ΔΙΑΛΕΞΗ 1

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 12:

ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ ΔΥΟ ΜΕΤΑΒΛΗΤΩΝ-ΠΑΡΑΓΩΓΙΣΗ

Περιεχόμενα διάλεξης:

Βασικές ιδιότητες υποσυνόλων του $\mathbb{R}^2$

Συναρτήσεις δύο μεταβλητών

Διπλό όριο συνάρτησης δύο μεταβλητών

Συνέχεια συνάρτησης δύο μεταβλητών

ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ ΔΥΟ ΜΕΤΑΒΛΗΤΩΝ

Στο κεφάλαιο αυτό, επεκτείνονται όλες οι βασικές έννοιες της Μαθηματικής Ανάλυσης (εκτός της ολοκλήρωσης) για συναρτήσεις δύο μεταβλητών. Περισσότερη έμφαση δίδεται στην έννοια της μερικής παραγώγου, η οποία χρησιμοποιείται μεταξύ άλλων στον προσδιορισμό των ακρότατων και στην επίλυση των ακριβών διαφορικών εξισώσεων.

1. ΒΑΣΙΚΕΣ ΕΝΝΟΙΕΣ

Κάθε απεικόνιση $f : A \to B$ με $A \subseteq \mathbb{R}^2$ και $B \subseteq \mathbb{R}$ είναι μια συνάρτηση δύο μεταβλητών, με δύο ανεξάρτητες μεταβλητές x, y όπου $(x, y) \in A$ και μια εξαρτημένη μεταβλητή $z = f(x, y)$.

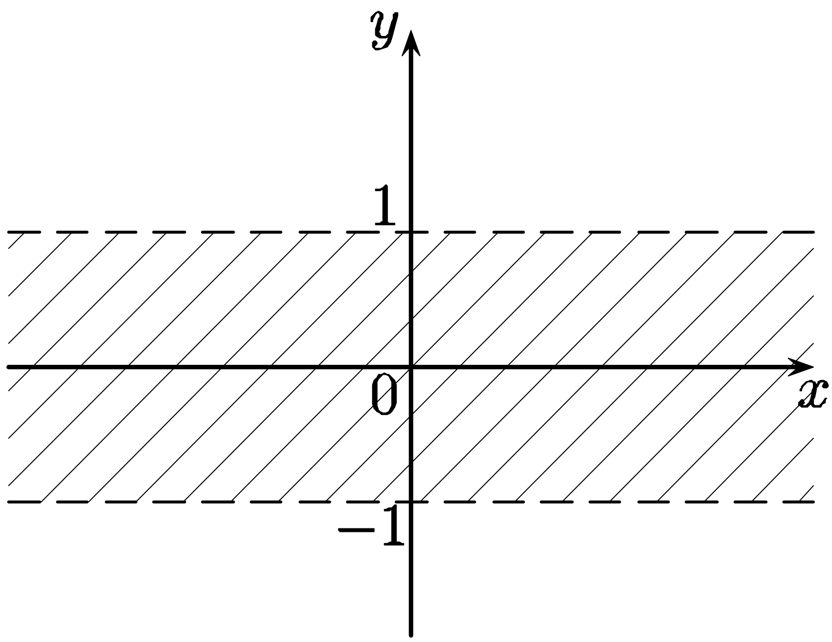
Το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων δύο μεταβλητών μπορεί να παρασταθεί γεωμετρικά στο επίπεδο.

Παραδείγματα

1. Η συνάρτηση

$$f(x,y)=\frac{x+2}{\sqrt{1-y^2}}$$

έχει πεδίο ορισμού $D(f)=\mathbb{R}\times(-1,1)$, η γεωμετρική παράσταση του οποίου είναι το γραμμοσκιασμένο μέρος του επιπέδου στο επόμενο σχήμα.



Το σύνολο τιμών της f είναι $R(f)=\mathbb{R}$.

