ΑΝΑΛΥΣΗ ΙΙ

Διδάσκοντες:
- Δρ. Κωνσταντίνος Μανές
- Επ. Καθηγητής Ιωάννης Τασούλας

email: kmanes@unipi.gr
jtas@unipi.gr

Σελίδα μαθήματος στο gunet2:
https://gunet2.cs.unipi.gr/courses/TMA120/

forum: Περιοχές Συζητήσεων στο gunet2

Γραφείο: 542 (Κεντρικό κτήριο, 5ος όροφος)
Ώρες γραφείου: Τρίτη 12.00-13.00
ή μετά από συνεννόηση
Τηλέφωνα: **2104142308**, **2104142313** (γραφείο)

Προτεινόμενα συγγράμματα στον ΕΥΔΟΞΟ:

1. **Ανάλυση και Εφαρμογές 2,**
   Α.Γ. Σαπουνάκης, Ε.Χ. Φούντας

2. ΔΙΑΦΟΡΙΚΟΣ ΚΑΙ ΟΛΟΚΛΗΡΩΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ, TOM M. APOSTOL

Ύλη μαθήματος (σε 3 κατευθύνσεις):

1. Γενικευμένα ολοκληρώματα.
   Μετασχηματισμός Laplace.
   Μετασχηματισμός Fourier.

2. Συναρτήσεις δύο μεταβλητών.
   Σύγκλιση – Συνέχεια.
   Μερική παράγωγος - Διαφορισιμότητα.
   Διπλό ολοκλήρωμα.

3. Ακολουθίες και σειρές συναρτήσεων.
   Δυναμοσειρές.
   Σειρές Fourier.

ΔΙΑΛΕΞΕΙΣ 1-2

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 9:

ΓΕΝΙΚΕΥΜΕΝΟ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑ

Περιεχόμενα διάλεξης:

- Πρώτο, δεύτερο, τρίτο είδος
- Κριτήρια σύγκλισης

ΓΕΝΙΚΑ

Η έννοια του ορισμένου ολοκληρώματος μελετήθηκε για φραγμένες συναρτήσεις που ορίζονται σε κλειστά διαστήματα. Στο κεφάλαιο αυτό, η έννοια της ολοκληρωσιμότητας θα επεκταθεί και για συναρτήσεις οι οποίες ορίζονται σε μη φραγμένα διαστήματα ή ορίζονται σε φραγμένα διαστήματα αλλά δεν είναι φραγμένες σε ένα ή περισσότερα σημεία. Τα ολοκληρώματα που προκύπτουν σε αυτές τις περιπτώσεις ονομάζονται **γενικευμένα ολοκληρώματα** και κατατάσσονται σε τρία είδη.

Το πρώτο είδος περιλαμβάνει γενικευμένα ολοκληρώματα των οποίων το ένα τουλάχιστον άκρο ολοκλήρωσης είναι $+\infty$ ή $-\infty$.

Παραδείγματα

$$\int_1^{+\infty} \sin(x \ln x)\,dx, \quad \int_{-\infty}^{2} \frac{e^x}{3+\cos x}\,dx, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^2+1}\,dx.$$

Το δεύτερο είδος περιλαμβάνει γενικευμένα ολοκληρώματα συναρτήσεων f που ορίζονται μεν σε φραγμένα διαστήματα ή πεπερασμένες ενώσεις αυτών, αλλά δεν είναι φραγμένες σε ένα τουλάχιστον οριακό σημείο ξ του πεδίου ορισμού τους, δηλαδή ισχύει ότι

$\lim\limits_{x\to\xi^+} f(x) = \pm\infty$ ή $\lim\limits_{x\to\xi^-} f(x) = \pm\infty$.

Παραδείγματα[1]

$$\int_3^4 \frac{1}{\sqrt{4-x}}dx,\quad \int_1^2 \frac{e^{-x}}{x^2-1}dx,\quad \int_0^2 \frac{\ln x}{x-2}dx.$$

Το τρίτο είδος είναι συνδυασμός των δύο πρώτων και γι' αυτό και τα ολοκληρώματα που περιλαμβάνονται σ' αυτό ονομάζονται και γενικευμένα ολοκληρώματα μεικτού τύπου.

Παράδειγμα

$$\int_\pi^{+\infty} \frac{\cos x}{x-\pi}dx.$$

[1] Η υπό ολοκλήρωση συνάρτηση του πρώτου ολοκληρώματος δεν είναι φραγμένη στο σημείο 4, του δεύτερου στο 1 και του τρίτου στα 0 και 2.

Μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα I είναι τοπικά ολοκληρώσιμη αν ο περιορισμός της σε κάθε κλειστό και φραγμένο διάστημα $[\alpha,\beta] \subseteq I$ είναι ολοκληρώσιμη συνάρτηση.

Προφανώς, κάθε συνεχής ή μονότονη συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα είναι τοπικά ολοκληρώσιμη.

Όπως θα δούμε στις επόμενες παραγράφους, ο ορισμός των γενικευμένων ολοκληρωμάτων έχει νόημα μόνο για τοπικά ολοκληρώσιμες συναρτήσεις.

ΓΕΝΙΚΕΥΜΕΝΑ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΑ ΠΡΩΤΟΥ ΕΙΔΟΥΣ

Τα γενικευμένα ολοκληρώματα πρώτου είδους ορίζονται για συναρτήσεις f με πεδίο ορισμού $\left[\alpha,+\infty\right)$ ή $\left(-\infty,\beta\right]$ ή $\left(-\infty,+\infty\right)$.

Περιπτώσεις:

(i) Υποτίθεται ότι η συνάρτηση f είναι τοπικά ολοκληρώσιμη στο διάστημα $\left[\alpha,+\infty\right)$, και έστω η συνάρτηση

$$F(x)=\int_{\alpha}^{x} f(t)\,dt.$$

Αν υπάρχει το όριο $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x)$ (στο $\mathbb{R}$), τότε το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_{\alpha}^{+\infty} f(x)\,dx$ **συγκλίνει** ή **υπάρχει** δηλαδή

$$\boldsymbol{\int_{\alpha}^{+\infty} f(x)\,dx=\lim_{x\to+\infty} F(x)=\lim_{x\to+\infty}\int_{\alpha}^{x} f(t)\,dt}.$$

Αν το όριο αυτό απειρίζεται ή δεν υπάρχει στο $\overline{\mathbb{R}}$, τότε λέγεται ότι το γενικευμένο ολοκλήρωμα **αποκλίνει** ή **δεν υπάρχει**.

Είναι φανερό ότι η σύγκλιση ενός γενικευμένου ολοκληρώματος πρώτου είδους δεν εξαρτάται από το άκρο α, δηλαδή ισχύει ότι το $\int_{\alpha_1}^{+\infty} f(x)dx$ συγκλίνει αν και μόνον αν το $\int_{\alpha}^{+\infty} f(x)dx$ συγκλίνει.

Στην περίπτωση αυτή, ισχύει ότι

$$\int_{\alpha_1}^{+\infty} f(x)dx = \int_{\alpha_1}^{\alpha} f(x)dx + \int_{\alpha}^{+\infty} f(x)dx.$$

(ii) Υποτίθεται ότι η συνάρτηση f είναι τοπικά ολοκληρώσιμη στο διάστημα $(-\infty,\beta]$ και έστω η συνάρτηση

$$F(x) = \int_{x}^{\beta} f(t)\,dt.$$

Αν υπάρχει το όριο $\lim\limits_{x\to-\infty} F(x)$ (στο $\mathbb{R}$), τότε λέγεται ότι το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_{-\infty}^{\beta} f(x)dx$ **συγκλίνει** ή **υπάρχει** και η τιμή του είναι το όριο αυτό, δηλαδή

$$\boldsymbol{\int_{-\infty}^{\beta} f(x)dx = \lim_{x\to-\infty} F(x) = \lim_{x\to-\infty}\int_{x}^{\beta} f(t)dt}$$

Αν το όριο αυτό απειρίζεται ή δεν υπάρχει στο $\overline{\mathbb{R}}$, τότε λέγεται ότι το γενικευμένο ολοκλήρωμα **αποκλίνει** ή **δεν υπάρχει**.

(iii)Υποτίθεται ότι η συνάρτηση f είναι τοπικά ολοκληρώσιμη στο $\mathbb{R}$. Τότε λέγεται ότι γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ **συγκλίνει** ή **υπάρχει** αν και μόνο αν τα γενικευμένα ολοκληρώματα $\int_{-\infty}^{\alpha} f(x)dx$ και $\int_{\alpha}^{+\infty} f(x)dx$ συγκλίνουν για κάποιο $\alpha \in \mathbb{R}$, η δε τιμή του είναι το άθροισμα αυτών, δηλαδή ισχύει ότι

$$\boldsymbol{\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{\alpha} f(x)dx + \int_{\alpha}^{+\infty} f(x)dx}.$$

Διαφορετικά, λέγεται ότι το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ **αποκλίνει** ή **δεν υπάρχει**.

Παραδείγματα

1. Για το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_{\alpha}^{+\infty}\frac{dx}{x^p}$, όπου $p\in\mathbb{R}$ και $\alpha>0$, το οποίο ονομάζεται **p–ολοκλήρωμα,** ισχύει ότι

$$F(x)=\int_{\alpha}^{x}t^{-p}dt=\begin{cases}\left[\dfrac{t^{-p+1}}{-p+1}\right]_{\alpha}^{x}, & \text{αν } p\neq 1\\ \left[\ln t\right]_{\alpha}^{x}, & \text{αν } p=1\end{cases}$$

$$=\begin{cases}\dfrac{x^{-p+1}}{-p+1}-\dfrac{\alpha^{-p+1}}{-p+1}, & \text{αν } p\neq 1\\ \ln x-\ln\alpha, & \text{αν } p=1.\end{cases}$$

Επομένως, $\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)=\begin{cases}\dfrac{\alpha^{-p+1}}{p-1}, & \text{αν } p>1\\ +\infty, & \text{αν } p\leq 1.\end{cases}$

Κατόπιν τούτων, το p–ολοκλήρωμα συγκλίνει αν και μόνο αν $p>1$ και είναι

$$\int_{\alpha}^{+\infty}\frac{dx}{x^p}=\frac{\alpha^{-p+1}}{p-1}$$

για κάθε $p>1$.

2. Για το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_{\alpha}^{+\infty} e^{-\lambda x} dx$, όπου $\alpha, \lambda \in \mathbb{R}$, το οποίο ονομάζεται **εκθετικό ολοκλήρωμα**, ισχύει ότι

$$F(x) = \int_{\alpha}^{x} e^{-\lambda t} dt = \begin{cases} -\dfrac{1}{\lambda}[e^{-\lambda t}]_{\alpha}^{x}, & \text{αν } \lambda \neq 0 \\ x - \alpha, & \text{αν } \lambda = 0 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \dfrac{e^{-\lambda \alpha} - e^{-\lambda x}}{\lambda}, & \text{αν } \lambda \neq 0 \\ x - \alpha, & \text{αν } \lambda = 0. \end{cases}$$

Επομένως, $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = \begin{cases} \dfrac{e^{-\lambda \alpha}}{\lambda}, & \text{αν } \lambda > 0 \\ +\infty, & \text{αν } \lambda \leq 0. \end{cases}$

Το εκθετικό ολοκλήρωμα συγκλίνει αν και μόνο αν $\lambda > 0$ και είναι

$$\int_{\alpha}^{+\infty} e^{-\lambda x} dx = \frac{e^{-\lambda \alpha}}{\lambda}, \text{ για κάθε } \lambda > 0.$$

Ειδικά αν $\alpha = 0$, προκύπτει ο τύπος

$$\int_{0}^{+\infty} e^{-\lambda x} dx = \frac{1}{\lambda}, \qquad \text{για κάθε } \lambda > 0.$$

3. Για το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_{-\infty}^{0} xe^{-x^2}dx$ ισχύει ότι

$$F(x)=\int_{x}^{0} te^{-t^2}dt \overset{y=-t^2}{=} -\frac{1}{2}\int_{-x^2}^{0} e^{y}dy$$

$$=\frac{1}{2}[e^{y}]_{0}^{-x^2} = \frac{1}{2}\left(e^{-x^2}-1\right).$$

Επομένως, αφού

$$\lim_{x\to-\infty} F(x)=\frac{1}{2}\left(\lim_{x\to-\infty} e^{-x^2}-1\right)=\frac{1}{2}(0-1)=-\frac{1}{2}$$

προκύπτει ότι το γενικευμένο ολοκλήρωμα υπάρχει, και είναι

$$\int_{-\infty}^{0} xe^{-x^2}dx=-\frac{1}{2}.$$

4. Για την εύρεση του γενικευμένου ολοκληρώματος $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}$ ισχύει ότι

$$F(x) = \int_x^0 \frac{dt}{1+t^2} = [\text{arctgt}]_x^0$$
$$= \text{arctg}0 - \text{arctg}x = -\text{arctg}x.$$

Επομένως, επειδή

$$\lim_{x \to -\infty} F(x) = -\lim_{x \to -\infty} \text{arctg}x = -\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2},$$

προκύπτει ότι το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_{-\infty}^{0} \frac{dx}{1+x^2}$ συγκλίνει, και είναι

$$\int_{-\infty}^{0} \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{2}.$$

Ανάλογα αποδεικνύεται ότι

$$\int_{0}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{2},$$

οπότε τελικά,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \int_{-\infty}^{0} \frac{dx}{1+x^2} + \int_{0}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \pi.$$

5. Για το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_{0}^{+\infty}\sin x dx$ είναι

$$F(x)=\int_{0}^{x}\sin t dt=\left[-\cos t\right]_{0}^{x}=1-\cos x.$$

Επειδή το όριο $\lim\limits_{x\to+\infty}\cos x$ δεν υπάρχει στο $\overline{\mathbb{R}}$, έπεται ότι και το όριο $\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)$ δεν θα υπάρχει στο $\overline{\mathbb{R}}$, οπότε το γενικευμένο ολοκλήρωμα αποκλίνει.

6. Για το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_{-\infty}^{0}\frac{x}{1+x^2}dx$ είναι

$$F(x)=\int_{x}^{0}\frac{t}{1+t^2}dt\overset{y=1+t^2}{=}\frac{1}{2}\int_{1+x^2}^{1}\frac{dy}{y}=\frac{1}{2}\left[\ln y\right]_{1+x^2}^{1}$$

$$=\frac{1}{2}\left[\ln 1-\ln\left(1+x^2\right)\right]=-\frac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right)$$

Επομένως, αφού

$$\lim_{x\to-\infty}F(x)=-\frac{1}{2}\lim_{x\to-\infty}\ln\left(1+x^2\right)=-\infty,$$

προκύπτει ότι το γενικευμένο ολοκλήρωμα αποκλίνει.

Πρέπει να σημειωθεί ότι αν η $f/(-\infty,\beta]$ είναι τοπικά ολοκληρώσιμη συνάρτηση τότε και η συνάρτηση $f_1(x)=f(-x)/[-\beta,+\infty)$

είναι τοπικά ολοκληρώσιμη, και ισχύει ότι

$$F(x)=\int_x^{\beta} f(t)\,dt \overset{u=-t}{=} \int_{-\beta}^{-x} f_1(u)\,du = F_1(-x),$$

για κάθε $x\in(-\infty,\beta]$.

Επομένως, το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_{-\infty}^{\beta} f(x)\,dx$ συγκλίνει αν και μόνο αν το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_{-\beta}^{+\infty} f_1(x)\,dx$ συγκλίνει, και μάλιστα

$$\int_{-\infty}^{\beta} f(x)\,dx = \lim_{x\to-\infty} F(x) = \lim_{x\to-\infty} F_1(-x) \overset{y=-x}{=} \lim_{y\to+\infty} F_1(y)$$

$$= \int_{-\beta}^{+\infty} f_1(x)\,dx$$

Κατόπιν τούτου, στα επόμενα η μελέτη των γενικευμένων ολοκληρωμάτων πρώτου είδους θα περιορισθεί στη μορφή $\int_{\alpha}^{+\infty} f(x)\,dx$.

Οι κυριότερες ιδιότητες των ορισμένων

ολοκληρωμάτων επαληθεύονται, με τη βοήθεια του ορίου, και για γενικευμένα ολοκληρώματα πρώτου είδους τα οποία συγκλίνουν.

Ιδιότητες

1. Αν $f, g/[\alpha, +\infty)$ είναι δύο τοπικά ολοκληρώσιμες συναρτήσεις τέτοιες ώστε τα γενικευμένα ολοκληρώματά τους να συγκλίνουν και $\kappa, \lambda \in \mathbb{R}$ τότε

$$\int_{\alpha}^{+\infty} (\kappa f + \lambda g)(x)\, dx = \kappa \int_{\alpha}^{+\infty} f(x)\, dx + \lambda \int_{\alpha}^{+\infty} g(x)\, dx$$

2. Αν $f, g/[\alpha, +\infty)$ είναι δύο τοπικά ολοκληρώσιμες συναρτήσεις των οποίων τα γενικευμένα ολοκληρώματα συγκλίνουν και

$$f(x) \leq g(x), \text{ για κάθε } x \in [\alpha, +\infty)$$

τότε είναι $\int_{\alpha}^{+\infty} f(x)\, dx \leq \int_{\alpha}^{+\infty} g(x)\, dx$.

3. Αν $f/[\alpha, +\infty)$ είναι μια μη αρνητική τοπικά ολοκληρώσιμη συνάρτηση, τότε το γενικευμένο ολοκλήρωμά της συγκλίνει αν και μόνο αν η συνάρτηση $F(x) = \int_{\alpha}^{x} f(t)\, dt$ είναι άνω φραγμένη.

Τούτο συμβαίνει διότι, σε αυτή την περίπτωση, η συνάρτηση $F/[\alpha,+\infty)$ είναι αύξουσα αφού

$$\begin{aligned} F(x_2)-F(x_1) &= \int_{\alpha}^{x_2} f(t)\,dt - \int_{\alpha}^{x_1} f(t)\,dt \\ &= \int_{\alpha}^{x_1} f(t)\,dt + \int_{x_1}^{x_2} f(t)\,dt - \int_{\alpha}^{x_1} f(t)\,dt \\ &= \int_{x_1}^{x_2} f(t)\,dt \geq 0 \end{aligned}$$

για κάθε $x_1, x_2 \in [\alpha,+\infty)$ με $x_1 \leq x_2$.

