. $\mathcal{L}^{-1}[F(s-a)] = e^{at}f(t)$, $s - a > c$.
3. $\mathcal{L}^{-1}[e^{-as}F(s)] = \begin{cases} f(t-a) & t \geq a \\ 0 & t < a \end{cases}$.
4. $\mathcal{L}^{-1}[F(as)] = \frac{1}{a}f\left(\frac{t}{a}\right)$, $a > 0$, $s > ca$.
5. $\mathcal{L}^{-1}[sF(s))] = f'(t)$, όταν $f(0) = 0$.
6. $\mathcal{L}^{-1}[s^nF(s)] = f^{(n)}(t)$, όταν $f(0) = f'(0) = \cdots = f^{(n-1)}(0)$.
7. $\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s}F(s)\right] = \int_0^t f(u)du$.
8. $\mathcal{L}^{-1}[F^{(n)}(s)] = (-1)^nt^nf(t)$, $n \in \mathbb{N}$.
9. Αν $\lim_{t\to 0^+}\frac{f(t)}{t} \in \mathbb{R}$, τότε $\mathcal{L}^{-1}\left[\int_s^{+\infty} F(u)du\right] = \frac{f(t)}{t}$.