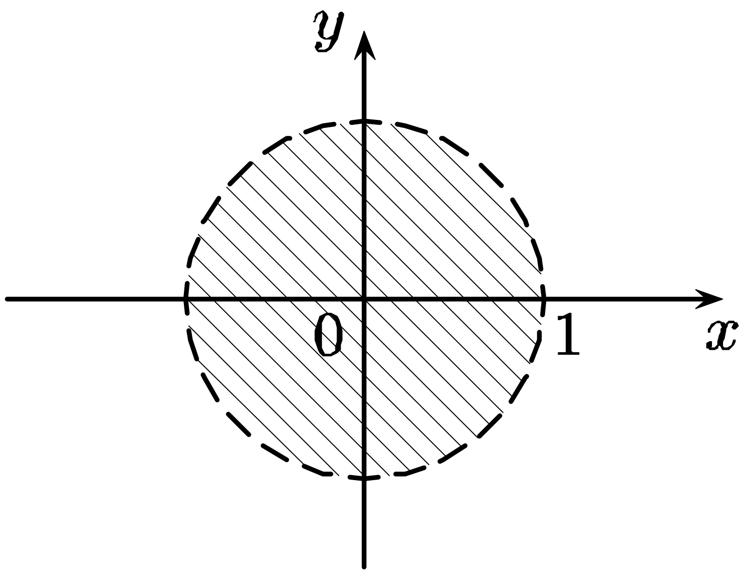
2. Η συνάρτηση

$$f(x,y)=\ln\left(1-\left(x^2+y^2\right)\right)$$

έχει πεδίο ορισμού

$$D(f)=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2<1\right\},$$

δηλαδή το σύνολο των εσωτερικών σημείων του κύκλου κέντρου $(0,0)$ και ακτίνας 1.



Το σύνολο τιμών της f είναι $R(f)=(-\infty,0]$.

Η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης δύο μεταβλητών γίνεται σε ένα τρισορθογώνιο σύστημα αξόνων.

Στοιχεία Αναλυτικής Γεωμετρίας στον χώρο

Καρτεσιανές συντεταγμένες στο χώρο

Είναι γνωστό από την Αναλυτική Γεωμετρία ότι δεδομένου ενός τρισορθογώνιου συστήματος αξόνων Oxyz, κάθε σημείο M του χώρου καθορίζεται μονοσήμαντα από μια διατεταγμένη τριάδα (x, y, z) πραγματικών αριθμών, όπου

- x είναι η απόσταση του M από το επίπεδο Oyz,
- y είναι η απόσταση του M από το επίπεδο Oxz και
- z είναι η απόσταση του M από το επίπεδο Oxy.

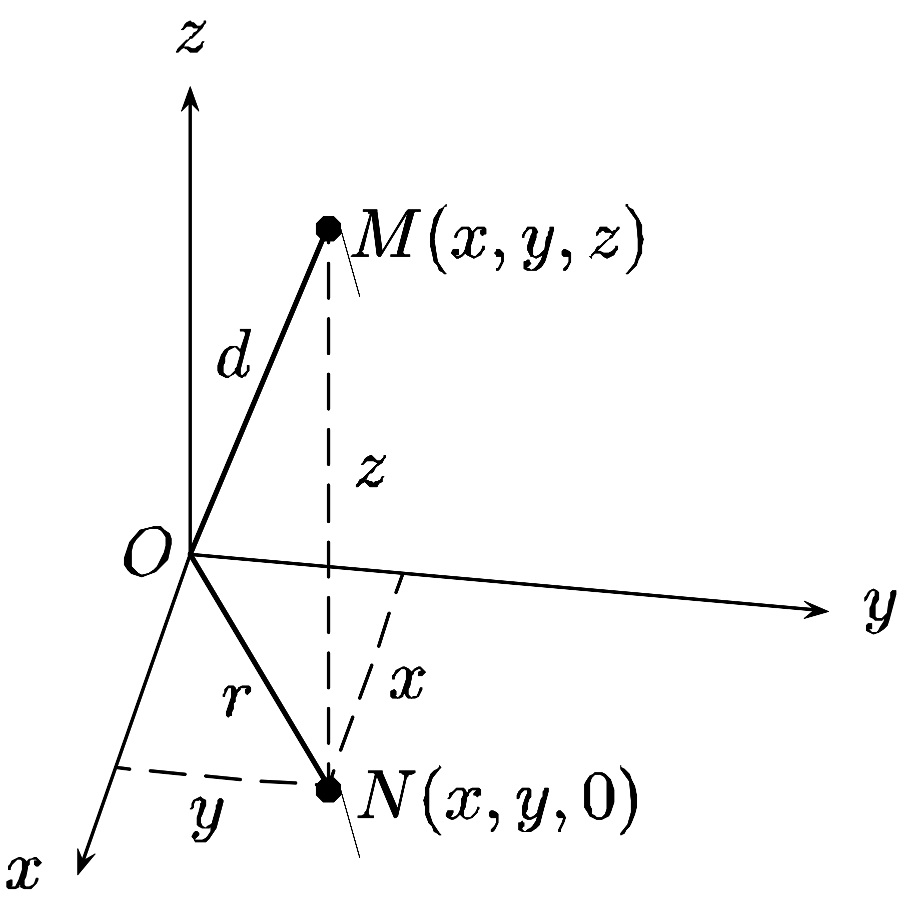
Οι αριθμοί x, y, z ονομάζονται **τετμημένη**, **τεταγμένη** και **κατηγμένη** του M αντίστοιχα, και αποτελούν τις **συντεταγμένες** του M. Αυτό συνήθως σημειώνεται με $M(x, y, z)$.