4. Αν $f/[\alpha,+\infty)$ είναι μια τοπικά ολοκληρώσιμη συνάρτηση και το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_{\alpha}^{+\infty} |f(x)|\,dx$ συγκλίνει, τότε θα συγκλίνει και το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_{\alpha}^{+\infty} f(x)\,dx$, και θα ισχύει η σχέση

$$\left|\int_{\boldsymbol{\alpha}}^{+\infty} \mathbf{f}(\mathbf{x})\,\mathbf{dx}\right| \leq \int_{\boldsymbol{\alpha}}^{+\infty} |\mathbf{f}(\mathbf{x})|\,\mathbf{dx}.$$

Ένα γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_{\alpha}^{+\infty} f(x)\,dx$ λέγεται ότι **συγκλίνει απολύτως** αν το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_{\alpha}^{+\infty} |f(x)|\,dx$ συγκλίνει.

Από την προηγούμενη ιδιότητα, έπεται ότι κάθε γενικευμένο ολοκλήρωμα που συγκλίνει απολύτως, συγκλίνει.

Το αντίστροφο δεν ισχύει πάντα. Για παράδειγμα, τα γενικευμένα ολοκληρώματα

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx, \int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x} dx$$

συγκλίνουν, αλλά όχι απολύτως.

Ένα γενικευμένο ολοκλήρωμα που συγκλίνει, αλλά δεν συγκλίνει απολύτως, λέγεται ότι **συγκλίνει υπό συνθήκη**.

Έτσι, τα γενικευμένα ολοκληρώματα $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$ και $\int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x} dx$ συγκλίνουν υπό συνθήκη.

5. Αν $f/[\alpha,+\infty)$ είναι μια τοπικά ολοκληρώσιμη συνάρτηση τέτοια ώστε το γενικευμένο ολοκλήρωμά της να συγκλίνει και (c_n), $n\in\mathbb{N}$, είναι μια γνήσια αύξουσα και όχι φραγμένη ακολουθία στο $[\alpha,+\infty)$ με $c_0=\alpha$, τότε

$$\int_{\alpha}^{+\infty}\mathbf{f(x)dx}=\sum_{n=0}^{\infty}\int_{c_n}^{c_{n+1}}\mathbf{f(x)dx}.$$

6. Αν $f/[\alpha,+\infty)$ είναι μια συνεχής συνάρτηση τέτοια ώστε το γενικευμένο ολοκλήρωμά της να συγκλίνει, $\varphi/[c,+\infty)$ είναι παραγωγίσιμη με παράγωγο τοπικά ολοκληρώσιμη, και ισχύει $\varphi\big([c,+\infty)\big)\subseteq[\alpha,+\infty)$, $\varphi(c)=\alpha$, $\lim\limits_{x\to+\infty}\varphi(x)=+\infty$, τότε

$$\int_{\alpha}^{+\infty}\mathbf{f(x)dx}=\int_{c}^{+\infty}\mathbf{f\big(\varphi(t)\big)\varphi'(t)dt}.$$

Ο τύπος αυτός είναι ο τύπος της **ολοκλήρωσης με αντικατάσταση** για γενικευμένα ολοκληρώματα πρώτου είδους.

7. Αν $f,g/[\alpha,+\infty)$ είναι δύο παραγωγίσιμες συναρτήσεις, με τοπικά ολοκληρώσιμες παραγώγους, για τις οποίες ισχύει

$$\lim_{x\to+\infty} f(x),\ \lim_{x\to+\infty} g(x)\in\mathbb{R}$$

και $\int_{\alpha}^{+\infty} f'(x)g(x)dx$ συγκλίνει,

τότε και το $\int_{\alpha}^{+\infty} f(x)g'(x)dx$ συγκλίνει, με

$$\boldsymbol{\int_{\alpha}^{+\infty} f(x)g'(x)dx = \left[f(x)g(x)\right]_{\alpha}^{+\infty} - \int_{\alpha}^{+\infty} f'(x)g(x)dx}$$

$$\boldsymbol{= \lim_{x\to+\infty} f(x)\lim_{x\to+\infty} g(x) - f(\alpha)g(\alpha) - \int_{\alpha}^{+\infty} f'(x)g(x)dx.}$$

Ο τύπος αυτός είναι ο τύπος της **παραγοντικής ολοκλήρωσης** για γενικευμένα ολοκληρώματα πρώτου είδους.

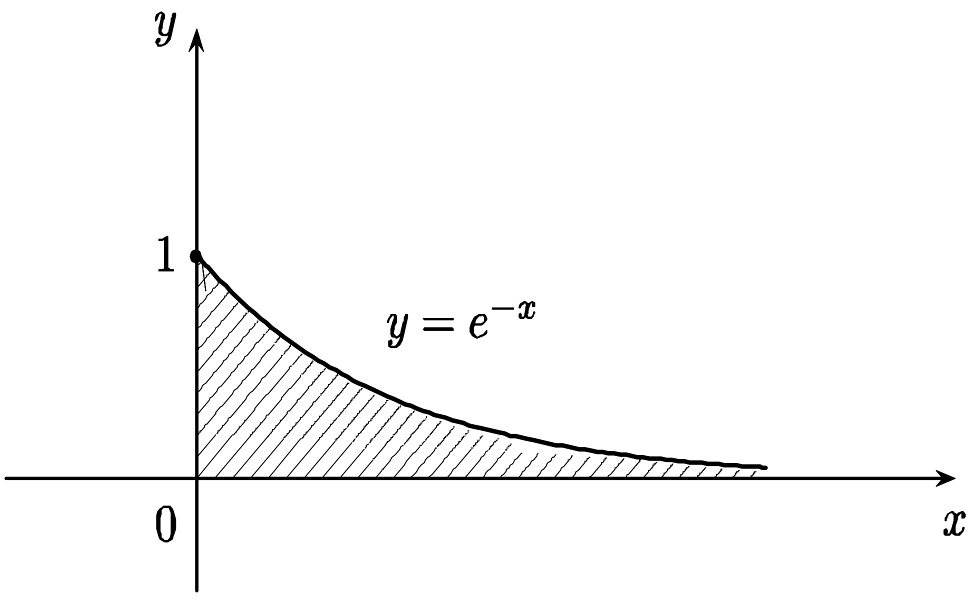
Εμβαδά

Τα γενικευμένα ολοκληρώματα 1ου είδους μπορούν να χρησιμοποιηθούν για τον υπολογισμό του εμβαδού ορισμένων **μη φραγμένων** χωρίων.

Αν $f/\left[\alpha,+\infty\right)$ (αντ. $f/\left(-\infty,\beta\right]$) είναι μη αρνητική, συνεχής συνάρτηση για την οποία το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_{\alpha}^{+\infty} f(x)dx$ (αντ. $\int_{-\infty}^{\beta} f(x)dx$) συγκλίνει, τότε η τιμή του ισούται με το εμβαδό του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f, τον άξονα των τετμημένων και την ευθεία $x=\alpha$ (αντ. $x=\beta$).

Για παράδειγμα, αν $f(x)=e^{-x}/\left[0,+\infty\right)$ τότε το εμβαδό του γραμμοσκιασμένου μη φραγμένου χωρίου του επόμενου σχήματος είναι

$$E=\int_{0}^{+\infty} e^{-x}dx=1.$$



ΑΣΚΗΣΗ 1 (*)

Να υπολογισθούν τα γενικευμένα ολοκληρώματα:

α) $\int_3^{+\infty} \frac{dx}{x^2-3x+2}$, β) $\int_{-\infty}^0 \frac{x\operatorname{arctg}x}{(1+x^2)^2}dx$, γ) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+4x+8}$.

ΛΥΣΗ

α) Θεωρούμε τη συνάρτηση

$F(x)=\int_3^x \frac{dt}{t^2-3t+2} \,/\, [3,+\infty)$, για την οποία ισχύει ότι

$$F(x)=\int_3^x \left(\frac{1}{t-2}-\frac{1}{t-1}\right)dt=\left[\ln\left|\frac{t-2}{t-1}\right|\right]_3^x$$

$$=\ln\left|\frac{x-2}{x-1}\right|-\ln\left(\frac{3-2}{3-1}\right)=\ln\left(\frac{x-2}{x-1}\right)+\ln 2$$

για κάθε $x\geq 3$. Επειδή

$$\lim_{x\to+\infty}F(x)=\lim_{x\to+\infty}\ln\left(\frac{x-2}{x-1}\right)+\ln 2$$

$$=\ln\left(\lim_{x\to+\infty}\frac{x-2}{x-1}\right)+\ln 2=\ln 1+\ln 2=\ln 2$$

προκύπτει ότι $\int_3^{+\infty}\frac{dx}{x^2-3x+2}=\ln 2$.

β) $\int_{-\infty}^{0} \frac{x\arctg x}{\left(1+x^2\right)^2}dx$

Αρχικά, υπολογίζεται το αόριστο ολοκλήρωμα

$I=\int \frac{t\cdot \arctg t}{\left(1+t^2\right)^2}dt$, θέτοντας $t=\tg u$. Τότε, είναι

$$dt=\left(\tg u\right)' du=\frac{du}{\cos^2 u} \text{ και}$$

$$I=\int \frac{\tg u\cdot u}{\left(\frac{1}{\cos^2 u}\right)^2}\frac{du}{\cos^2 u}=\int u\sin u\cos u du$$

$$=\frac{1}{2}\int u\sin 2u du=-\frac{1}{4}\int u\left(\cos 2u\right)' du$$

$$=-\frac{1}{4}u\cos 2u+\frac{1}{4}\int u'\cos 2u du$$

$$=-\frac{1}{4}u\cos 2u+\frac{1}{8}\sin 2u+c$$

$$=-\frac{1}{4}u\frac{1-\tg^2 u}{1+\tg^2 u}+\frac{1}{8}\frac{2\tg u}{1+\tg^2 u}+c$$

$$=-\frac{1}{4}\left(\operatorname{arctgt}\cdot\frac{1-t^2}{1+t^2}-\frac{t}{1+t^2}\right)+c.$$

Κατόπιν τούτου, αν τεθεί

$$F(x)=\int_x^0\frac{t\cdot\operatorname{arctgt}}{\left(1+t^2\right)^2}dt\,/\left(-\infty,0\right]$$

είναι

$$F(x)=-\frac{1}{4}\left[\operatorname{arctgt}\cdot\frac{1-t^2}{1+t^2}-\frac{t}{1+t^2}\right]_x^0$$

$$=\frac{1}{4}\left(\operatorname{arctgx}\cdot\frac{1-x^2}{1+x^2}-\frac{x}{1+x^2}\right).$$

Επειδή

$$\lim_{x\to-\infty}F(x)=\frac{1}{4}\left(\lim_{x\to-\infty}\operatorname{arctgx}\cdot\lim_{x\to-\infty}\frac{1-x^2}{1+x^2}-\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{1+x^2}\right)$$

$$=\frac{1}{4}\left(\left(-\frac{\pi}{2}\right)(-1)-0\right)$$

$$=\frac{\pi}{8},$$

προκύπτει ότι $\displaystyle\int_{-\infty}^0\frac{\operatorname{xarctgx}}{\left(1+x^2\right)^2}dx=\frac{\pi}{8}.$

γ) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+4x+8}$. Αρχικά, υπολογίζεται το

$$I=\int \frac{dt}{t^2+4t+8}, \quad \text{θέτοντας } u=\frac{t+2}{2}, \text{ διότι}$$

$$t^2+4t+8=(t+2)^2+4=4\left(\left(\frac{t+2}{2}\right)^2+1\right)$$

Τότε, είναι

$$I=\frac{1}{2}\int \frac{du}{u^2+1}=\frac{1}{2}\mathrm{arctg}u+c \ =\frac{1}{2}\mathrm{arctg}\left(\frac{t+2}{2}\right)+c,$$

οπότε αν τεθούν

$$F(x)=\int_0^x \frac{dt}{(t+2)^2+4} / \left[0,+\infty\right)$$

$$\text{και } G(x)=\int_x^0 \frac{dt}{(t+2)^2+4} / \left(-\infty,0\right]$$

$$\text{είναι } F(x)=\frac{1}{2}\left[\mathrm{arctg}\left(\frac{t+2}{2}\right)\right]_0^x$$

$$=\frac{1}{2}\mathrm{arctg}\left(\frac{x+2}{2}\right)-\frac{1}{2}\mathrm{arctg}1=\frac{1}{2}\mathrm{arctg}\left(\frac{x+2}{2}\right)-\frac{\pi}{8}$$

και

$$G(x)=\frac{1}{2}\left[\operatorname{arctg}\left(\frac{t+2}{2}\right)\right]_x^0$$

$$=\frac{1}{2}\operatorname{arctg}1-\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\left(\frac{x+2}{2}\right)$$

$$=\frac{\pi}{8}-\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\left(\frac{x+2}{2}\right).$$

Κατόπιν τούτων, και επειδή

$$\lim_{x\to+\infty}F(x)=\frac{1}{2}\lim_{x\to+\infty}\operatorname{arctg}\left(\frac{x+2}{2}\right)-\frac{\pi}{8}=\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{8}=\frac{\pi}{8}\text{και}$$

$$\lim_{x\to-\infty}G(x)=\frac{\pi}{8}-\frac{1}{2}\lim_{x\to-\infty}\operatorname{arctg}\left(\frac{x+2}{2}\right)$$

$$=\frac{\pi}{8}-\frac{1}{2}\left(-\frac{\pi}{2}\right)=\frac{3\pi}{8}$$

προκύπτει ότι

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{x^2+4x+8}=\int_{-\infty}^{0}\frac{dx}{x^2+4x+8}+\int_{0}^{+\infty}\frac{dx}{x^2+4x+8}$$

$$=\frac{\pi}{8}+\frac{3\pi}{8}\qquad=\frac{\pi}{2}.$$

ΑΣΚΗΣΗ 3 (*)

Να υπολογισθεί το $\int_0^{+\infty} e^{-\alpha x}\cos\beta x dx$, όπου $\alpha > 0$ και $\beta \in \mathbb{R}$.

ΛΥΣΗ

Αν τεθεί $F(x) = \int_0^x e^{-\alpha t}\cos\beta t dt \, / \left[0, +\infty\right)$, τότε είναι

$$F(x) = -\frac{1}{\alpha}\int_0^x \left(e^{-\alpha t}\right)' \cos\beta t dt$$

$$= -\frac{1}{\alpha}\left[e^{-\alpha t}\cos\beta t\right]_0^x + \frac{1}{\alpha}\int_0^x e^{-\alpha t}\left(\cos\beta t\right)' dt$$

$$= -\frac{1}{\alpha}\left(e^{-\alpha x}\cos\beta x - e^0\cos 0\right) - \frac{\beta}{\alpha}\int_0^x e^{-\alpha t}\sin\beta t\, dt$$

$$= -\frac{1}{\alpha}\left(e^{-\alpha x}\cos\beta x - 1\right) + \frac{\beta}{\alpha^2}\int_0^x \left(e^{-\alpha t}\right)' \sin\beta t\, dt$$

$$= -\frac{1}{\alpha}\left(e^{-\alpha x}\cos\beta x - 1\right) + \frac{\beta}{\alpha^2}\left[e^{-\alpha t}\sin\beta t\right]_0^x$$

$$-\frac{\beta}{\alpha^2}\int_0^x e^{-\alpha t}\left(\sin\beta t\right)' dt$$

$$= -\frac{1}{\alpha}\left(e^{-\alpha x}\cos\beta x - 1\right) + \frac{\beta}{\alpha^2}\left(e^{-\alpha x}\sin\beta x - 0\right)$$

$$-\frac{\beta^2}{\alpha^2}\int_0^x e^{-\alpha t}\cos\beta t dt$$

$$= -\frac{1}{\alpha}\left(e^{-\alpha x}\cos\beta x - 1\right) + \frac{\beta}{\alpha^2}\left(e^{-\alpha x}\sin\beta x - 0\right) - \frac{\beta^2}{\alpha^2}F(x)$$

Κατόπιν τούτου, προκύπτει ότι

$$\left(1 + \frac{\beta^2}{\alpha^2}\right)F(x) = \frac{1}{\alpha} + e^{-\alpha x}\frac{\left(\beta\sin\beta x - \alpha\cos\beta x\right)}{\alpha^2},$$

οπότε

$$F(x) = \frac{\alpha + e^{-\alpha x}\left(\beta\sin\beta x - \alpha\cos\beta x\right)}{\alpha^2 + \beta^2}$$

$$\lim_{x\to+\infty} F(x) \overset{1}{=} \frac{\alpha}{\alpha^2 + \beta^2}.$$

Άρα,

$$\int_0^{+\infty} e^{-\alpha x}\cos\beta x dx = \frac{\alpha}{\alpha^2 + \beta^2}.$$

---

1. Διότι $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-\alpha x} = 0$ (αφού $\alpha > 0$) και η συνάρτηση $g(x) = \beta\sin\beta x - \alpha\cos\beta x$ είναι φραγμένη.

ΑΣΚΗΣΗ 4 (*)

Να υπολογισθεί η τιμή του $\lambda \in \mathbb{R}$ ώστε το γενικευμένο ολοκλήρωμα

$$I = \int_0^{+\infty} \left(\frac{x}{x^2+1} - \frac{\lambda}{2x+5} \right) dx$$

να συγκλίνει, και να υπολογισθεί η τιμή του.