Τέλος, η απόσταση d του σημείου M από την αρχή των αξόνων δίδεται από τη σχέση

$$d = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\,.$$

Πραγματικά, αν N είναι η προβολή του M στο επίπεδο Oxy και $r = ON$ τότε, χρησιμοποιώντας δύο φορές το Πυθαγόρειο θεώρημα, προκύπτει ότι

$$d^2 = r^2 + z^2 = x^2 + y^2 + z^2.$$



Επιφάνειες

Δίνεται μια συνάρτηση f τριών μεταβλητών. Το σύνολο των σημείων $M(x,y,z)$ του τρισδιάστατου χώρου που οι συντεταγμένες τους ικανοποιούν την εξίσωση $f(x,y,z)=0$ είναι μια επιφάνεια.

Επίπεδο

Η επιφάνεια που ορίζεται από μια εξίσωση της μορφής $ax+by+cz+d=0, \quad \mu\varepsilon\ a,b,c,d \in \mathbb{R}$ και $a^2+b^2+c^2 \neq 0$ είναι ένα επίπεδο.

Παραδείγματα

- Το επίπεδο Oxy έχει εξίσωση την $z=0$.
- Το επίπεδο με εξίσωση $6x+3y+z=12$ τέμνει τους άξονες Ox, Oy και Oz στα σημεία $(2,0,0)$, $(0,4,0)$ και $(0,0,12)$ αντίστοιχα.

Άσκηση

Να βρεθεί η εξίσωση του επιπέδου που διέρχεται από τα σημεία $(0,1,1)$, $(-1,1,0)$ και $(1,0,-1)$.

Η εξίσωση του επιπέδου που διέρχεται από ένα σημείο (x_0,y_0,z_0) είναι της μορφής:

$$a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0$$

Παραμετρικές εξισώσεις ευθείας στον χώρο

$$x = x_0 + ut, \quad y = y_0 + vt, \quad z = z_0 + wt$$

όπου $(x_0, y_0, z_0), (u, v, w) \in \mathbb{R}^3, \quad (u, v, w) \neq (0,0,0)$ και $t \in \mathbb{R}$ είναι η παράμετρος.

Γράφοντας τις τρεις εξισώσεις ως μία, παίρνουμε τη διανυσματική εξίσωση της ευθείας

$$(x, y, z) = (x_0, y_0, z_0) + t(u, v, w), \qquad t \in \mathbb{R}$$

Παρατηρήσεις

- Η ευθεία αυτή περνάει από το σημείο (x_0, y_0, z_0)
- Ταυτίζεται με την ευθεία με εξισώσεις

  $$x = x_0 + \lambda ut, \quad y = y_0 + \lambda vt, \quad z = z_0 + \lambda wt$$

  όπου $\lambda \in \mathbb{R}^*$

Παραδείγματα

- Η ευθεία με παραμετρικές εξισώσεις

  $$x = 2 + 3t, \quad y = -1 + 2t, \quad z = 0,$$

  είναι η ευθεία στο επίπεδο Oxy, η οποία έχει εξίσωση $y = \frac{2}{3}x - \frac{7}{3}$
- Απαλοίφοντας την παράμετρο t από τις παραμετρικές εξισώσεις της ευθείας

  $$\varepsilon: \quad x = 1 + 2t, \quad y = -2 + 3t, \quad z = -1 + 4t$$

  προκύπτουν ισοδύναμα οι εξισώσεις

  $$\frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{3} = \frac{z+1}{4}$$

Γενικά, αν $u, v, w \neq 0$, η ευθεία αποτελείται από όλα τα σημεία $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ που ικανοποιούν τις σχέσεις

$$\frac{x-x_0}{u} = \frac{y-y_0}{v} = \frac{z-z_0}{w}$$

Οι τελευταίες εξισώσεις ονομάζονται καρτεσιανές εξισώσεις της ευθείας.

Ανάλογα, αν $u, v \neq 0$ και $w = 0$, τότε οι καρτεσιανές εξισώσεις της ευθείας είναι

$$\frac{x-x_0}{u} = \frac{y-y_0}{v} \quad \text{και} \qquad z = z_0$$

Δύο ευθείες

$$x = x_1 + u_1 t, \quad y = y_1 + v_1 t, \quad z = z_1 + w_1 t$$

και

$$x = x_2 + u_2 t, \quad y = y_2 + v_2 t, \quad z = z_2 + w_2 t$$

είναι παράλληλες αν υπάρχει $\lambda \neq 0$ με

$$u_1 = \lambda u_2, \, v_1 = \lambda v_2, \, w_1 = \lambda w_2$$

Άσκηση

Να προσδιορισθεί ποιες από τις παρακάτω ευθείες είναι ανά δύο παράλληλες, τεμνόμενες ή ασύμβατες

$$\varepsilon_1 : \frac{x-1}{3} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z-2}{4} \qquad \varepsilon_2 : \frac{x+1}{2} = y+2 = \frac{z-1}{3}$$

$$\varepsilon_3 : \frac{x-2}{-6} = \frac{y+1}{4} = \frac{z-3}{-8} \qquad \varepsilon_4 : \frac{x-2}{2} = y+2 = \frac{z-9}{-3}$$