ΛΥΣΗ

Αρχικά, θα απλοποιηθεί ο τύπος της συνάρτησης

$F(x) = \int_0^x \left(\frac{t}{t^2+1} - \frac{\lambda}{2t+5} \right) dt \,/\, \left[0,+\infty\right)$. Για $x \geq 0$ είναι

$$\begin{aligned}
F(x) &= \int_0^x \frac{t}{t^2+1} dt - \lambda \int_0^x \frac{dt}{2t+5} \\
&= \frac{1}{2} \int_0^x \frac{d\left(t^2+1\right)}{t^2+1} - \frac{\lambda}{2} \int_0^x \frac{d(2t+5)}{2t+5} \\
&= \frac{1}{2} \left[\ln\left(t^2+1\right) \right]_0^x - \frac{\lambda}{2} \left[\ln|2t+5| \right]_0^x \\
&= \ln\left(x^2+1\right)^{\frac{1}{2}} - \frac{\lambda}{2} \left(\ln(2x+5) - \ln 5 \right) \\
&= \ln\left(5^{\frac{\lambda}{2}} \cdot \frac{\left(x^2+1\right)^{\frac{1}{2}}}{(2x+5)^{\frac{\lambda}{2}}} \right).
\end{aligned}$$

Προκειμένου να συγκλίνει το γενικευμένο ολοκλήρωμα I, πρέπει να υπάρχει το όριο $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x)$. Τούτο όμως, σύμφωνα με τον παραπάνω τύπο της συνάρτησης F, συμβαίνει μόνο όταν το όριο $\ell = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{(x^2+1)^{\frac{1}{2}}}{(2x+5)^{\frac{\lambda}{2}}} \in \mathbb{R}^*$. Επειδή

$$\ell = \lim_{x\to+\infty}\left(x^{1-\frac{\lambda}{2}} \cdot \frac{\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)^{\frac{1}{2}}}{\left(2+\dfrac{5}{x}\right)^{\frac{\lambda}{2}}} \right) = \frac{1}{2^{\frac{\lambda}{2}}} \cdot \lim_{x\to+\infty} x^{1-\frac{\lambda}{2}}$$

$$= \begin{cases} \dfrac{1}{2}, & \text{αν } \lambda = 2 \\ 0, & \text{αν } \lambda > 2 \\ +\infty, & \text{αν } \lambda < 2 \end{cases}$$

προκύπτει τελικά, ότι $\lambda = 2$ και $\ell = 1/2$.

Άρα συγκλίνει όταν $\lambda = 2$ και η τιμή του είναι

$$I = \lim_{x\to+\infty} F(x) = \ln\left(5 \cdot \lim_{x\to+\infty} \frac{(x^2+1)^{\frac{1}{2}}}{2x+5} \right) = \ln\left(\frac{5}{2}\right).$$

ΓΕΝΙΚΕΥΜΕΝΑ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΑ ΔΕΥΤΕΡΟΥ ΕΙΔΟΥΣ

Τα γενικευμένα ολοκληρώματα δευτέρου είδους ορίζονται για συναρτήσεις f με πεδίο ορισμού ένα διάστημα της μορφής $\left[\alpha,\beta\right)$, ή $\left(\alpha,\beta\right]$, ή $\left(\alpha,\beta\right)$, οι οποίες δεν είναι φραγμένες στο σημείο β, ή στο σημείο α, ή στα σημεία α και β αντίστοιχα.

Περιπτώσεις:

(i) Υποτίθεται ότι η συνάρτηση f είναι τοπικά ολοκληρώσιμη στο διάστημα $\left[\alpha,\beta\right)$ και έστω η συνάρτηση $F(x)=\int_{\alpha}^{x} f(t)\,dt$.

Αν υπάρχει το όριο $\lim\limits_{x\to\beta^{-}} F(x)$ (στο $\mathbb{R}$), τότε λέγεται ότι το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx$ **συγκλίνει** ή **υπάρχει** και η τιμή του είναι το όριο αυτό, δηλαδή

$$\boldsymbol{\int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx=\lim_{x\to\beta^{-}} F(x)=\lim_{x\to\beta^{-}}\int_{\alpha}^{x} f(t)\,dt.}$$

Αν το όριο αυτό απειρίζεται ή δεν υπάρχει στο $\overline{\mathbb{R}}$, τότε λέγεται ότι το γενικευμένο ολοκλήρωμα **αποκλίνει** ή **δεν υπάρχει**.

(ii) Υποτίθεται ότι η συνάρτηση f είναι τοπικά ολοκληρώσιμη στο διάστημα $(\alpha,\beta]$ και έστω η συνάρτηση $F(x)=\int_x^\beta f(t)\,dt$.

Αν υπάρχει το όριο $\lim\limits_{x\to\alpha^+} F(x)$ (στο $\mathbb{R}$), τότε λέγεται ότι το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_\alpha^\beta f(x)\,dx$ **συγκλίνει** ή **υπάρχει** και η τιμή του είναι το όριο αυτό, δηλαδή

$$\boldsymbol{\int_\alpha^\beta f(x)\,dx=\lim_{x\to\alpha^+} F(x)=\lim_{x\to\alpha^+}\int_x^\beta f(t)\,dt.}$$

Αν το όριο αυτό απειρίζεται ή δεν υπάρχει στο $\overline{\mathbb{R}}$, τότε λέγεται ότι το γενικευμένο ολοκλήρωμα **αποκλίνει** ή **δεν υπάρχει**.

(iii)Υποτίθεται ότι η συνάρτηση f είναι τοπικά ολοκληρώσιμη στο διάστημα (α,β). Τότε λέγεται ότι το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_\alpha^\beta f(x)\,dx$ **συγκλίνει** ή **υπάρχει** αν και μόνο αν συγκλίνουν τα γενικευμένα ολοκληρώματα $\int_\alpha^c f(x)\,dx$ και

$\int_{c}^{\beta} f(x)\,dx$ για κάποιο $c \in \mathbb{R}$, η δε τιμή του είναι το άθροισμα αυτών, δηλαδή ισχύει ότι

$$\boldsymbol{\int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx = \int_{\alpha}^{c} f(x)\,dx + \int_{c}^{\beta} f(x)\,dx.}$$

Παράδειγμα

Τα $\int_{\alpha}^{\beta} \frac{1}{(\beta - x)^{p}}\,dx$ και $\int_{\alpha}^{\beta} \frac{1}{(x-\alpha)^{p}}\,dx$, $p \in \mathbb{R}$ συγκλίνουν αν και μόνον αν $p < 1$.

Το γενικευμένο ολοκλήρωμα δευτέρου είδους ορίζεται γενικότερα για f με

$$D(f) = [\alpha, \beta] \setminus \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$$

όπου $\alpha \le x_1 < x_2 < \cdots < x_n \le \beta$ και η f δεν είναι φραγμένη στα x_i, $i \in [n]$. Το γενικευμένο ολοκλήρωμα **συγκλίνει** ή **υπάρχει** αν και μόνον αν συγκλίνουν

$$\int_{\alpha}^{x_1} f(x)\,dx,\ \int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx, \ldots,\ \int_{x_{n-1}}^{x_n} f(x)\,dx,\ \int_{x_n}^{\beta} f(x)\,dx,$$

η δε τιμή του είναι το άθροισμα αυτών.

Παρατήρηση

Χρησιμοποιώντας τις αλλαγές μεταβλητής

$$x = \alpha + \frac{1}{u} \qquad \text{και} \qquad x = \beta - \frac{1}{u}$$

οπότε

$$x \to \alpha^{+} \Leftrightarrow u \to +\infty \quad \text{και} \quad x \to \beta^{-} \Leftrightarrow u \to +\infty,$$

ένα ολοκλήρωμα δευτέρου είδους μετατρέπεται σε πρώτου είδους (άσκηση).

Επομένως, προκύπτει άμεσα ότι για το γενικευμένο ολοκλήρωμα δευτέρου είδους ισχύουν ανάλογες ιδιότητες με αυτές του πρώτου είδους.

Επιπλέον, το γενικευμένο ολοκλήρωμα δευτέρου είδους υπολογίζει επίσης εμβαδά ορισμένων μη φραγμένων χωρίων.

Για παράδειγμα, το εμβαδό του γραμμοσκιασμένου χωρίου του επόμενου σχήματος είναι

$$E = -\int_0^1 \ln x dx = 1$$

αφού

$$\int_x^1 \ln t\,dt = \int_x^1 t' \ln t\,dt$$

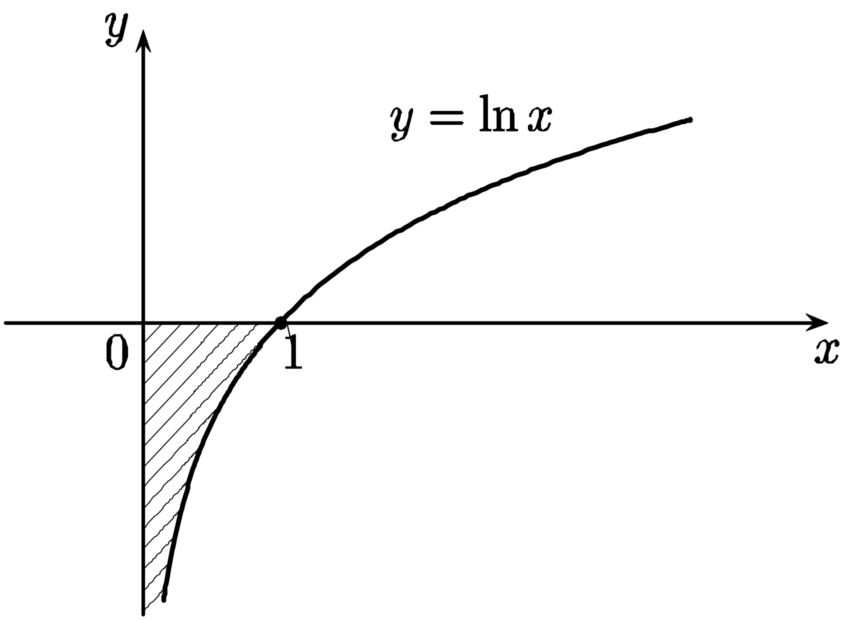
$$= [t \ln t]_x^1 - \int_x^1 t(\ln t)'\,dt$$

$$= (0 - x \ln x) - \int_x^1 t \frac{1}{t}\,dt$$

$$= -x \ln x - 1 + x$$

και επομένως,

$$\int_0^1 \ln x\,dx = \lim_{x \to 0^+} \int_x^1 \ln t\,dt = -1.$$



ΓΕΝΙΚΕΥΜΕΝΑ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΑ ΤΡΙΤΟΥ ΕΙΔΟΥΣ

Το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_{\alpha}^{+\infty} f(x)dx$ (αντ. $\int_{-\infty}^{\beta} f(x)dx$) όπου η συνάρτηση

$f/(\alpha,+\infty)\left(\alpha\nu\tau. f/(-\infty,\beta)\right)$ δεν είναι φραγμένη στο α (αντ. β) λέγεται ότι **συγκλίνει** ή **υπάρχει** όταν συγκλίνουν τα γενικευμένα ολοκληρώματα

$$\int_{\alpha}^{c} f(x)dx,\ \int_{c}^{+\infty} f(x)dx,$$

$$(\alpha\nu\tau.\ \int_{-\infty}^{c} f(x)dx,\ \int_{c}^{\beta} f(x)dx)$$

για κάποιο $c \in (\alpha,+\infty)$ $\left(\alpha\nu\tau. c \in (-\infty,\beta)\right)$, η δε τιμή του είναι το άθροισμα αυτών.

Παράδειγμα

Για το γενικευμένο ολοκλήρωμα τρίτου είδους $I=\int_0^{+\infty}\frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx$, υπολογίζουμε αρχικά το αντίστοιχο αόριστο ολοκλήρωμα, με τη βοήθεια της αντικατάστασης $y=-\sqrt{t}$, οπότε $dy=-\frac{1}{2\sqrt{t}}dt$ και επομένως

$$\int \frac{e^{-\sqrt{t}}}{\sqrt{t}}dt=-2\int e^{y}dy=-2e^{y}+c=-2e^{-\sqrt{t}}+c$$

οπότε

$$I=\int_0^1\frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx+\int_1^{+\infty}\frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx$$

$$=\lim_{x\to 0}\int_x^1\frac{e^{-\sqrt{t}}}{\sqrt{t}}dt+\lim_{x\to+\infty}\int_1^x\frac{e^{-\sqrt{t}}}{\sqrt{t}}dt$$

$$=\lim_{x\to 0}\left[-2e^{-\sqrt{t}}\right]_x^1+\lim_{x\to+\infty}\left[-2e^{-\sqrt{t}}\right]_1^x$$

$$=-2e^{-1}+2\lim_{x\to 0}e^{-\sqrt{x}}-2\lim_{x\to+\infty}e^{-\sqrt{x}}+2e^{-1}$$

$$=2.$$

ΚΡΙΤΗΡΙΑ ΣΥΓΚΛΙΣΗΣ

1. Κριτήριο σύγκρισης Ι

Για δύο τοπικά ολοκληρώσιμες συναρτήσεις $f,g/[\alpha,+\infty)$ **με** $0\le f(x)\le g(x)$ **για κάθε** $x\in[\alpha,+\infty)$ **ισχύει ότι**

(i) Αν το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_{\alpha}^{+\infty} g(x)dx$ **συγκλίνει τότε θα συγκλίνει και το γενικευμένο ολοκλήρωμα** $\int_{\alpha}^{+\infty} f(x)dx$**.**

(ii) Αν το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_{\alpha}^{+\infty} f(x)dx$ **αποκλίνει τότε θα αποκλίνει και το γενικευμένο ολοκλήρωμα** $\int_{\alpha}^{+\infty} g(x)dx$**.**

ΑΣΚΗΣΗ 10

Να μελετηθούν ως προς τη σύγκλιση τα γενικευμένα ολοκληρώματα:

α) $\int_2^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2} dx$, β) $\int_1^{+\infty} \frac{3x^2+2x+1}{x^3+6x^2+x+4} dx$,

γ) $\int_1^{+\infty} \frac{3x+1}{\sqrt{x^5+4x^3+5x}} dx$,

ΛΥΣΗ

Θα εφαρμοσθεί το κριτήριο σύγκρισης I.

α) Επειδή για κάθε $x \in \left[2,+\infty\right)$ ισχύει ότι

$$0 \le \frac{|\cos x|}{x^2} \le \frac{1}{x^2}$$

και το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$ συγκλίνει, έπεται ότι συγκλίνει και το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_2^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2} dx$.

β) $\int_1^{+\infty} \frac{3x^2+2x+1}{x^3+6x^2+x+4}dx$

Επειδή για κάθε $x \in \left[1,+\infty\right)$ ισχύει ότι

$$\frac{3x^2+2x+1}{x^3+6x^2+x+4} \geq \frac{3x^2}{x^3+6x^3+x^3+4x^3} = \frac{3x^2}{12x^3} = \frac{1}{4x}$$

και το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{4x}$ αποκλίνει, έπεται ότι αποκλίνει και το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_1^{+\infty} \frac{3x^2+2x+1}{x^3+6x^2+x+4}dx$.

γ) $\int_1^{+\infty} \frac{3x+1}{\sqrt{x^5+4x^3+5x}}dx$

Επειδή για κάθε $x \in [1,+\infty)$ ισχύει ότι

$$0 \le \frac{3x+1}{\sqrt{x^5+4x^3+5x}} \le \frac{3x+x}{\sqrt{x^5}} = \frac{4x}{x^{\frac{5}{2}}} = \frac{4}{x^{\frac{3}{2}}}$$

και το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_1^{+\infty} \frac{4}{x^{\frac{3}{2}}}dx$ συγκλίνει, έπεται ότι συγκλίνει και το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_1^{+\infty} \frac{3x+1}{\sqrt{x^5+4x^3+5x}}dx$.

ΑΣΚΗΣΗ 7(i)

Να αποδειχθεί ότι το γενικευμένο ολοκλήρωμα

$\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$ συγκλίνει, και μάλιστα ισχύει ότι

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \cos 1 - \int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2} dx.$$

ΛΥΣΗ

Θεωρούμε τις συναρτήσεις

$$F(x) = \int_1^{x} \frac{\sin t}{t} dt \,/\, [1, +\infty) \text{ και } G(x) = \int_1^{x} \frac{\cos t}{t^2} dt \,/\, [1, +\infty).$$

Χρησιμοποιώντας παραγοντική ολοκλήρωση, προκύπτει ότι

$$F(x) = -\int_1^{x} \frac{(\cos t)'}{t} dt = -\left[\frac{\cos t}{t}\right]_1^{x} + \int_1^{x} \left(\frac{1}{t}\right)' \cos t dt$$

δηλαδή

$$F(x) = \cos 1 - \frac{\cos x}{x} - G(x) \qquad (1)$$

Επειδή το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx$ συγκλίνει, και ισχύει ότι $\left|\frac{\cos x}{x^2}\right| \le \frac{1}{x^2}$ για κάθε $x \in [1, +\infty)$ έπεται, σύμφωνα με το κριτήριο σύγκρισης I, ότι θα συγκλίνει και το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2} dx$.

Τότε, θα υπάρχει το όριο

$$\lim_{x \to +\infty} G(x) = \int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2} dx \qquad (2)$$

Τέλος, επειδή $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\cos x}{x} = 0$, από τις σχέσεις (1) και (2) έπεται ότι θα υπάρχει το όριο

$$\lim_{x \to +\infty} F(x) = \cos 1 - \lim_{x \to +\infty} G(x) = \cos 1 - \int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2} dx.$$

Κατόπιν τούτων, το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$ συγκλίνει και ισχύει η σχέση

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \cos 1 - \int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2} dx.$$

ΑΣΚΗΣΗ 11

Να αποδειχθεί ότι συγκλίνει το γενικευμένο ολοκλήρωμα $I=\int_1^{+\infty}\cos\left(x^3-x\right)dx$.

ΛΥΣΗ

Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$F(x)=\int_1^{x}\cos\left(t^3-t\right)dt\,/\left[1,+\infty\right).$$

Με παραγοντική ολοκλήρωση, προκύπτει ότι

$$F(x)=\int_1^{x}\frac{\left(\sin\left(t^3-t\right)\right)'}{3t^2-1}dt$$

$$=\left[\frac{\sin\left(t^3-t\right)}{3t^2-1}\right]_1^{x}-\int_1^{x}\sin\left(t^3-t\right)\left(\frac{1}{3t^2-1}\right)'dt$$

$$=\frac{\sin\left(x^3-x\right)}{3x^2-1}+6\int_1^{x}\frac{t\sin\left(t^3-t\right)}{\left(3t^2-1\right)^2}dt,$$

για κάθε $x\in\left[0,+\infty\right)$.

Τότε, αν τεθεί $G(x)=\int_1^{x}\frac{t\sin\left(t^3-t\right)}{\left(3t^2-1\right)^2}dt$, είναι

$$F(x)=\frac{\sin\left(x^3-x\right)}{3x^2-1}+6G(x) \qquad (1)$$

Επιπλέον, επειδή

$$\left|\frac{x\sin\left(x^3-x\right)}{\left(3x^2-1\right)^2}\right|\le\frac{x}{9x^4-6x^2+1}\le\frac{x}{9x^4-6x^4}=\frac{1}{3x^3}$$

για κάθε $x\in\left[1,+\infty\right)$ και το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{3x^3}$ συγκλίνει, έπεται σύμφωνα με το κριτήριο σύγκρισης I, ότι θα συγκλίνει και το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_1^{+\infty}\frac{x\sin\left(x^3-x\right)}{\left(3x^2-1\right)^2}dx$, οπότε θα υπάρχει το όριο $\lim\limits_{x\to+\infty}G(x)$ στο $\mathbb{R}$.

Τέλος, επειδή $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sin\left(x^3-x\right)}{3x^2-1}=0$, από τη σχέση (1) έπεται ότι θα υπάρχει και το όριο $\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)$ στο $\mathbb{R}$, οπότε θα συγκλίνει και το γενικευμένο ολοκλήρωμα I.

2. Κριτήριο σύγκρισης II (ή οριακό κριτήριο σύγκρισης)

Για δύο τοπικά ολοκληρώσιμες συναρτήσεις $f,g/[\alpha,+\infty)$ **με** $0\le f(x)$, $0<g(x)$ **για κάθε** $x\in[\alpha,+\infty)$ **και** $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\ell\in\overline{\mathbb{R}}$ **ισχύει ότι**

(i) Αν $\ell\neq 0,+\infty$ **τότε τα γενικευμένα ολοκληρώματα** $\int_\alpha^{+\infty} f(x)dx$ **και** $\int_\alpha^{+\infty} g(x)dx$ **είναι της ίδιας φύσης.**

(ii) Αν $\ell=0$ **και το γενικευμένο ολοκλήρωμα** $\int_\alpha^{+\infty} g(x)dx$ **συγκλίνει τότε θα συγκλίνει και το γενικευμένο ολοκλήρωμα** $\int_\alpha^{+\infty} f(x)dx$**.**

(iii) Αν $\ell=+\infty$ **και το γενικευμένο ολοκλήρωμα** $\int_\alpha^{+\infty} g(x)dx$ **αποκλίνει τότε θα αποκλίνει και το γενικευμένο ολοκλήρωμα** $\int_\alpha^{+\infty} f(x)dx$**.**

ΑΣΚΗΣΗ 12 (*)

Να μελετηθούν ως προς τη σύγκλιση τα γενικευμένα ολοκληρώματα:

α) $\int_{2}^{+\infty} \frac{3x^2+2x-7}{\sqrt{x^5-2x^3+3x-5}} dx$,

β) $\int_{1}^{+\infty} \frac{\ln\left(x^2+3x+2\right)}{x^{\frac{4}{3}}} dx$,

γ) $\int_{2}^{+\infty} \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{2x+5}\right) dx$,

ΛΥΣΗ

Θα εφαρμοσθεί το κριτήριο σύγκρισης ΙΙ.

α) Επειδή

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\dfrac{3x^2+2x-7}{\sqrt{x^5-2x^3+3x-5}}}{\dfrac{1}{x^{\frac{1}{2}}}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{3x^{5/2}+2x^{3/2}-7x^{1/2}}{\sqrt{x^5-2x^3+3x-5}}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{3x^{5/2}+2x^{3/2}-7x^{1/2}}{x^{5/2}\sqrt{1-\dfrac{2}{x^2}+\dfrac{3}{x^4}-\dfrac{5}{x^5}}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{3+\dfrac{2}{x}-\dfrac{7}{x^2}}{\sqrt{1-\dfrac{2}{x^2}+\dfrac{3}{x^4}-\dfrac{5}{x^5}}}=3$$

και το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_2^{+\infty}\dfrac{dx}{x^{\frac{1}{2}}}$ αποκλίνει, θα αποκλίνει και το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_2^{+\infty}\dfrac{3x^2+2x-7}{\sqrt{x^5-2x^3+3x-5}}dx$.

β) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln\left(x^2+3x+2\right)}{x^{\frac{4}{3}}}dx$

Επειδή

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\dfrac{\ln\left(x^2+3x+2\right)}{x^{\frac{4}{3}}}}{\dfrac{1}{x^{\frac{5}{4}}}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln\left(x^2+3x+2\right)}{x^{\frac{1}{12}}}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\ln\left(x^2+3x+2\right)\right)'}{\left(x^{\frac{1}{12}}\right)'}=\lim_{x\to+\infty}\frac{12x^{\frac{11}{12}}(2x+3)}{x^2+3x+2}$$

$$=0$$

και το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^{\frac{5}{4}}}$ συγκλίνει, θα συγκλίνει και το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln\left(x^2+3x+2\right)}{x^{\frac{4}{3}}}dx$.

γ) $\int_2^{+\infty} \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{2x+5}\right)dx$

Επειδή

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{2x+5}\right)}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to+\infty}\left[\frac{\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{2x+5}\right)}{\frac{1}{2x+5}} \cdot \frac{x}{2x+5}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\lim_{y\to 0}\frac{\operatorname{arctg}y}{y} = \frac{1}{2}\lim_{y\to 0}\frac{(\operatorname{arctg}y)'}{y'} = \frac{1}{2}\lim_{y\to 0}\frac{1}{y^2+1} = \frac{1}{2}$$

και το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_2^{+\infty}\frac{dx}{x}$ αποκλίνει, θα αποκλίνει και το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_2^{+\infty} \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{2x+5}\right)dx$.

3. Κριτήριο ριζών

Για μια τοπικά ολοκληρώσιμη συνάρτηση $f/[\alpha,+\infty)$, **όπου** $\alpha>0$, **με** $\ell=\lim\limits_{x\to+\infty}|f(x)|^{\frac{1}{x}}\in\mathbb{R}^*$ **ισχύει ότι**

(i) Αν $\ell<1$ **τότε το γενικευμένο ολοκλήρωμα** $\int_{\alpha}^{+\infty}f(x)dx$ **συγκλίνει απολύτως.**

(ii) Αν $\ell>1$ **και η** f **είναι μη αρνητική τότε το γενικευμένο ολοκλήρωμα** $\int_{\alpha}^{+\infty}f(x)dx$ **αποκλίνει.**

Πρέπει να τονισθεί ότι όταν $\ell=1$ με το κριτήριο αυτό δεν προκύπτει απάντηση για τη σύγκλιση του γενικευμένου ολοκληρώματος.

ΑΣΚΗΣΗ 14 (*)

Να αποδειχθεί ότι το γενικευμένο ολοκλήρωμα

$$\int_1^{+\infty} \frac{x^q}{\alpha^x} dx,$$

όπου $\alpha, q \in \mathbb{R}$ με $\alpha > 0$, συγκλίνει για $\alpha > 1$ και αποκλίνει για $\alpha < 1$.

Τι συμπεραίνετε για τη σύγκλιση του γενικευμένου ολοκληρώματος αυτού όταν $\alpha = 1$;

ΛΥΣΗ

Επειδή $\ell = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(\frac{x^q}{\alpha^x} \right)^{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\left(x^{\frac{1}{x}} \right)^q}{\alpha} = \frac{1}{\alpha}$

προκύπτει σύμφωνα με το κριτήριο ριζών ότι το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_\alpha^{+\infty} f(x) dx$ συγκλίνει όταν $\alpha > 1$ και αποκλίνει όταν $\alpha < 1$.

Τέλος, για $\alpha = 1$ προκύπτει το p – ολοκλήρωμα $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{-q}} dx$ με $p = -q$, το οποίο όπως είναι γνωστό συγκλίνει αν και μόνον αν $-q > 1$ δηλαδή $q < -1$.

Παρατήρηση

Για τα γενικευμένα ολοκληρώματα δευτέρου είδους $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx$ προκύπτουν κριτήρια ανάλογα με τα παραπάνω, χρησιμοποιώντας τους μετασχηματισμούς

$$x = \beta - \frac{1}{u} \text{ ή } x = \alpha + \frac{1}{u},$$

οπότε τα προηγούμενα κριτήρια εφαρμόζονται για τις αντίστοιχες συναρτήσεις

$$f_1(u) = \frac{1}{u^2} f\left(\beta - \frac{1}{u}\right) \quad \text{ή} \quad f_2(u) = \frac{1}{u^2} f\left(\alpha + \frac{1}{u}\right).$$

Το τελευταίο κριτήριο που θα δοθεί αφορά τη σύγκλιση γενικευμένων ολοκληρωμάτων της μορφής $\int_{\alpha}^{+\infty} f(x)g(x)dx$.

Στην κατεύθυνση αυτή, υπάρχουν πολλές παραλλαγές κριτηρίων όπως, για παράδειγμα, τα κριτήρια των Dirichlet και Abel.

Παρακάτω, δίδεται μια γενικότερη μορφή.

4. Κριτήριο Dedekind

Έστω $f/[\alpha,+\infty)$ **παραγωγίσιμη συνάρτηση τέτοια ώστε το γενικευμένο ολοκλήρωμα** $\int_{\alpha}^{+\infty}|f'(x)|dx$ **να συγκλίνει και** $g/[\alpha,+\infty)$ **συνεχής συνάρτηση. Αν επιπλέον ισχύει μια από τις παρακάτω συνθήκες:**

(i) $\lim_{x\to+\infty} f(x)=0$ **και η συνάρτηση** $G(x)=\int_{\alpha}^{x} g(t)dt/[\alpha,+\infty)$ **είναι φραγμένη,**

(ii) Το $\int_{\alpha}^{+\infty} g(x)dx$ **συγκλίνει,**

τότε το $\int_{\alpha}^{+\infty} f(x)g(x)dx$ **συγκλίνει.**

Τα **κριτήρια των Dirichlet** και **Abel** αντιστοιχούν στα (i) και (ii) του παραπάνω κριτήριου όταν η $f/[\alpha,+\infty)$ είναι μονότονη και φραγμένη. Στην περίπτωση αυτή, αποδεικνύεται ότι ισχύει πάντα η υπόθεση «$\int_{\alpha}^{+\infty}|f'(x)|dx$ συγκλίνει» του κριτήριου του Dedekind.

ΑΣΚΗΣΗ 15 (Θ)

Έστω $f/\left[\alpha,+\infty\right)$ μια παραγωγίσιμη συνάρτηση με παράγωγο $f'/\left[\alpha,+\infty\right)$ τοπικά ολοκληρώσιμη. Αν, επιπλέον, η f είναι μονότονη και φραγμένη, να αποδειχθεί ότι το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_{\alpha}^{+\infty}\left|f'(x)\right|dx$ συγκλίνει.

ΛΥΣΗ

Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$F(x)=\int_{\alpha}^{x}\left|f'(t)\right|dt\,/\left[\alpha,+\infty\right).$$

Επειδή η συνάρτηση f είναι μονότονη, έπεται ότι η παράγωγός της f' έχει σταθερό πρόσημο στο διάστημα $\left[\alpha,+\infty\right)$ οπότε θα είναι

$$F(x)=\left|\int_{\alpha}^{x}f'(t)\,dt\right|=\left|f(x)-f(\alpha)\right|\text{, για κάθε } x\in\left[\alpha,+\infty\right).$$

Επιπλέον, επειδή η συνάρτηση f είναι μονότονη και φραγμένη θα είναι και συγκλίνουσα, οπότε από την παραπάνω ισότητα θα υπάρχει το όριο $\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)$. Άρα το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_{\alpha}^{+\infty}\left|f'(x)\right|dx$ συγκλίνει.

ΑΣΚΗΣΗ 17

Έστω $f/\left[\alpha,+\infty\right)$ μια μονότονη, παραγωγίσιμη συνάρτηση τέτοια ώστε η $f'/\left[\alpha,+\infty\right)$ να είναι τοπικά ολοκληρώσιμη και $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$.

Να αποδειχθεί ότι το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_{\alpha}^{+\infty} f(x)\cos\beta x dx$, όπου $\beta\in\mathbb{R}^*$, συγκλίνει.

ΛΥΣΗ

Θα εφαρμοσθεί το κριτήριο του Dedekind, για τις συναρτήσεις $f/\left[\alpha,+\infty\right)$ και $g(x)=\cos\beta x/\left[\alpha,+\infty\right)$.

Επειδή η f είναι μονότονη και $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$, έπεται ότι είναι και φραγμένη, οπότε, σύμφωνα με τη λυμένη άσκηση 15, το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_{\alpha}^{+\infty}\left|f'(x)\right|dx$ συγκλίνει.

Επιπλέον, η συνάρτηση g είναι συνεχής και ισχύει ότι

$$\left|G(x)\right| = \left|\int_{\alpha}^{x} \cos\beta t dt\right| = \left|\frac{1}{\beta}\left[\sin\beta t\right]_{\alpha}^{x}\right| = \frac{1}{|\beta|}\left|\sin\beta x - \sin\beta\alpha\right| \leq \frac{2}{|\beta|}$$

για κάθε $x \in \left[\alpha, +\infty\right)$. Άρα ικανοποιείται η πρώτη συνθήκη του κριτηρίου του Dedekind, οπότε το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_{\alpha}^{+\infty} f(x)\cos\beta x dx$ συγκλίνει.

ΑΣΚΗΣΗ 18

Να αποδειχθεί ότι το γενικευμένο ολοκλήρωμα

$$I=\int_1^{+\infty}\frac{\cos\beta x}{x^p}dx$$

συγκλίνει για κάθε $p\in(0,1]$ και $\beta\in\mathbb{R}^*$.

ΛΥΣΗ

Θα εφαρμοσθεί η προηγούμενη άσκηση για τη συνάρτηση $f(x)=\frac{1}{x^p}/[1,+\infty)$.

Πραγματικά, η συνάρτηση f είναι γνήσια φθίνουσα, παραγωγίσιμη, με παράγωγο $f'(x)=-\frac{p}{x^{p+1}}/[1,+\infty)$ συνεχή, άρα και τοπικά ολοκληρώσιμη. Επειδή, επιπλέον, $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x^p}=0$, ικανοποιούνται όλες οι υποθέσεις της προηγούμενης άσκησης για τη συνάρτηση f και επομένως, το γενικευμένο ολοκλήρωμα I συγκλίνει.

ΑΣΚΗΣΗ 19

Έστω $g/\left[1,+\infty\right)$ συνεχής συνάρτηση τέτοια ώστε το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_1^{+\infty} g(x)\,dx$ συγκλίνει.

Να αποδειχθεί ότι το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_1^{+\infty} x^{\frac{1}{x}} \cdot g(x)\,dx$ επίσης συγκλίνει.

ΛΥΣΗ

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = x^{\frac{1}{x}} / \left[1,+\infty\right)$, η οποία είναι παραγωγίσιμη, με παράγωγο

$$f'(x) = \left(e^{\frac{1}{x}\ln x}\right)' = \left(\frac{\ln x}{x}\right)' e^{\frac{1}{x}\ln x} = x^{\frac{1}{x}-2}(1-\ln x).$$

Επειδή $f'(x) = 0$ αν και μόνο αν $x = e$, και $f'(x) > 0$ για κάθε $x < e$, ενώ $f'(x) < 0$ για κάθε $x > e$, έπεται ότι η συνάρτηση f παρουσιάζει μοναδική ακρότατη τιμή για $x = e$, λαμβάνοντας εκεί τη μέγιστη τιμή της.

Άρα ο περιορισμός της συνάρτησης f στο διάστημα $\left[e,+\infty\right)$ είναι γνήσια φθίνουσα και φραγμένη συνάρτηση.

Τότε, εφαρμόζοντας τη λυμένη άσκηση 15, προκύπτει ότι το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_{e}^{+\infty}\left|f'(x)\right|dx$ συγκλίνει.

Κατόπιν τούτου, ικανοποιούνται οι υποθέσεις του κριτηρίου του Dedekind (δεύτερη περίπτωση) για τις συναρτήσεις f, g στο διάστημα $\left[e,+\infty\right)$, οπότε προκύπτει ότι το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_{e}^{+\infty}x^{\frac{1}{x}}g(x)dx$ συγκλίνει.

Άρα τελικά, και το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_{1}^{+\infty}x^{\frac{1}{x}}g(x)dx$ θα συγκλίνει.

ΑΣΚΗΣΗ 13 (Θ)

Να αποδειχθεί η περίπτωση $\ell<1$ του κριτήριου ριζών.

ΛΥΣΗ

Θα αποδειχθεί ότι το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_{\alpha}^{+\infty} f(x)dx$ συγκλίνει όταν $\ell=\lim\limits_{x\to+\infty}|f(x)|^{\frac{1}{x}}<1$.

Πραγματικά, εφαρμόζοντας τον ορισμό της σύγκλισης για $0<\varepsilon<1-\ell$ προκύπτει ότι υπάρχει $\beta\in\left[\alpha,+\infty\right)$ με

$$|f(x)|^{\frac{1}{x}}-\ell\leq\left||f(x)|^{\frac{1}{x}}-\ell\right|<\varepsilon$$

για κάθε $x\in\left[\beta,+\infty\right)$. Επομένως, θα ισχύει ότι

$$|f(x)|<(\ell+\varepsilon)^{x}=e^{x\ln(\ell+\varepsilon)} \quad (1)$$

για κάθε $x\in\left[\beta,+\infty\right)$. Επειδή $0<\ell+\varepsilon<1$, έπεται ότι $\ln(\ell+\varepsilon)<0$ οπότε, το εκθετικό ολοκλήρωμα $\int_{\beta}^{+\infty} e^{x\ln(\ell+\varepsilon)}dx$ συγκλίνει. Τότε, από την (1) και σύμφωνα με το κριτήριο σύγκρισης Ι θα συγκλίνει και το $\int_{\beta}^{+\infty} f(x)dx$. Οπότε, τελικά, θα συγκλίνει και το $\int_{\alpha}^{+\infty} f(x)dx$.