Άσκηση

Να προσδιορισθεί η εξίσωση του επιπέδου (π) που ορίζεται από τις παρακάτω δύο τεμνόμενες ευθείες

$\varepsilon_1 : z-2=3(x-1), \quad y=3, \qquad \varepsilon_2 : z-2=4(y-3), \quad x=1$

Λύση

Προφανώς, οι δύο ευθείες τέμνονται στο σημείο $(1,3,2)$. Η εξίσωση του επιπέδου (π) είναι

$$a(x-1)+b(y-3)+c(z-2)=0, \qquad (a,b,c)\neq(0,0,0).$$

Επειδή τα σημεία των ευθειών θα ανήκουν στο επίπεδο, οι συντεταγμένες θα ικανοποιούν την εξίσωση του επιπέδου, δηλαδή

$$a\left(\frac{z-2}{3}+1-1\right)+b(3-3)+c(z-2)=0$$

και

$$a(1-1)+b\left(\frac{z-2}{4}+3-3\right)+c(z-2)=0,$$

από όπου προκύπτει ότι $a=-3c$ και $b=-4c$, οπότε η εξίσωση του επιπέδου είναι

$$-3c(x-1)-4c(y-3)+c(z-2)=0,$$

ή ισοδύναμα

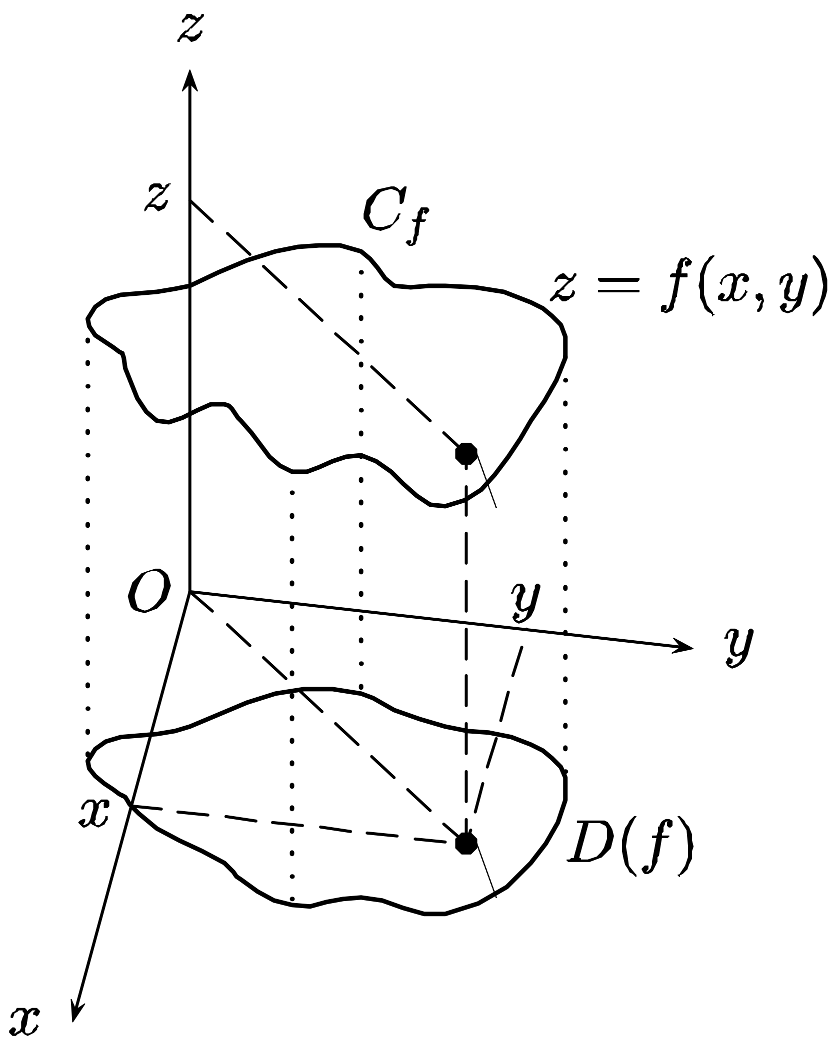
$$z-2=3(x-1)+4(y-3)$$

Γραφική παράσταση

Αν f είναι μια συνάρτηση δύο μεταβλητών, τότε το σύνολο όλων των σημείων $M(x,y,z)$ του τρισδιάστατου χώρου με $(x,y)\in D(f)$ και $z=f(x,y)$ ορίζει τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f, δηλαδή ισχύει ότι

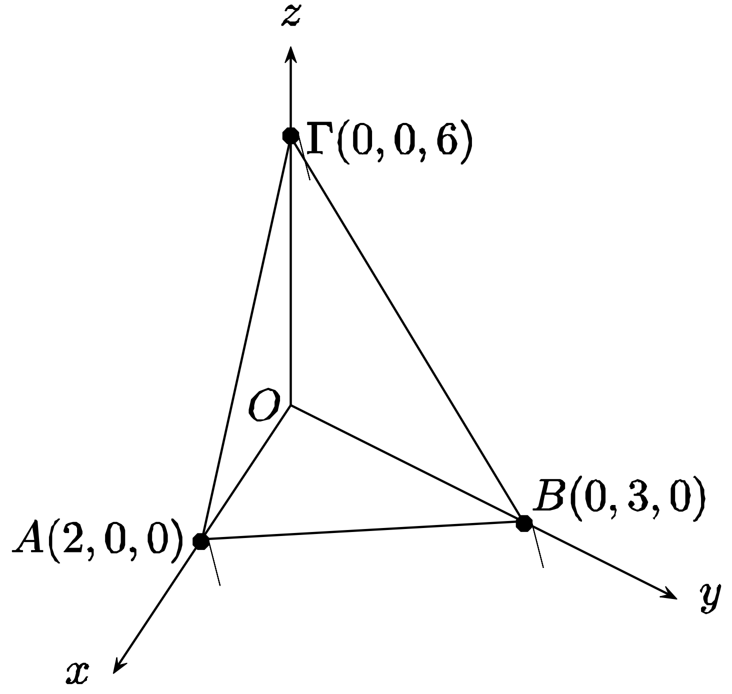
$$C_f=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:(x,y)\in D(f) \text{ και } z=f(x,y)\right\}.$$

Το σύνολο C_f γεωμετρικά παριστάνεται με μια επιφάνεια, όπως φαίνεται στο επόμενο σχήμα.



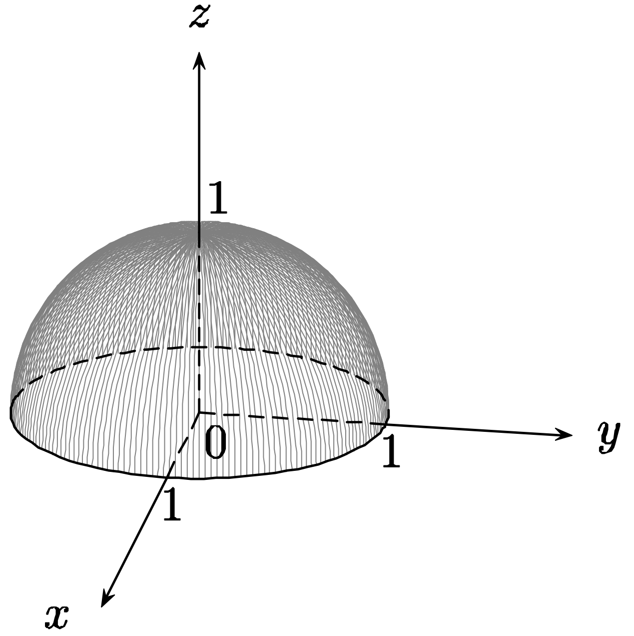
Παραδείγματα

1. Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x,y)=6-3x-2y$ είναι το επίπεδο $3x+2y+z=6$.



2. Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x,y)=\sqrt{1-x^2-y^2}$ είναι το άνω ημισφαίριο της σφαίρας κέντρου O και ακτίνας 1, διότι

$$z=f(x,y)\Leftrightarrow z=\sqrt{1-x^2-y^2}\Leftrightarrow x^2+y^2+z^2=1 \text{ και } z\geq 0$$



Ισοϋψείς καμπύλες

Η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f δύο μεταβλητών δεν είναι πάντα εύκολο να σχεδιασθεί στο χώρο, όταν αυτή δεν αντιστοιχεί σε γνωστή επιφάνεια.

Για το λόγο αυτό, προκειμένου να μελετηθεί η μορφή της, χρησιμοποιούνται επίπεδες καμπύλες στις οποίες η συνάρτηση παίρνει σταθερή τιμή.

Συγκεκριμένα, για κάθε $c \in R(f)$ θεωρούμε το σύνολο

$$A_c = \{(x,y) \in D(f) : f(x,y) = c\}$$

το οποίο ορίζει μια επίπεδη καμπύλη, η οποία συμβολίζεται επίσης με A_c.