ΔΙΑΛΕΞΗ 3

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 9: ΓΕΝΙΚΕΥΜΕΝΟ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑ

Περιεχόμενα διάλεξης:

- Γενικευμένα ολοκληρώματα που εξαρτώνται από μια παράμετρο
- Ομοιόμορφη σύγκλιση γενικευμένου ολοκληρώματος, κριτήριο Weierstrass
- Συνέπειες της ομοιόμορφης σύγκλισης

ΓΕΝΙΚΕΥΜΕΝΑ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΑ ΠΟΥ ΕΞΑΡΤΩΝΤΑΙ ΑΠΟ ΜΙΑ ΠΑΡΑΜΕΤΡΟ

Έστω $f(x,t)$ μια συνάρτηση δύο μεταβλητών με πεδίο ορισμού το σύνολο $I\times T$, όπου I είναι ένα μη φραγμένο διάστημα και $T\subseteq\mathbb{R}$. Τα

$\int_{\alpha}^{+\infty} f(x,t)dx,\ \int_{-\infty}^{\alpha} f(x,t)dx,\ \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,t)dx$

ονομάζονται **γενικευμένα ολοκληρώματα (πρώτου είδους) που εξαρτώνται από μια παράμετρο.**

Σε αυτά, η μεταβλητή της ολοκλήρωσης είναι το x, ενώ το t είναι η παράμετρος.

Για παράδειγμα, τα γενικευμένα ολοκληρώματα

$$\boldsymbol{\Gamma(t)=\int_{0}^{+\infty} x^{t-1}e^{-x}dx,}$$

$$\boldsymbol{\mathcal{L}[f(x)]=\int_{0}^{+\infty} f(x)e^{-tx}dx}$$

και

$$\boldsymbol{\mathcal{F}[f(x)]=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-itx}dx}$$

ορίζουν αντίστοιχα τη **συνάρτηση γάμμα,** το **μετασχηματισμό Laplace** και το **μετασχηματισμό Fourier.**

Χωρίς βλάβη της γενικότητας, θα περιορισθούμε στη μορφή $\int_{\alpha}^{+\infty} f(x,t)dx$,

αφού ισχύει ότι

$$\int_{-\infty}^{\alpha} f(x,t)dx = \int_{-\alpha}^{+\infty} f(-x,t)dx$$

και

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,t)dx = \int_{-\infty}^{\alpha} f(x,t)dx + \int_{\alpha}^{+\infty} f(x,t)dx$$

Κατόπιν τούτων, αν υποτεθεί ότι το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_{\alpha}^{+\infty} f(x,t)dx$ συγκλίνει για κάθε $t \in T$, ορίζεται η συνάρτηση

$$F(t) = \int_{\alpha}^{+\infty} f(x,t)dx \,/\, T$$

της οποίας οι κυριότερες ιδιότητες θα μελετηθούν.

Σκέψεις στο πρόχειρο

Το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_{\alpha}^{+\infty} f(x,t)\,dx$ συγκλίνει για κάθε $t \in T$ αν και μόνο αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\beta_0 = \beta_0(\varepsilon, t) \in [\alpha, +\infty)$, με

$$\left|\int_{\alpha}^{\beta} f(x,t)\,dx - \int_{\alpha}^{+\infty} f(x,t)\,dx\right| = \left|\int_{\beta}^{+\infty} f(x,t)\,dx\right| < \varepsilon$$

για κάθε $\beta > \beta_0$ και $t \in T$.

Όπως προκύπτει στον παραπάνω ορισμό, το β_0 εξαρτάται από τον θετικό αριθμό ε και την τιμή της παραμέτρου t. Αν απαιτήσουμε να εξαρτάται μόνο από το ε, τότε προκύπτει μια ισχυρότερη σύγκλιση, η οποία ονομάζεται **ομοιόμορφη σύγκλιση**.

Ομοιόμορφη σύγκλιση

Αν $f / [\alpha, +\infty) \times T$ είναι μια συνάρτηση δύο μεταβλητών, της οποίας το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_{\alpha}^{+\infty} f(x,t)dx$ συγκλίνει για κάθε $t \in T$, θα λέμε ότι αυτό συγκλίνει **ομοιόμορφα** (ή **ομαλά**) στο Τ, αν:

Για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\beta_0 = \beta_0(\varepsilon) \in \mathbb{R}$ με $\beta_0 > \alpha$ και

$$\left|\int_{\alpha}^{\beta} f(x,t)dx - \int_{\alpha}^{+\infty} f(x,t)dx\right| = \left|\int_{\beta}^{+\infty} f(x,t)dx\right| < \varepsilon$$

για κάθε $\beta > \beta_0$ και $t \in T$.

Κριτήριο Weierstrass

Δίδεται η συνάρτηση $f(x,t)$, με $x \in [\alpha,+\infty)$ και $t \in T$ τέτοια ώστε για κάθε $t \in T$ η συνάρτηση $x \to f(x,t)$ να είναι τοπικά ολοκληρώσιμη, και η μη αρνητική συνάρτηση $g/[\alpha,+\infty)$ ώστε να ισχύουν οι συνθήκες:

(i) Το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_{\alpha}^{+\infty} g(x)dx$ συγκλίνει.

(ii) $|f(x,t)| \leq g(x)$ για κάθε $t \in T$ και $x \in [\beta,+\infty)$ όπου $\beta \geq \alpha$.

Τότε το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_{\alpha}^{+\infty} f(x,t)dx$ συγκλίνει ομοιόμορφα.

Παράδειγμα

Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$f(x,t) = t \cdot e^{-tx} \,/\, [0,+\infty) \times [0,+\infty).$$

Αρχικά, θα αποδειχθεί ότι το γενικευμένο ολοκλήρωμα

$$\int_0^{+\infty} f(x,t)\,dx$$

συγκλίνει ομοιόμορφα σε κάθε διάστημα της μορφής $[\rho,+\infty)$, όπου $\rho > 0$.

Για το σκοπό αυτό, θα εφαρμοσθεί το κριτήριο του Weierstrass.

Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$g(x) = f(x,\rho) = \rho e^{-\rho x} \,/\, [0,+\infty).$$

Θα αποδειχθεί ότι ισχύουν οι δύο συνθήκες του κριτηρίου Weierstrass.

i) Επειδή $\rho > 0$, ισχύει ότι

$$\int_0^{+\infty} g(x)\,dx = \int_0^{+\infty} \rho e^{-\rho x}\,dx = \rho\frac{1}{\rho} = 1.$$

ii) Θεωρούμε τη συνάρτηση $\varphi(z) = ze^{-z} \,/\, [1,+\infty)$, η οποία είναι γνησίως φθίνουσα, αφού $\varphi'(z) = (1-z)e^{-z} < 0$, για κάθε $z \in (1,+\infty)$. Επειδή για $x \in \left[\dfrac{1}{\rho}, +\infty\right)$ και $t \in [\rho, +\infty)$ ισχύει ότι $x\rho, xt \in [1, +\infty)$, έπεται ότι

$$x\rho < xt \Rightarrow \varphi(xt) \leq \varphi(x\rho) \Leftrightarrow xte^{-xt} \leq x\rho e^{-x\rho}$$

$$\Leftrightarrow te^{-xt} \leq \rho e^{-x\rho} \Leftrightarrow |f(x,t)| \leq |g(x)|$$

Κατόπιν τούτων, ικανοποιούνται οι υποθέσεις του κριτηρίου του Weierstrass και επομένως το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_0^{+\infty} f(x,t)dx$ θα συγκλίνει ομοιόμορφα στο $[\rho, +\infty)$.

Στη συνέχεια, θα αποδειχθεί ότι η σύγκλιση του γενικευμένου ολοκληρώματος $\int_0^{+\infty} f(x,t)dx$ δεν είναι ομοιόμορφη στο διάστημα $[0, +\infty)$. Για το σκοπό αυτό, επειδή $\int_\beta^{+\infty} te^{-tx}dx = \left[-e^{-tx}\right]_\beta^{+\infty} = e^{-\beta t} - \lim\limits_{x\to+\infty} e^{-tx} = e^{-\beta t}$, αρκεί να βρεθούν $\varepsilon > 0$, $\beta > \beta_0$ και $t > 0$, με $e^{-\beta t} > \varepsilon$.

Έτσι, για $\varepsilon = e^{-1}$, $\beta = \beta_0 + 1$ και $t = \dfrac{1}{\beta^2}$ θα είναι

$$\left|\int_\beta^{+\infty} te^{-tx}dx\right| = e^{-\beta t} = e^{-1/\beta} > e^{-1} = \varepsilon.$$

Μερική παράγωγος

Δίδεται μια συνάρτηση $f(x,y)$ δύο μεταβλητών. Θεωρώντας το y (αντ. το x) σταθερό, η παράγωγος της συνάρτησης μίας μεταβλητής που προκύπτει ονομάζεται **μερική παράγωγος** της f ως προς x (αντ. ως προς y) και συμβολίζεται με

$$\frac{\partial f}{\partial x} \qquad (\text{αντ. } \frac{\partial f}{\partial y}).$$

Παράδειγμα

Αν $f(x,y) = 3x^4y^3 - 5x^2y^4 + 7x^3y^2 \,/\, \mathbb{R}^2$, τότε

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 12x^3y^3 - 10xy^4 + 21x^2y^2$$

και

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 9x^4y^2 - 20x^2y^3 + 14x^3y$$

Αναλυτική μελέτη των μερικών παραγώγων και των εφαρμογών αυτών θα δοθούν στο κεφάλαιο 12.

Πρόταση 6.1

Έστω η συνεχής συνάρτηση $f / [\alpha,+\infty)\times T$, όπου $T \subseteq \mathbb{R}$ με $T^o \neq \varnothing$, για την οποία το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_{\alpha}^{+\infty} f(x,t)\,dx$ συγκλίνει για κάθε $t \in T$. Τότε, για τη συνάρτηση

$F(t) = \int_{\alpha}^{+\infty} f(x,t)\,dx / T$ ισχύουν τα παρακάτω:

(i) Η F είναι συνεχής στο T^o και

$$\int_p^q F(t)\,dt = \int_p^q \left[\int_{\alpha}^{+\infty} f(x,t)\,dx\right]dt = \int_{\alpha}^{+\infty}\left[\int_p^q f(x,t)\,dt\right]dx$$

για κάθε διάστημα $[p,q] \subseteq T$, υπό την προϋπόθεση ότι η σύγκλιση του γενικευμένου ολοκληρώματος $\int_{\alpha}^{+\infty} f(x,t)\,dx$ είναι ομοιόμορφη στο T.

(ii) Ισχύει ότι $F'(t) = \int_{\alpha}^{+\infty} \dfrac{\partial f}{\partial t}(x,t)\,dx$

για κάθε εσωτερικό σημείο $t \in T$, υπό την προϋπόθεση ότι η μερική παράγωγος $\dfrac{\partial f}{\partial t}$ είναι συνεχής στο $[\alpha,+\infty)\times T$ και η σύγκλιση του γενικευμένου ολοκληρώματος $\int_{\alpha}^{+\infty} \dfrac{\partial f}{\partial t}(x,t)\,dx$ είναι ομοιόμορφη στο T.

Παρατηρήσεις

(i) Η πρόταση ισχύει γενικότερα όταν $f(x,t)=g(x,t)h(x)$, όπου η $g/[\alpha,+\infty)\times T$ είναι συνεχής συνάρτηση και η $h/[\alpha,+\infty)$ είναι τοπικά ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Η γενίκευση αυτή χρησιμεύει στη μελέτη του μετασχηματισμού Fourier.

(ii) Η ισότητα της πρώτης ιδιότητας στη παραπάνω πρόταση ισχύει, κάτω από ορισμένες προϋποθέσεις, και στην περίπτωση όπου $q=+\infty$, δηλαδή ισχύει ότι

$$\int_p^{+\infty}\left(\int_\alpha^{+\infty} f(x,t)\,dx\right)dt=\int_\alpha^{+\infty}\left(\int_p^{+\infty} f(x,t)\,dt\right)dx$$

για κάθε διάστημα $[p,+\infty)\subseteq T$.

(iii) Ανάλογη πρόταση ισχύει και για τα γενικευμένα ολοκληρώματα δευτέρου είδους που εξαρτώνται από μια παράμετρο.

(iv) Η παραπάνω πρόταση έχει πολλές εφαρμογές στον υπολογισμό των γενικευμένων ολοκληρωμάτων.

ΑΣΚΗΣΗ 21

Να υπολογισθεί το γενικευμένο ολοκλήρωμα

$$I=\int_0^{+\infty}\frac{\operatorname{arctg}(\beta x)-\operatorname{arctg}(\alpha x)}{x}dx$$

όπου $\alpha,\beta>0$.

ΛΥΣΗ

Χωρίς βλάβη της γενικότητας, υποτίθεται ότι $\alpha<\beta$. Το γενικευμένο ολοκλήρωμα I είναι πρώτου είδους, διότι

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{arctg}(\beta x)-\operatorname{arctg}(\alpha x)}{x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\left(\operatorname{arctg}(\beta x)-\operatorname{arctg}(\alpha x)\right)'}{x'}$$

$$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\beta}{1+\beta^2x^2}-\frac{\alpha}{1+\alpha^2x^2}\right)$$

$$=\beta-\alpha.$$

Επιπλέον, χρησιμοποιώντας το κριτήριο σύγκρισης II, προκύπτει ότι το γενικευμένο ολοκλήρωμα I συγκλίνει.

Πράγματι, επειδή

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\dfrac{\operatorname{arctg}(\beta x)-\operatorname{arctg}(\alpha x)}{x}}{\dfrac{1}{x^2}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\operatorname{arctg}(\beta x)-\operatorname{arctg}(\alpha x)}{\dfrac{1}{x}}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\operatorname{arctg}(\beta x)-\operatorname{arctg}(\alpha x)\right)'}{\left(\dfrac{1}{x}\right)'}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\dfrac{\beta}{1+\beta^2x^2}-\dfrac{\alpha}{1+\alpha^2x^2}}{-\dfrac{1}{x^2}}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\alpha x^2}{1+\alpha^2x^2}-\frac{\beta x^2}{1+\beta^2x^2}\right)=\frac{1}{\alpha}-\frac{1}{\beta}>0,$$

προκύπτει ότι τα γενικευμένα ολοκληρώματα $\int_1^{+\infty}\frac{\operatorname{arctg}(\beta x)-\operatorname{arctg}(\alpha x)}{x}dx$ και $\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^2}dx$ είναι της αυτής φύσης, οπότε το πρώτο συγκλίνει, και άρα συγκλίνει και το I, αφού

$$I=\int_0^1\frac{\operatorname{arctg}(\beta x)-\operatorname{arctg}(\alpha x)}{x}dx+\int_1^{+\infty}\frac{\operatorname{arctg}(\beta x)-\operatorname{arctg}(\alpha x)}{x}dx$$

Σκέψεις στο πρόχειρο

Για τον υπολογισμό της τιμής του γενικευμένου ολοκληρώματος I, εκφράζουμε τη συνάρτηση arctg με τον γνωστό τύπο

$$(\text{arctg } t)' = \frac{1}{1+t^2} \Leftrightarrow \int \frac{dt}{1+t^2} = \text{arctg } t + c$$

Έτσι, είναι

$$\int_\alpha^\beta \frac{dt}{1+t^2x^2} = \frac{1}{x}\left[\text{arctg}(tx)\right]_\alpha^\beta = \frac{\text{arctg}(\beta x) - \text{arctg}(\alpha x)}{x}$$

οπότε προκύπτει ότι

$$I = \int_0^{+\infty}\left(\frac{\text{arctg}(\beta x)}{x} - \frac{\text{arctg}(\alpha x)}{x}\right)dx$$

$$= \int_0^{+\infty}\left[\int_\alpha^\beta \frac{dt}{1+x^2t^2}\right]dx \overset{(*)}{=} \int_\alpha^\beta\left[\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2t^2}\right]dt$$

$$= \int_\alpha^\beta \frac{1}{t}\left(\lim_{x\to+\infty} \text{arctg}(tx) - \text{arctg}0\right)dt$$

$$= \int_\alpha^\beta \frac{\pi}{2t}dt = \frac{\pi}{2}[\ln t]_\alpha^\beta = \frac{\pi}{2}\left(\ln\beta - \ln\alpha\right) = \frac{\pi}{2}\ln\frac{\beta}{\alpha}$$

εφόσον ισχύει η ισότητα (*), κάτι το οποίο μπορεί να εξασφαλιστεί μέσω της ομοιόμορφης σύγκλισης.

Για τον υπολογισμό της τιμής του I, θα χρησιμοποιηθεί η συνάρτηση

$$g(x,t)=\frac{1}{1+x^2t^2}\,/\,[0,+\infty)\times[0,+\infty)$$

η οποία είναι συνεχής με

$$\int_0^{+\infty} g(x,t)\,dx=\left[\frac{1}{t}\operatorname{arctg}(tx)\right]_0^{+\infty}=\frac{1}{t}\left(\lim_{x\to+\infty}\operatorname{arctg}(tx)-\operatorname{arctg}0\right)=\frac{\pi}{2t}$$

για κάθε $t>0$. Επιπλέον, επειδή $\left|g(x,t)\right|\le\frac{1}{1+x^2\alpha^2}$ για κάθε $t\ge\alpha$ και το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_0^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2\alpha^2}=\frac{\pi}{2\alpha}$ συγκλίνει, προκύπτει, από το κριτήριο του Weierstrass, ότι το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_0^{+\infty} g(x,t)\,dx$ συγκλίνει ομοιόμορφα στο διάστημα $[\alpha,+\infty)$. Κατόπιν τούτου, από την πρόταση 6.1(i), προκύπτει ότι

$$I=\int_0^{+\infty}\left(\frac{\operatorname{arctg}(\beta x)}{x}-\frac{\operatorname{arctg}(\alpha x)}{x}\right)dx$$

$$=\int_0^{+\infty}\left[\int_\alpha^\beta\frac{dt}{1+x^2t^2}\right]dx=\int_\alpha^\beta\left[\int_0^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2t^2}\right]dt$$

$$=\int_\alpha^\beta\frac{\pi}{2t}dt=\frac{\pi}{2}[\ln t]_\alpha^\beta=\frac{\pi}{2}(\ln\beta-\ln\alpha)=\frac{\pi}{2}\ln\frac{\beta}{\alpha}$$

ΑΣΚΗΣΗ 22

Να αποδειχθεί η σχέση

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-\alpha x}\sin tx}{x}dx = \text{arctg}\frac{t}{\alpha}$$

για κάθε $t \in \mathbb{R}$ και $\alpha > 0$.

Σκέψεις στο πρόχειρο

Αρχικά παρατηρούμε ότι το γενικευμένο ολοκλήρωμα είναι πρώτου είδους, αφού

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{-\alpha x}\sin tx}{x} = t\lim_{x\to 0}e^{-\alpha x}\lim_{x\to 0}\frac{\sin tx}{tx} = te^0\cdot 1 = t$$

Επιπλέον, συγκλίνει, σύμφωνα με το κριτήριο σύγκρισης Ι, αφού

$$\left|\frac{e^{-\alpha x}\sin tx}{x}\right| = |t|e^{-\alpha x}\left|\frac{\sin tx}{tx}\right| \le |t|e^{-\alpha x}, \quad \text{για κάθε } x > 0$$

και

$$\int_0^{+\infty} te^{-\alpha x}dx = \frac{t}{\alpha}.$$

Προκειμένου να το υπολογίσουμε, θεωρούμε τη συνάρτηση $F(t)=\int_0^{+\infty} f(x,t)\,dx \,/\, \mathbb{R}$, όπου

$$f(x,t)=\begin{cases} \dfrac{e^{-\alpha x}\sin tx}{x}, & \alpha\nu\; x\neq 0 \\ t, & \alpha\nu\; x=0 \end{cases}$$

οπότε θα είναι

$$F'(t)\overset{(*)}{=}\int_0^{+\infty}\frac{\partial f}{\partial t}(x,t)\,dx=\int_0^{+\infty} e^{-\alpha x}\cos tx\,dx=\frac{\alpha}{\alpha^2+t^2}$$

εφόσον η ισότητα (*) ισχύει, το οποίο μπορεί να εξασφαλισθεί μέσω της ομοιόμορφης σύγκλισης. Κατόπιν, η F μπορεί να υπολογισθεί ολοκληρώνοντας ως προς t.

ΛΥΣΗ

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f \,/\, [0,+\infty)\times\mathbb{R}$ με

$$f(x,t)=\begin{cases} \dfrac{e^{-\alpha x}\sin tx}{x}, & \alpha\nu\; x\neq 0 \\ t, & \alpha\nu\; x=0 \end{cases}$$

η οποία είναι συνεχής, με μερική παράγωγο

$$\frac{\partial f}{\partial t}(x,t)=e^{-\alpha x}\cos tx.$$

Επειδή $\left|f(x,t)\right| \le |t|e^{-\alpha x}$ για κάθε $x \in [0,+\infty)$, και το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_0^{+\infty} te^{-\alpha x}dx = \frac{t}{\alpha}$ συγκλίνει, έπεται, σύμφωνα με το κριτήριο σύγκρισης I, ότι και το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_0^{+\infty} f(x,t)dx$ συγκλίνει επίσης για κάθε $t \in \mathbb{R}$, οπότε ορίζεται η συνάρτηση

$$F(t) = \int_0^{+\infty} f(x,t)dx \,/\, \mathbb{R}.$$

Θα αποδειχθεί ότι το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_0^{+\infty} \frac{\partial f}{\partial t}(x,t)dx$ συγκλίνει ομοιόμορφα στο T.

Πράγματι, επειδή $\left|\frac{\partial f}{\partial t}(x,t)\right| \le e^{-\alpha x}$, για κάθε $x \ge 0$, $t \in \mathbb{R}$ και το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_0^{+\infty} e^{-\alpha x}dx = \frac{1}{\alpha}$ συγκλίνει, έπεται, σύμφωνα με το κριτήριο του Weierstrass, ότι το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_0^{+\infty} \frac{\partial f}{\partial t}(x,t)dx$ συγκλίνει ομοιόμορφα στο T.

Κατόπιν τούτων, εφαρμόζοντας τη πρόταση 6.1(ii), προκύπτει ότι

$$F'(t) = \int_0^{+\infty} \frac{\partial f}{\partial t}(x,t)\,dx = \int_0^{+\infty} e^{-\alpha x} \cos tx\,dx = \frac{\alpha}{\alpha^2 + t^2}$$

για κάθε $t \in \mathbb{R}$.

Άρα,

$$F(t) = \int \frac{\alpha}{\alpha^2 + t^2}\,dt = \int \frac{1}{1+\left(\frac{t}{\alpha}\right)^2} d\left(\frac{t}{\alpha}\right) = \operatorname{arctg}\left(\frac{t}{\alpha}\right) + c$$

για κάθε $t \in \mathbb{R}$.

Τέλος, επειδή $c = F(0) = 0$, έπεται ότι

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-\alpha x} \sin tx}{x}\,dx = F(t) = \operatorname{arctg}\left(\frac{t}{\alpha}\right)$$

για κάθε $t \in \mathbb{R}$ και $\alpha > 0$.

ΑΣΚΗΣΗ 23

Να αποδειχθεί η σχέση

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin tx}{x} dx = \begin{cases} \dfrac{\pi}{2}, & \alpha\nu \ t > 0 \\ 0 \ , & \alpha\nu \ t = 0 \\ -\dfrac{\pi}{2}, & \alpha\nu \ t < 0. \end{cases}$$

Σκέψεις στο πρόχειρο

Παρατηρούμε ότι $\dfrac{\sin tx}{x} = \lim\limits_{\alpha \to 0^+} \dfrac{e^{-\alpha x} \sin tx}{x}$, οπότε

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin tx}{x} dx = \int_0^{+\infty} \lim_{\alpha \to 0^+} \frac{e^{-\alpha x} \sin tx}{x} dx \overset{(*)}{=} \lim_{\alpha \to 0^+} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-\alpha x} \sin tx}{x} dx$$

$$= \lim_{\alpha \to 0^+} \operatorname{arctg}\left(\frac{t}{\alpha} \right) = \begin{cases} \pi / 2 \ , & \alpha\nu \ t > 0 \\ 0 \ , & \alpha\nu \ t = 0 \\ -\pi / 2 \ , & \alpha\nu \ t < 0. \end{cases}$$

Η ισότητα (*) θα εξασφαλισθεί μέσω της ομοιόμορφης σύγκλισης.

ΛΥΣΗ

Επειδή η ζητούμενη ισότητα επαληθεύεται προφανώς για $t = 0$, αρκεί να αποδειχθεί για $t \neq 0$.
Θεωρούμε τη συνάρτηση $f / [0,+\infty) \times [0,+\infty)$ με

$$f(x,\alpha) = \begin{cases} \dfrac{e^{-\alpha x}\sin tx}{x}, & \alpha\nu\; x \neq 0 \\ t, & \alpha\nu\; x = 0 \end{cases}$$

η οποία είναι συνεχής.
Θα αποδειχθεί ότι το γενικευμένο ολοκλήρωμα

$$\int_0^{+\infty} f(x,\alpha)\,dx = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-\alpha x}\sin tx}{x}\,dx$$

συγκλίνει ομοιόμορφα στο $[0,+\infty)$.
Πραγματικά, για $\beta > 0$ είναι

$$\int_{\beta}^{+\infty}\frac{e^{-\alpha x}\sin tx}{x}dx=\int_{\beta}^{+\infty}\left(-\frac{(\alpha\sin tx+t\cos tx)e^{-\alpha x}}{\alpha^2+t^2}\right)'\frac{1}{x}dx$$

$$=\left[-\frac{(\alpha\sin tx+t\cos tx)e^{-\alpha x}}{x(\alpha^2+t^2)}\right]_{\beta}^{+\infty}$$

$$+\int_{\beta}^{+\infty}\frac{(\alpha\sin tx+t\cos tx)e^{-\alpha x}}{\alpha^2+t^2}\left(\frac{1}{x}\right)'dx$$

$$=\frac{(\alpha\sin t\beta+t\cos t\beta)e^{-\alpha\beta}}{\beta(\alpha^2+t^2)}-\int_{\beta}^{+\infty}\frac{(\alpha\sin tx+t\cos tx)e^{-\alpha x}}{x^2(\alpha^2+t^2)}dx,$$

οπότε είναι

$$\left|\int_{\beta}^{+\infty}e^{-\alpha x}\frac{\sin tx}{x}dx\right|\le\frac{|\alpha|+|t|}{\beta(\alpha^2+t^2)}+\int_{\beta}^{+\infty}\frac{|\alpha|+|t|}{\alpha^2+t^2}\frac{1}{x^2}dx$$

$$=\frac{|\alpha|+|t|}{\beta(\alpha^2+t^2)}+\frac{|\alpha|+|t|}{\alpha^2+t^2}\left[-\frac{1}{x}\right]_{\beta}^{+\infty}$$

$$=\frac{|\alpha|+|t|}{\beta(\alpha^2+t^2)}+\frac{|\alpha|+|t|}{\alpha^2+t^2}\left(0+\frac{1}{\beta}\right)$$

$$=2\frac{|\alpha|+|t|}{\beta(\alpha^2+t^2)}\le\frac{4}{\beta(|\alpha|+|t|)}\le\frac{4}{\beta|t|}$$

(βάσει της ανισότητας $\left(|\alpha|+|t|\right)^2\le 2\left(|\alpha|^2+|t|^2\right)$).

Κατόπιν τούτου, για $\varepsilon > 0$ επιλέγεται $\beta_0 = \dfrac{4}{\varepsilon|t|}$, οπότε για $\beta > \beta_0$ είναι

$$\left|\int_{\beta}^{+\infty} \frac{e^{-\alpha x}\sin tx}{x}dx\right| < \varepsilon.$$

Άρα το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_0^{+\infty} f(x,\alpha)dx$ συγκλίνει ομοιόμορφα στο $[0,+\infty)$.

Τότε, εφαρμόζοντας την πρόταση 6.1(i), προκύπτει ότι η συνάρτηση

$$G(\alpha) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-\alpha x}\sin tx}{x}dx \,/\, [0,+\infty)$$

είναι συνεχής

Κατόπιν τούτου, προκύπτει ότι

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin tx}{x}dx = G(0) = \lim_{\alpha\to 0^+} G(\alpha) = \lim_{\alpha\to 0^+} \operatorname{arctg}\frac{t}{\alpha}$$

$$= \begin{cases} \dfrac{\pi}{2}, \text{ αν } t > 0 \\ -\dfrac{\pi}{2}, \text{ αν } t < 0. \end{cases}$$

ΔΙΑΛΕΞΗ 4

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 9:
ΓΕΝΙΚΕΥΜΕΝΟ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑ

Περιεχόμενα διάλεξης:

- Συνάρτηση Γάμμα
- Συνάρτηση Βήτα

ΑΣΚΗΣΗ 27 (Θ)

Να αποδειχθεί ότι το γενικευμένο ολοκλήρωμα $I=\int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}dt$ συγκλίνει αν και μόνο αν $x>0$.

ΛΥΣΗ

Θεωρούμε τα ολοκληρώματα

$$I_1=\int_0^1 t^{x-1}e^{-t}dt \text{ και } I_2=\int_1^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}dt.$$

Το I_2 είναι γενικευμένο ολοκλήρωμα πρώτου είδους και συγκλίνει για κάθε $x\in\mathbb{R}$, σύμφωνα με το κριτήριο συγκλισης ΙΙ, αφού

$$\lim_{t\to+\infty}\frac{t^{x-1}e^{-t}}{\frac{1}{t^2}}=\lim_{t\to+\infty}\frac{t^{x+1}}{e^t}=0$$

και το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_1^{+\infty}\frac{dt}{t^2}$ συγκλίνει.

Το I_1 είναι ορισμένο ολοκλήρωμα για κάθε $x\geq 1$ και γενικευμένο ολοκλήρωμα δευτέρου είδους για κάθε $x<1$.

Έτσι, επειδή η $f(t)=t^{x-1}e^{-t}/[0,1]$ είναι συνεχής, το I_1 ορίζεται για κάθε $x\geq 1$.

Θα αποδειχθεί ότι όταν $x<1$, το γενικευμένο ολοκλήρωμα I_1 συγκλίνει αν και μόνο αν $x>0$.

Πραγματικά, επειδή $\lim\limits_{t\to 0^+}\dfrac{t^{x-1}e^{-t}}{\dfrac{1}{t^{1-x}}}=1$, από το κριτήριο σύγκρισης ΙΙ προκύπτει ότι τα γενικευμένα ολοκληρώματα I_1 και $\int_0^1 \frac{1}{t^{1-x}}dt$ είναι της αυτής φύσης, οπότε επειδή όπως είναι γνωστό το δεύτερο συγκλίνει αν και μόνο αν $1-x<1$ ή ισοδύναμα $0<x$, προκύπτει ότι το I_1 συγκλίνει επίσης αν και μόνο αν $0<x$.

Κατόπιν τούτων, και επειδή το γενικευμένο ολοκλήρωμα Ι συγκλίνει αν και μόνο αν συγκλίνουν τα I_1 και I_2, έπεται ότι το Ι συγκλίνει αν και μόνο αν $x>0$.

Η συνάρτηση γάμμα

Θεωρούμε το γενικευμένο ολοκλήρωμα του Euler

$$\mathbf{I} = \int_0^{+\infty} \mathbf{t}^{\mathbf{x}-\mathbf{1}} \mathbf{e}^{-\mathbf{t}} \mathbf{dt}$$

το οποίο είναι πρώτου είδους όταν $x \geq 1$, τρίτου είδους όταν $x < 1$ και συγκλίνει αν και μόνο αν $x > 0$. Στην περίπτωση αυτή, ορίζει μια συνάρτηση με πεδίο ορισμού το $(0, +\infty)$, η οποία ονομάζεται **συνάρτηση γάμμα** και σημειώνεται με Γ, δηλαδή $\mathbf{\Gamma}(\mathbf{x}) = \int_0^{+\infty} \mathbf{t}^{\mathbf{x}-\mathbf{1}} \mathbf{e}^{-\mathbf{t}} \mathbf{dt}$ για κάθε $x > 0$.

Ιδιότητες της συνάρτησης γάμμα

(i) $\Gamma(x)>0$ για κάθε $x\in(0,+\infty)$ και $\lim\limits_{x\to 0^+}\Gamma(x)=+\infty$.

(ii) $\Gamma^{(n)}(x)=\int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}(\ln t)^n\,dt$, $n\in\mathbb{N}$, $x\in(0,+\infty)$.

(iii)$\Gamma(x)=2\int_0^{+\infty} e^{-u^2}u^{2x-1}du$, για κάθε $x\in(0,+\infty)$.

(iv)$\Gamma(x+1)=x\Gamma(x)$, για κάθε $x\in(0,+\infty)$.

(v) $\Gamma(x)\Gamma\left(x+\frac{1}{2}\right)=\frac{\sqrt{\pi}}{2^{2x-1}}\Gamma(2x)$, για κάθε $x\in(0,+\infty)$.

(vi)$\Gamma(x)\Gamma(1-x)=\frac{\pi}{\sin\pi x}$, για κάθε $x\in(0,+\infty)\setminus\mathbb{N}$

.

Αποδείξεις ιδιοτήτων

i)

ΑΣΚΗΣΗ 28 (Θ)

(i) Να αποδειχθεί η ανισότητα

$$\Gamma(x) > \frac{1}{ex} \text{ για κάθε } x > 0.$$

(ii) Να αποδειχθεί ότι $\lim\limits_{x\to 0^+} \Gamma(x) = +\infty$.

ΛΥΣΗ

(i) Για $x > 0$ είναι

$$\Gamma(x) = \int_0^1 e^{-t} t^{x-1} dt + \int_1^{+\infty} e^{-t} t^{x-1} dt > \int_0^1 e^{-t} t^{x-1} dt$$

$$\geq e^{-1} \int_0^1 t^{x-1} dt = e^{-1} \left[\frac{t^x}{x} \right]_0^1 = \frac{1}{ex}$$

(ii) Επειδή $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{1}{ex} = +\infty$, από την ανισότητα του (i) έπεται άμεσα ότι

$$\lim_{x\to 0^+} \Gamma(x) = +\infty.$$

ii) Βλ. άσκηση 29 στο τέλος του αρχείου.

iii) $\Gamma(x)=2\int_0^{+\infty} e^{-u^2}u^{2x-1}du$

Αν τεθεί $t=u^2$ στο ολοκλήρωμα του ορισμού της συνάρτησης Γάμμα, τότε $dt=2udu$ και

$$\Gamma(x)=\int_0^{+\infty} e^{-t}t^{x-1}dt=\int_0^{+\infty} e^{-u^2}u^{2(x-1)}2udu=2\int_0^{+\infty} e^{-u^2}u^{2x-1}du$$

iv)

ΑΣΚΗΣΗ 30 (Θ)

Να αποδειχθεί η σχέση $\Gamma(x+1)=x\,\Gamma(x)$, για κάθε $x>0$.