Κατόπιν τούτου, το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f διαμερίζεται από μια οικογένεια καμπυλών (A_c), $c \in R(f)$, τα μέλη της οποίας ονομάζονται **ισοϋψείς** ή **ισόβαθμες** ή **ισοσταθμικές καμπύλες**.

Έτσι, αν σχεδιασθεί το $D(f)$ στο επίπεδο Oxyκαι κάθε σημείο του (x,y) ανυψωθεί σε ύψος ίσο με $f(x,y)$, τότε όλα τα σημεία της καμπύλης A_c θα ευρίσκονται στο ίδιο ύψος, πράγμα στο οποίο οι καμπύλες αυτές οφείλουν το όνομά τους.

Παραδείγματα

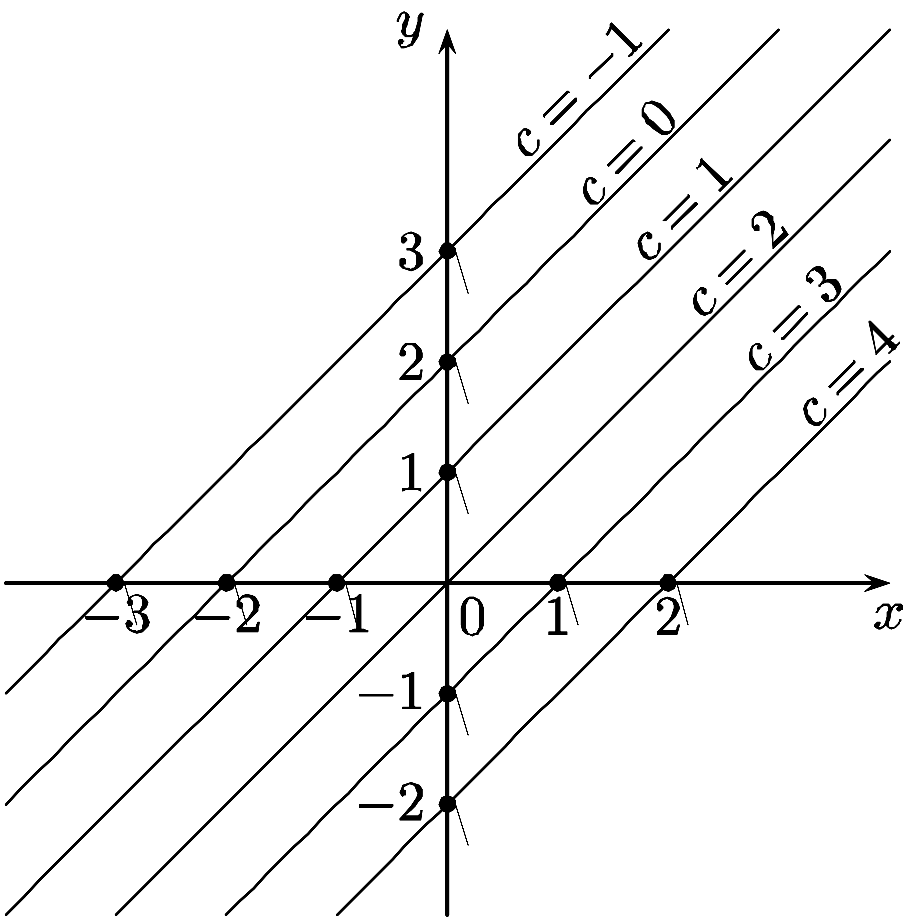
1. Οι ισοϋψείς καμπύλες της συνάρτησης

$$f(x, y) = 2 + x - y / \mathbb{R}^2$$

έχουν εξισώσεις της μορφής

$$x - y + 2 - c = 0, \text{ όπου } c \in \mathbb{R},$$

και αποτελούν τη δέσμη όλων των παράλληλων ευθειών με συντελεστή διεύθυνσης 1.