ΛΥΣΗ

Θα αποδειχθεί με παραγοντική ολοκλήρωση. Πραγματικά, για $x>0$ είναι

$$\Gamma(x+1)=\int_0^{+\infty} t^x e^{-t}dt=-\int_0^{+\infty} t^x\left(e^{-t}\right)'dt$$

$$=-\left[t^x e^{-t}\right]_0^{+\infty}+\int_0^{+\infty}\left(t^x\right)'e^{-t}dt$$

$$=\lim_{t\to 0^+} t^x e^{-t}-\lim_{t\to+\infty} t^x e^{-t}+x\int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}dt$$

$$=0-0+x\,\Gamma(x)=x\Gamma(x).$$

v) Αποδεικνύεται μέσω της συνάρτησης Βήτα (άσκηση 38).

vi) Αποδεικνύεται με τη βοήθεια της μιγαδικής ολοκλήρωσης.

Εφαρμογές

1. $\Gamma(1)=1$. Πραγματικά,

$$\Gamma(1)=\int_0^{+\infty} t^0 e^{-t} dt = 1.$$

2. $\Gamma(n+1)=n!$, για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$.

Πραγματικά, εφαρμόζοντας την τέταρτη ιδιότητα n φορές, προκύπτει ότι

$$\Gamma(n+1)=n\Gamma(n)=n(n-1)\Gamma(n-1)$$
$$=\cdots=n(n-1)\cdots 2\cdot 1\Gamma(1)=n!$$

3. $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}$. Πραγματικά, εφαρμόζοντας την τρίτη ιδιότητα για $x=\frac{1}{2}$ και χρησιμοποιώντας το ολοκλήρωμα του Gauss: $\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$, προκύπτει ότι

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=2\int_0^{+\infty} u^0 e^{-u^2} du = 2\int_0^{+\infty} e^{-u^2} du = 2\frac{\sqrt{\pi}}{2}=\sqrt{\pi}$$

4. $\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)=\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2^n}\sqrt{\pi}$, για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$.

Πραγματικά, εφαρμόζοντας την τέταρτη ιδιότητα n φορές, προκύπτει ότι

$$\begin{aligned}\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right) &= \left(n-\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(n-\frac{1}{2}\right)\\ &= \left(n-\frac{1}{2}\right)\left(n-\frac{3}{2}\right)\Gamma\left(n-\frac{3}{2}\right)\\ &= \left(n-\frac{1}{2}\right)\left(n-\frac{3}{2}\right)\cdots\frac{3}{2}\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\\ &= \frac{2n-1}{2}\frac{2n-3}{2}\cdots\frac{3}{2}\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\\ &= \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)\sqrt{\pi}}{2^n}.\end{aligned}$$

Παράδειγμα

$$\Gamma\left(\frac{11}{2}\right) = \Gamma\left(5+\frac{1}{2}\right) = \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot 9}{2^5}\sqrt{\pi}$$

Πρακτικά,

$$\Gamma\left(\frac{11}{2}\right) = \frac{9}{2}\frac{7}{2}\frac{5}{2}\frac{3}{2}\frac{1}{2}\sqrt{\pi}$$

Επέκταση της συνάρτησης γάμμα για αρνητικές τιμές

Η συνάρτηση γάμμα επεκτείνεται και για αρνητικές τιμές με τη βοήθεια του τύπου

$$\Gamma(x)=\frac{\Gamma(x+1)}{x}, \text{ όπου } x<0 \text{ με } x\neq -n, n\in\mathbb{N}^*.$$

Για παράδειγμα,

$$\Gamma\left(-\frac{3}{2}\right)=\frac{1}{\left(-\frac{3}{2}\right)}\Gamma\left(-\frac{1}{2}\right)$$

$$=\frac{1}{\left(-\frac{3}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{4}{3}\sqrt{\pi}.$$

Από τη $\Gamma(x)=\frac{\Gamma(x+1)}{x}$ προκύπτει ότι η Γ είναι αρνητική στα διαστήματα της μορφής $(-2n-1,-2n)$ όπου $n\in\mathbb{N}$, και θετική στα διαστήματα της μορφής $(-2n,-2n+1)$ όπου $n\in\mathbb{N}$. Επιπλέον, οι ευθείες $x=-n$, όπου $n\in\mathbb{N}$ είναι κατακόρυφες ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της Γ, διότι

$$\lim_{x\to -n^+}\Gamma(x)=\begin{cases}+\infty, & n \text{ άρτιος}\\ -\infty, & n \text{ περιττός}\end{cases}$$

και $\lim\limits_{x\to -n^-}\Gamma(x)=\begin{cases}-\infty, & \text{n άρτιος}\\ +\infty, & \text{n περιττός}\end{cases}$

Πράγματι, για $n=0$, είναι

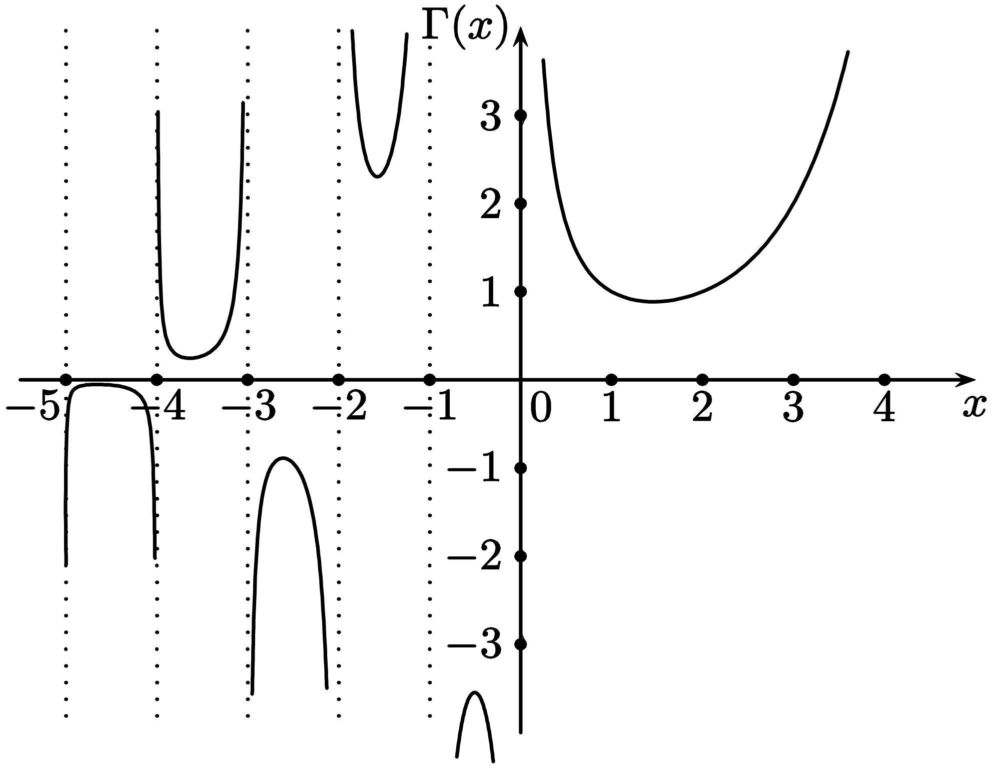
$$\lim_{x\to 0^+}\Gamma(x)=\lim_{x\to 0^+}\frac{\Gamma(x+1)}{x}=\Gamma(1)\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x}=+\infty$$

και

$$\lim_{x\to 0^-}\Gamma(x)=\lim_{x\to 0^-}\frac{\Gamma(x+1)}{x}=\Gamma(1)\lim_{x\to 0^-}\frac{1}{x}=-\infty$$

οπότε, για $n\in\mathbb{N}^*$, οι παραπάνω τύποι αποδεικνύονται επαγωγικά.

Τα παραπάνω φαίνονται και στο επόμενο σχήμα.



Η συνάρτηση Γάμμα χρησιμοποιείται για τον υπολογισμό κάποιων γενικευμένων ολοκληρωμάτων. Για παράδειγμα, για τον υπολογισμό του γενικευμένου ολοκληρώματος

$$I_n = \int_0^{+\infty} e^{-st} t^n dt, \text{ όπου } n \in \mathbb{N} \text{ και } s > 0,$$

αν τεθεί $u = st$, προκύπτει ότι

$$I_n = \int_0^{+\infty} e^{-u} \frac{u^n}{s^n} \frac{1}{s} du = \frac{1}{s^{n+1}} \int_0^{+\infty} e^{-u} u^n du$$

$$= \frac{1}{s^{n+1}} \Gamma(n+1) = \frac{n!}{s^{n+1}}.$$

Τέλος, πρέπει να σημειωθεί ότι η Γ μπορεί να υπολογισθεί προσεγγιστικά για μεγάλες τιμές της μεταβλητής, σύμφωνα με το τύπο του Stirling

$$\Gamma(x+1) \sim \sqrt{2\pi x}\left(\frac{x}{e}\right)^x, \text{ ή } \lim_{x\to+\infty} \frac{\Gamma(x+1)}{\sqrt{2\pi x}\left(\frac{x}{e}\right)^x} = 1.$$

ΑΣΚΗΣΗ 31 (*)

Να υπολογισθούν, με τη βοήθεια της συνάρτησης γάμμα, τα ολοκληρώματα:

α) $\int_0^{+\infty} t^{10}e^{-3t}dt$, β) $\int_0^{+\infty}\sqrt{t}e^{-t^3}dt$, γ) $\int_0^1\sqrt{-\ln t}dt$.

ΛΥΣΗ

α) Θέτοντας $u = 3t$, προκύπτει ότι

$$\int_0^{+\infty} t^{10}e^{-3t}dt = \int_0^{+\infty}\left(\frac{u}{3}\right)^{10} e^{-u}d\left(\frac{u}{3}\right) = \frac{1}{3^{11}}\int_0^{+\infty}u^{10}e^{-u}du$$

$$= \frac{\Gamma(11)}{3^{11}} = \frac{10!}{3^{11}}.$$

β) Θέτοντας $u = t^3$, προκύπτει ότι

$$\int_0^{+\infty}\sqrt{t}e^{-t^3}dt = \int_0^{+\infty}u^{\frac{1}{6}}e^{-u}d\left(u^{\frac{1}{3}}\right) = \int_0^{+\infty}u^{\frac{1}{6}}e^{-u}\frac{1}{3}u^{-\frac{2}{3}}du$$

$$= \frac{1}{3}\int_0^{+\infty}u^{-\frac{1}{2}}e^{-u}du = \frac{1}{3}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{3}.$$

γ) Θέτοντας $u = -\ln t \Leftrightarrow t = e^{-u}$, προκύπτει ότι

$$\int_0^1\sqrt{-\ln t}dt = \int_{+\infty}^0 u^{\frac{1}{2}}d\left(e^{-u}\right) = -\int_{+\infty}^0 u^{\frac{1}{2}}e^{-u}du = \int_0^{+\infty}u^{\frac{1}{2}}e^{-u}du$$

$$= \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Η συνάρτηση βήτα

Θεωρούμε το ολοκλήρωμα

$$J = \int_0^1 x^{m-1} (1-x)^{n-1} \, dx$$

το οποίο είναι ορισμένο όταν $m, n \geq 1$ και γενικευμένο δευτέρου είδους όταν $m < 1$ ή $n < 1$. Αποδεικνύεται (λυμένη άσκηση 32) ότι το ολοκλήρωμα J συγκλίνει αν και μόνο αν $m > 0$ και $n > 0$. Στην περίπτωση αυτή, ορίζει μια συνάρτηση δύο μεταβλητών, η οποία ονομάζεται **συνάρτηση βήτα** και σημειώνεται με B δηλαδή

$$B(m, n) = \int_0^1 x^{m-1} (1-x)^{n-1} \, dx, \text{ για } m, n > 0.$$

Ιδιότητες της συνάρτησης βήτα

(i) Η συνάρτηση βήτα είναι θετική, συνεχής, με μερικές παραγώγους

$$\frac{\partial^{\kappa+\ell} B(m,n)}{\partial m^{\kappa} \partial n^{\ell}} =$$

$$= \int_0^1 x^{m-1} (\ln x)^{\kappa} (1-x)^{n-1} \left(\ln(1-x)\right)^{\ell} dx$$

όπου $\kappa, \ell \in \mathbb{N}$.

(ii) $B(m,n) = B(n,m)$, για κάθε $m, n > 0$.

(iii) $B(m,n) = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2m-1}\theta \cos^{2n-1}\theta \, d\theta$, για κάθε $m, n > 0$.

(iv) $B(m,n) = \dfrac{\Gamma(m)\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)}$, για κάθε $m, n > 0$.

Αποδείξεις ιδιοτήτων

ii) $B(m,n)=B(n,m)$

$$B(m,n)=\int_0^1 x^{m-1}(1-x)^{n-1}dx \overset{t=1-x}{=} \int_1^0 (1-t)^{m-1}t^{n-1}(-1)dt$$

$$=\int_0^1 t^{n-1}(1-t)^{m-1}dt = B(n,m)$$

iii) $B(m,n)=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2m-1}\theta\cos^{2n-1}\theta\, d\theta$

Αν τεθεί $x=\sin^2\theta$, προκύπτει ότι

$dx = 2\sin\theta\cos\theta d\theta$, οπότε

$$B(m,n)=\int_0^1 x^{m-1}(1-x)^{n-1}dx$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2m-2}\theta\cos^{2n-2}\theta(2\sin\theta\cos\theta)\,d\theta$$

$$=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2m-1}\theta\cos^{2n-1}\theta d\theta$$

iv) Θα αποδειχθεί στο κεφάλαιο 13, με τη βοήθεια του διπλού ολοκληρώματος.

Παραδείγματα

1. Για τον υπολογισμό του

$$I = \int_0^{\alpha} \frac{x^2}{\sqrt{\alpha - x}} dx, \ \alpha > 0,$$

χρησιμοποιείται ο μετασχηματισμός $y = \dfrac{x}{\alpha}$, οπότε είναι

$$I = \int_0^1 (\alpha y)^2 (\alpha - \alpha y)^{-\frac{1}{2}} \alpha dy = \alpha^{\frac{5}{2}} \int_0^1 y^2 (1 - y)^{-\frac{1}{2}} dy$$

$$= \alpha^{\frac{5}{2}} B\left(3, \frac{1}{2}\right) = \alpha^{\frac{5}{2}} \frac{\Gamma(3)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{7}{2}\right)}$$

$$= \alpha^{\frac{5}{2}} \frac{2!\sqrt{\pi}}{\frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2^3}\sqrt{\pi}} = \frac{16}{15} \alpha^{\frac{5}{2}}.$$

2. Για τον υπολογισμό του

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4\theta \cos^5\theta \, d\theta$$

εφαρμόζεται η τρίτη ιδιότητα, οπότε προκύπτει ότι

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4\theta \cos^5\theta \, d\theta = \frac{1}{2} B\left(\frac{5}{2}, 3\right) = \frac{1}{2} \frac{\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)\Gamma(3)}{\Gamma\left(\frac{11}{2}\right)}$$

$$= \frac{1}{2} \frac{\frac{1\cdot 3}{2^2}\sqrt{\pi}\cdot 2!}{\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot 9}{2^5}\sqrt{\pi}} = \frac{8}{315}.$$

ΑΣΚΗΣΗ 33 (*)

Να υπολογισθεί, με τη βοήθεια της συνάρτησης βήτα, η τιμή των ολοκληρωμάτων:

$$\alpha)\int_0^1 x^4(1-x)^5\,dx,\quad \beta)\int_0^\alpha \frac{x^3}{\sqrt{\alpha^2-x^2}}dx,\quad \gamma)\int_0^4 \frac{(4-x)^2}{\sqrt{x}}dx$$

όπου $\alpha > 0$.

ΛΥΣΗ

$$\alpha)\int_0^1 x^4(1-x)^5\,dx = B(5,6) = \frac{\Gamma(5)\Gamma(6)}{\Gamma(11)} = \frac{4!5!}{10!} = \frac{1}{1260}.$$

β) Αν τεθεί $x = \alpha\sqrt{t}$, τότε $dx = \dfrac{\alpha}{2\sqrt{t}}dt$ και

$$\int_0^\alpha \frac{x^3}{\sqrt{\alpha^2-x^2}}dx = \int_0^1 \frac{\alpha^2 t}{\sqrt{\alpha^2-\alpha^2 t}}\frac{\alpha^2}{2}dt = \frac{\alpha^3}{2}\int_0^1 t(1-t)^{-\frac{1}{2}}dt$$

$$= \frac{\alpha^3}{2}B\left(2,\frac{1}{2}\right) = \frac{\alpha^3}{2}\frac{\Gamma(2)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)} = \frac{\alpha^3}{2}\frac{1!\sqrt{\pi}}{\frac{3}{2}\frac{1}{2}\sqrt{\pi}} = \frac{2}{3}\alpha^3.$$

γ) Αν τεθεί $x = 4t$, τότε $dx = 4dt$ και

$$\int_0^4 \frac{(4-x)^2}{\sqrt{x}}dx = \int_0^1 \frac{(4-4t)^2}{2\sqrt{t}}4dt = 32\int_0^1 t^{-\frac{1}{2}}(1-t)^2\,dt$$

$$= 32B\left(\frac{1}{2},3\right) = 32\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma(3)}{\Gamma\left(\frac{7}{2}\right)} = 32\frac{\sqrt{\pi}\,2!}{\frac{5}{2}\frac{3}{2}\frac{1}{2}\sqrt{\pi}} = \frac{512}{15}.$$

ΑΣΚΗΣΗ 38

Να αποδειχθεί η σχέση

$$B(n,n)=2^{1-2n}B\left(n,\frac{1}{2}\right)$$

για κάθε $n>0$, και στη συνέχεια να αποδειχθεί ότι

$$\Gamma(n)\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)=\frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma(2n)}{2^{2n-1}}$$

για κάθε $n>0$.

ΛΥΣΗ

Αρχικά, παρατηρούμε ότι

$$\begin{aligned}B(n,n)&=\int_0^1 x^{n-1}(1-x)^{n-1}\,dx\\&=\int_0^{\frac{1}{2}} x^{n-1}(1-x)^{n-1}\,dx+\int_{\frac{1}{2}}^{1} x^{n-1}(1-x)^{n-1}\,dx\\&=\int_0^{\frac{1}{2}} x^{n-1}(1-x)^{n-1}\,dx+\int_{\frac{1}{2}}^{0} (1-t)^{n-1}t^{n-1}d(1-t)\\&=\int_0^{\frac{1}{2}} x^{n-1}(1-x)^{n-1}\,dx+\int_0^{\frac{1}{2}} t^{n-1}(1-t)^{n-1}\,dt\end{aligned}$$

δηλαδή

$$B(n,n)=2\int_0^{\frac{1}{2}} x^{n-1}(1-x)^{n-1}\,dx \qquad (1)$$

Αν τεθεί $u=4\left(x-x^2\right)$ τότε $du=4(1-2x)dx$ και το τελευταίο ολοκλήρωμα γίνεται

$$\int_0^{\frac{1}{2}} x^{n-1}(1-x)^{n-1}\,dx = \int_0^{\frac{1}{2}} \left(x-x^2\right)^{n-1} dx$$

$$= \int_0^1 \left(\frac{u}{4}\right)^{n-1} \frac{du}{4(1-u)^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{4^n}\int_0^1 u^{n-1}(1-u)^{-\frac{1}{2}}\,du$$

δηλαδή

$$\int_0^{\frac{1}{2}} x^{n-1}(1-x)^{n-1}\,dx = \frac{1}{4^n} B\left(n,\frac{1}{2}\right) \qquad (2)$$

Από τις σχέσεις (1) και (2) προκύπτει ότι

$$B(n,n) = 2\frac{1}{2^{2n}} B\left(n,\frac{1}{2}\right) = 2^{1-2n} B\left(n,\frac{1}{2}\right) \qquad (3)$$

Τέλος, από τη σχέση (3) προκύπτουν διαδοχικά οι σχέσεις:

$$\frac{\Gamma(n)\Gamma(n)}{\Gamma(2n)} = 2^{1-2n}\frac{\Gamma(n)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)}$$

$$\frac{\Gamma(2n)}{\Gamma(n)} = 2^{2n-1}\frac{\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}}$$

$$\sqrt{\pi}\,\Gamma(2n) = 2^{2n-1}\Gamma(n)\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)$$

$$\Gamma(n)\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma(2n)}{2^{2n-1}}.$$

ΑΣΚΗΣΗ 39 (*)

Να αποδειχθεί η σχέση

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\mathrm{tg}x}\,dx = \frac{\pi}{\sqrt{2}}.$$

ΛΥΣΗ

Ισχύει ότι

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\mathrm{tg}x}\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{\frac{1}{2}} x \cos^{-\frac{1}{2}} x\,dx = \frac{1}{2}B\left(\frac{3}{4},\frac{1}{4}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\frac{\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{4}+\frac{1}{4}\right)}$$

$$= \frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)\Gamma\left(1-\frac{1}{4}\right)$$

$$\overset{1}{=}\frac{1}{2}\frac{\pi}{\sin\frac{\pi}{4}}$$

$$= \frac{\pi}{\sqrt{2}}.$$

---

[2] Σύμφωνα με την έκτη ιδιότητα της συνάρτησης Γάμμα για $x = \frac{1}{4}$.

ΑΣΚΗΣΗ 29 (Θ)

(i) Να αποδειχθεί ότι τα γενικευμένα ολοκληρώματα

$$\int_0^1 \frac{(\ln t)^n}{t^p} dt \text{ και } \int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}(\ln t)^n}{t^p} dt$$

όπου $n \in \mathbb{N}^*$ και $p < 1$, συγκλίνουν.

(ii) Να αποδειχθεί ότι, για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$, τα γενικευμένα ολοκληρώματα

$$\int_0^1 t^{x-1} e^{-t} (\ln t)^n \, dt \text{ και } \int_1^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} (\ln t)^n \, dt$$

συγκλίνουν ομοιόμορφα σε κάθε διάστημα $[\alpha, \beta] \subseteq (0, +\infty)$.

(iii) Να αποδειχθεί ότι η συνάρτηση γάμμα είναι άπειρες φορές παραγωγίσιμη, με

$$\Gamma^{(n)}(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} (\ln t)^n \, dt$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και $x > 0$.

ΛΥΣΗ

(i) Αν $q \in (p, 1)$ τότε επειδή

$$\lim_{t \to 0^+} \frac{\frac{(\ln t)^n}{t^p}}{\frac{1}{t^q}} = \lim_{t \to 0^+} \frac{(\ln t)^n}{t^{p-q}} \overset{1}{=} 0$$

[3] Εφαρμόζοντας n φορές τον κανόνα του L' Hospital.

και το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_0^1 \frac{dt}{t^q}$ συγκλίνει έπεται ότι το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_0^1 \frac{(\ln t)^n}{t^p} dt$ επίσης συγκλίνει.

Ανάλογα, επειδή

$$\lim_{t \to +\infty} \frac{\frac{e^{-t}(\ln t)^n}{t^p}}{\frac{1}{t^2}} = \lim_{t \to +\infty} \frac{t^{2-p}(\ln t)^n}{e^t} \overset{2}{=} 0$$

και το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^2}$ συγκλίνει, έπεται ότι το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}(\ln t)^n}{t^p} dt$ επίσης συγκλίνει.

(ii) Επειδή

$$\left| t^{x-1} e^{-t} (\ln t)^n \right| \leq t^{\alpha-1} |\ln t|^n = (-1)^n t^{\alpha-1} (\ln t)^n$$

για κάθε $t \in (0,1]$ και $x \in [\alpha, \beta]$ και το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_0^1 (-1)^n t^{\alpha-1} (\ln t)^n dt$ συγκλίνει[5], έπεται, σύμφωνα με το κριτήριο του Weierstrass, ότι το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_0^1 t^{x-1} e^{-t} (\ln t)^n dt$ συγκλίνει ομοιόμορφα στο διάστημα $[\alpha, \beta]$.

---

[4] Με διαδοχικές εφαρμογές του κανόνα του L' Hospital.

[5] Λόγω του (i).

Ανάλογα, επειδή

$$\left|t^{x-1}e^{-t}(\ln t)^n\right| \le t^{\beta-1}e^{-t}(\ln t)^n$$

για κάθε $t>1$ και $x \in [\alpha,\beta]$ και το γενικευμένο ολοκλήρωμα

$$\int_1^{+\infty} t^{\beta-1}e^{-t}(\ln t)^n\,dt$$

συγκλίνει, έπεται, σύμφωνα με το κριτήριο του Weierstrass, ότι το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_1^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}(\ln t)^n\,dt$ συγκλίνει ομοιόμορφα στο διάστημα $[\alpha,\beta]$.

(iii) Θα αποδειχθεί επαγωγικά ως προς n.

Προφανώς ισχύει για $n=0$. Αν υποτεθεί ότι υπάρχει η κ-οστή παράγωγος της συνάρτησης γάμμα, με

$$\Gamma^{(\kappa)}(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}(\ln t)^\kappa\,dt$$

για κάθε $x>0$, θα αποδειχθεί ότι υπάρχει επίσης η $(\kappa+1)$-οστή παράγωγος της συνάρτησης γάμμα με

$$\Gamma^{(\kappa+1)}(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}(\ln x)^{\kappa+1}\,dt$$

για κάθε $x>0$.

Πραγματικά, για τυχαίο $x_0>0$ επιλέγονται $\alpha,\beta>0$ με $x_0 \in [\alpha,\beta]$.

Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$f(t,x) = t^{x-1}e^{-t}(\ln t)^\kappa \,/\, (0,+\infty)\times[\alpha,\beta]$$

η οποία είναι συνεχής και για την οποία τα γενικευμένα ολοκληρώματα

$$F_1(x)=\int_0^1 f(t,x)\,dt \text{ και } F_2(x)=\int_1^{+\infty} f(t,x)\,dt$$

συγκλίνουν για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$ με

$$\Gamma^{(\kappa)}(x)=F_1(x)+F_2(x) \qquad (1)$$

για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$.

Επειδή η μερική παράγωγος

$$\frac{\partial f}{\partial x}(t,x)=t^{x-1}e^{-t}(\ln t)^{\kappa+1}$$

είναι συνεχής στο διάστημα $(0,+\infty)\times[\alpha,\beta]$ και τα γενικευμένα ολοκληρώματα

$$\int_0^1 \frac{\partial t}{\partial x}(t,x)\,dt=\int_0^1 t^{x-1}e^{-t}(\ln t)^{\kappa+1}\,dt$$

και

$$\int_1^{+\infty} \frac{\partial f}{\partial x}(t,x)\,dt=\int_1^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}(\ln t)^{\kappa+1}\,dt$$

συγκλίνουν ομοιόμορφα[6] στο $[\alpha,\beta]$, εφαρμόζεται δύο φορές[7] η πρόταση 6.1(ii) οπότε προκύπτει ότι οι συναρτήσεις F_1, F_2 είναι παραγωγίσιμες στο $[\alpha,\beta]$ με

$$F_1'(x)=\int_0^1 \frac{\partial t}{\partial x}f(t,x)\,dt=\int_0^1 t^{x-1}e^{-t}(\ln t)^{\kappa+1}\,dt$$

και

$$F_2'(x)=\int_1^{+\infty} \frac{\partial t}{\partial x}f(t,x)\,dt=\int_1^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}(\ln t)^{\kappa+1}\,dt$$

---

[6] Λόγω του (ii).

[7] Για τους περιορισμούς της συνάρτησης f στα σύνολα $(0,1]\times[\alpha,\beta]$ και $[1,+\infty)\times[\alpha,\beta]$.

για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$.

Κατόπιν τούτων, και η συνάρτηση $\Gamma^{(\kappa)}$ θα είναι παραγωγίσιμη στο $[\alpha, \beta]$ με

$$\Gamma^{(\kappa+1)}(x) = F_1'(x) + F_2'(x)$$

$$= \int_0^1 t^{x-1} e^{-t} (\ln t)^{\kappa+1} dt + \int_1^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} (\ln t)^{\kappa+1} dt \text{ για}$$

$$= \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} (\ln t)^{\kappa+1} dt$$

κάθε $x \in [\alpha, \beta]$.

Άρα η συνάρτηση $\Gamma^{(\kappa)}$ θα είναι παραγωγίσιμη στο x_0, με

$$\Gamma^{(\kappa+1)}(x_0) = \int_0^{+\infty} t^{x_0-1} e^{-t} (\ln t)^{\kappa+1} dt.$$

Κατόπιν τούτων, επειδή η σχέση (1) αποδείχθηκε για το τυχαίο $x_0 > 0$ θα ισχύει για κάθε $x > 0$.

ΑΣΚΗΣΗ 32 (Θ)

Να αποδειχθεί ότι το ολοκλήρωμα

$$J=\int_0^1 x^{m-1}(1-x)^{n-1}\,dx$$

συγκλίνει αν και μόνο αν $m,n>0$.

ΛΥΣΗ

Το ολοκλήρωμα J συγκλίνει αν και μόνο αν συγκλίνουν τα γενικευμένα ολοκληρώματα

$$J_1=\int_0^{\frac{1}{2}} x^{m-1}(1-x)^{n-1}\,dx,\quad J_2=\int_{\frac{1}{2}}^1 x^{m-1}(1-x)^{n-1}\,dx.$$

Αν $m\geq 1$ (αντ. $n\geq 1$) το J_1 (αντ. J_2) είναι ορισμένο ολοκλήρωμα και υπάρχει, διότι η συνάρτηση $f(x)=x^{m-1}(1-x)^{n-1}$ είναι συνεχής στο διάστημα $\left[0,\frac{1}{2}\right]$ (αντ. $\left[\frac{1}{2},1\right]$).

Αν $m<1$ (αντ. $n<1$) το J_1 (αντ. J_2) είναι γενικευμένο ολοκλήρωμα δευτέρου είδους.

Επιπλέον, επειδή

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{x^{m-1}(1-x)^{n-1}}{\dfrac{1}{x^{1-m}}}=1\quad\left(\text{αντ. }\lim_{x\to 1^-}\frac{x^{m-1}(1-x)^{n-1}}{\dfrac{1}{(1-x)^{1-n}}}=1\right)$$

από το κριτήριο σύγκλισης ΙΙ προκύπτει ότι τα γενικευμένα ολοκληρώματα J_1 (αντ. J_2) και

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{x^{1-m}} \qquad \left(\text{αντ. } \int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{dx}{(1-x)^{1-n}} \right)$$

είναι της αυτής φύσης, οπότε, επειδή όπως είναι γνωστό το δεύτερο συγκλίνει αν και μόνο αν $1-m<1$ (αντ. $1-n<1$), προκύπτει ότι το J_1 (αντ. J_2) συγκλίνει αν και μόνο αν $m>0$ (αντ. $n>0$). Κατόπιν τούτων, προκύπτει ότι το ολοκλήρωμα J συγκλίνει αν και μόνο αν $m,n>0$.

ΑΣΚΗΣΗ 34 (*)

Να υπολογισθεί, με τη βοήθεια της συνάρτησης βήτα, η τιμή των ολοκληρωμάτων:

α) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3\theta\cos^4\theta d\theta$, β) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4\theta d\theta$, γ) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\theta d\theta$.

ΛΥΣΗ

Θα χρησιμοποιηθεί η ιδιότητα

$$B(m,n) = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2m-1}\theta\cos^{2n-1}\theta d\theta$$

για κάθε $m,n > 0$.

α) Είναι

$$\begin{Bmatrix} 2m-1=3 \\ 2n-1=4 \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} m=2 \\ n=\dfrac{5}{2} \end{Bmatrix}$$

και άρα

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3\theta\cos^4\theta d\theta = \frac{1}{2}B\left(2,\frac{5}{2}\right) = \frac{1}{2}\frac{\Gamma(2)\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{9}{2}\right)}$$

$$= \frac{1}{2}\frac{1!\frac{3}{2}\frac{1}{2}\sqrt{\pi}}{\frac{7}{2}\frac{5}{2}\frac{3}{2}\frac{1}{2}\sqrt{\pi}} = \frac{2}{35}.$$

β) Είναι

$$\left.\begin{cases} 2m-1=4 \\ 2n-1=0 \end{cases}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{aligned} m &= \frac{5}{2} \\ n &= \frac{1}{2} \end{aligned}\right\}$$

και άρα

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4\theta d\theta = \frac{1}{2}B\left(\frac{5}{2},\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}\frac{\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(3)}$$

$$= \frac{1}{2}\frac{\frac{3}{2}\frac{1}{2}\sqrt{\pi}\sqrt{\pi}}{2!} = \frac{3}{16}\pi.$$

γ) Είναι

$$\left.\begin{cases} 2m-1=0 \\ 2n-1=2 \end{cases}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{aligned} m &= \frac{1}{2} \\ n &= \frac{3}{2} \end{aligned}\right\}$$

και άρα

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\theta d\theta = \frac{1}{2}B\left(\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right) = \frac{1}{2}\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}{\Gamma(2)}$$

$$= \frac{1}{2}\frac{\sqrt{\pi}\,\frac{1}{2}\sqrt{\pi}}{1!} = \frac{\pi}{4}.$$

ΑΣΚΗΣΗ 35

Να αποδειχθούν οι σχέσεις:

α) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n-1}\theta d\theta = \dfrac{2^{n-1}(n-1)!}{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}$,

β) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n}\theta d\theta = \dfrac{1\cdot 3\cdot 5\ldots(2n-1)}{2^{n+1}n!}\pi$,

γ) $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{2\cdot 4\cdot 6\cdots 2n}{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}\right]^2 \dfrac{1}{2n+1} = \dfrac{\pi}{2}$.

ΛΥΣΗ

α) $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n-1}\theta d\theta = \frac{1}{2}B\left(n,\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}\frac{\Gamma(n)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)}$$

$$= \frac{1}{2}\frac{(n-1)!\sqrt{\pi}}{\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2^n}\sqrt{\pi}} = \frac{2^{n-1}(n-1)!}{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}$$

β) $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n}\theta d\theta = \frac{1}{2}B\left(\frac{2n+1}{2},\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}\frac{\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(n+1)}$$

$$= \frac{1}{2}\frac{\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2^n}\sqrt{\pi}\sqrt{\pi}}{n!} = \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)\pi}{2^{n+1}n!}$$

γ) Επειδή για κάθε $\theta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ και $n \in \mathbb{N}^*$ ισχύει ότι

$$\sin^{2n+1}\theta < \sin^{2n}\theta < \sin^{2n-1}\theta,$$

με ολοκλήρωση και με τη βοήθεια των α) και β) προκύπτουν διαδοχικά οι σχέσεις:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+1}\theta d\theta \le \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n}\theta d\theta \le \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n-1}\theta d\theta$$

$$\frac{2^n n!}{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n+1)} \le \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2^{n+1}n!}\pi \le \frac{2^{n-1}(n-1)!}{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}$$

$$\frac{2^n n!}{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}\frac{1}{2n+1} \le \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2^n n!}\frac{\pi}{2} \le \frac{2^n n!}{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}\frac{1}{2n}$$

$$\frac{1}{2n+1}\frac{2}{\pi} \le \left[\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2^n n!}\right]^2 \le \frac{2}{\pi}\frac{1}{2n}$$

$$(2n+1)\frac{\pi}{2} \ge \left[\frac{2\cdot 4\cdot 6\cdots 2n}{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}\right]^2 \ge \frac{\pi}{2}2n$$

$$\frac{\pi}{2} \ge \left[\frac{2\cdot 4\cdot 6\cdots 2n}{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}\right]^2 \frac{1}{2n+1} \ge \frac{\pi}{2}\frac{2n}{2n+1}.$$

Τότε όμως, επειδή $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\pi}{2}\frac{2n}{2n+1} = \frac{\pi}{2}$, προκύπτει ότι

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{2\cdot 4\cdot 6\cdots 2n}{1\cdot 3\cdot 5\cdots 2n-1}\right]^2 \frac{1}{2n+1} = \frac{\pi}{2}.$$

Παρατήρηση

Η σχέση γ) που αποδείχθηκε στην προηγούμενη άσκηση, είναι γνωστή ως **σχέση του Wallis**.