2. Οι ισοϋψείς καμπύλες της συνάρτησης

$$f(x,y) = 9x^2 + 4y^2 - 18x + 8y - 23$$

έχουν εξισώσεις της μορφής

$$9x^2 + 4y^2 - 18x + 8y - 23 = c, \text{ όπου } c \in \mathbb{R}$$

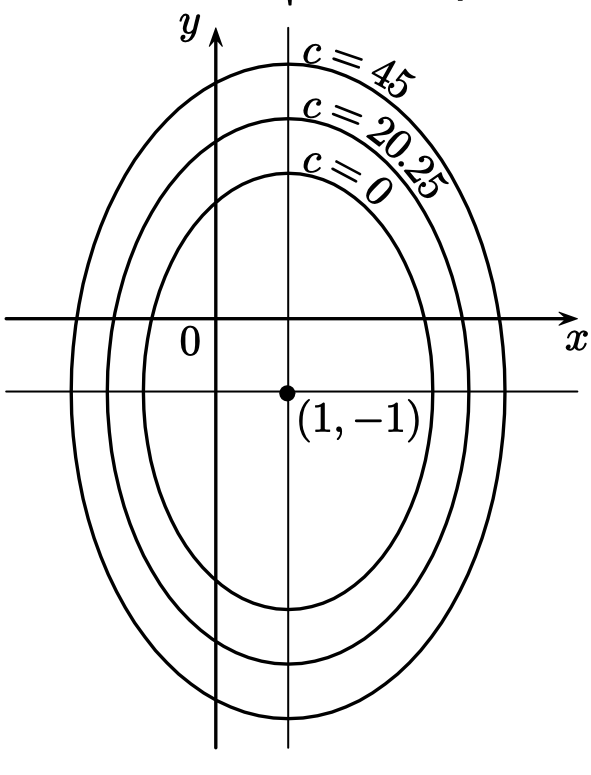
ή, ισοδύναμα,

$$9\left(x^2 - 2x + 1\right) + 4\left(y^2 + 2y + 1\right) = 36 + c \Leftrightarrow \frac{(x-1)^2}{(1/3)^2} + \frac{(y+1)^2}{(1/2)^2} = 36 + c$$

$$\Leftrightarrow \frac{(x-1)^2}{\alpha^2} + \frac{(y+1)^2}{\beta^2} = 1, \text{ όπου } \alpha = \frac{\sqrt{36+c}}{3}, \ \beta = \frac{\sqrt{36+c}}{2},$$

δηλαδή είναι όλες οι κατακόρυφες ελλείψεις (αφού $\beta > \alpha$) κέντρου $(1,-1)$ και εκκεντρότητας $e = \frac{\sqrt{5}}{3}$, αφού

$$e = \sqrt{1 - \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2} = \sqrt{1 - \frac{\frac{36+c}{9}}{\frac{36+c}{4}}} = \frac{\sqrt{5}}{3}.$$



Περιοχές

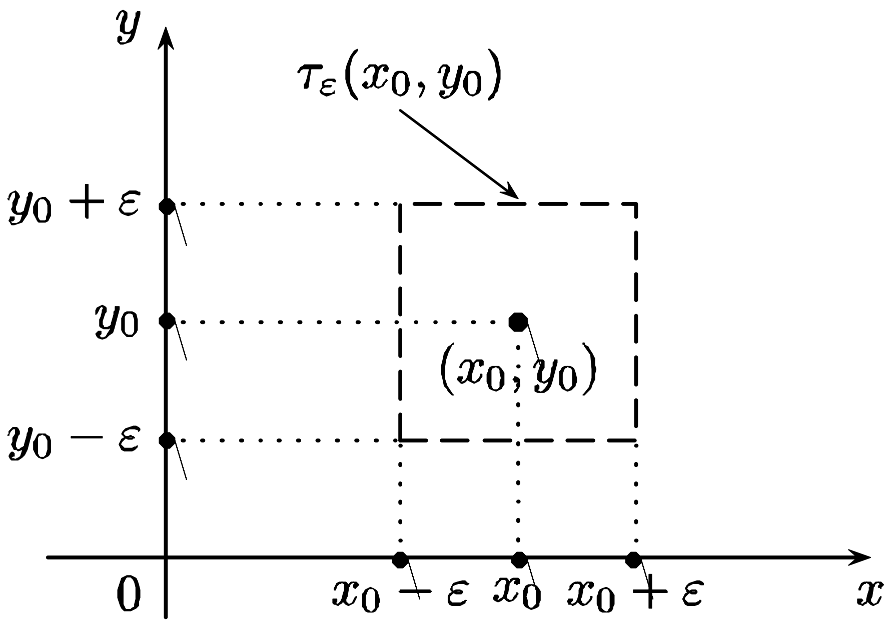
Η έννοια της περιοχής ενός σημείου είναι πολύ βασική στη Μαθηματική Ανάλυση και χρησιμοποιείται για να προσδιορίζονται ιδιότητες που ισχύουν τοπικά.

Γενικά, η έννοια αυτή μπορεί να ορισθεί για σημεία πολύ γενικών χώρων με τη βοήθεια ορισμένων αξιωμάτων.

Στην ειδική περίπτωση όπου το σημείο είναι ένας πραγματικός αριθμός, οι περιοχές του είναι τα διαστήματα της μορφής $\left(x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon\right)$, όπου $\varepsilon>0$.

Αν το σημείο ανήκει στο $\mathbb{R}^2$, τότε χρησιμοποιούνται κυρίως τα παρακάτω δύο είδη περιοχών:

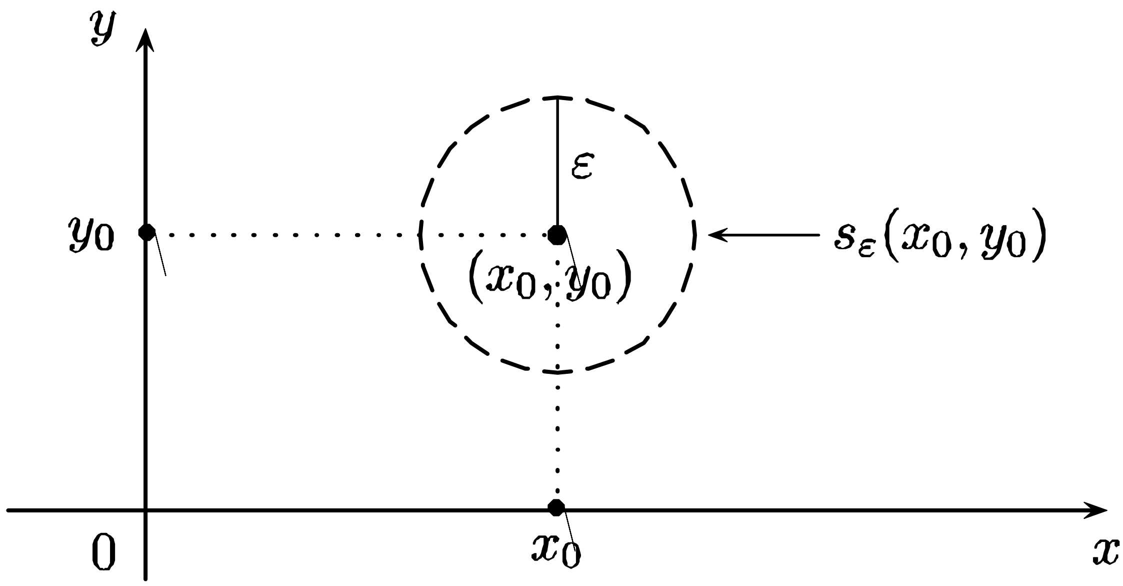
1. Κάθε σύνολο της μορφής
$$\tau_\varepsilon\left(x_0, y_0\right)=\left\{\left(x, y\right)\in\mathbb{R}^2 : x_0-\varepsilon<x<x_0+\varepsilon\right.$$
και $\left.y_0-\varepsilon<y<y_0+\varepsilon\right\}$, όπου $\varepsilon>0$, ονομάζεται **τετραγωνική περιοχή** του σημείου $\left(x_0, y_0\right)$.



2. Κάθε σύνολο της μορφής

$$s_\varepsilon(x_0, y_0) = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 < \varepsilon^2\right\},$$

όπου $\varepsilon > 0$, ονομάζεται **κυκλική περιοχή** του σημείου (x_0, y_0).



Εύκολα αποδεικνύεται ότι κάθε τετραγωνική περιοχή ενός σημείου περιέχει μια τουλάχιστον κυκλική περιοχή του σημείου αυτού και αντίστροφα. Η ιδιότητα αυτή είναι πολύ σημαντική, αφού όλες οι παρακάτω έννοιες μπορούν να θεμελιωθούν ισοδύναμα χρησιμοποιώντας οποιοδήποτε από τα δύο αυτά είδη περιοχών.

Για το λόγο αυτό, σε πολλές περιπτώσεις στα επόμενα θα σημειώνεται με $\pi(x_0, y_0)$ μια περιοχή του σημείου (x_0, y_0) χωρίς να διευκρινίζεται σε ποιο από τα δύο προαναφερθέντα είδη ανήκει.

Σημεία

Οι έννοιες του εσωτερικού και οριακού σημείου ενός υποσυνόλου A του $\mathbb{R}$ και του ακρότατου σημείου μιας συνάρτησης f/A όπου $A \subseteq \mathbb{R}$, επεκτείνονται για $A \subseteq \mathbb{R}^2$.

1. **Εσωτερικά σημεία**

Ένα σημείο (x_0, y_0) ονομάζεται **εσωτερικό σημείο** ενός συνόλου $A \subseteq \mathbb{R}^2$, όταν υπάρχει περιοχή $\pi(x_0, y_0)$ με $\pi(x_0, y_0) \subseteq A$.

Για παράδειγμα, αν A είναι ένα τετράπλευρο (αντ. κύκλος) τότε $(x_0, y_0) \in A$ είναι εσωτερικό σημείο του αν και μόνο αν το (x_0, y_0) δεν ανήκει στην περίμετρο (αντ. περιφέρεια) του A.

Το σύνολο των εσωτερικών σημείων ενός συνόλου A σημειώνεται με A^o.

Ένα σύνολο $A \subseteq \mathbb{R}^2$ ονομάζεται **ανοικτό** όταν κάθε σημείο του είναι εσωτερικό, δηλαδή όταν $A = A^o$.

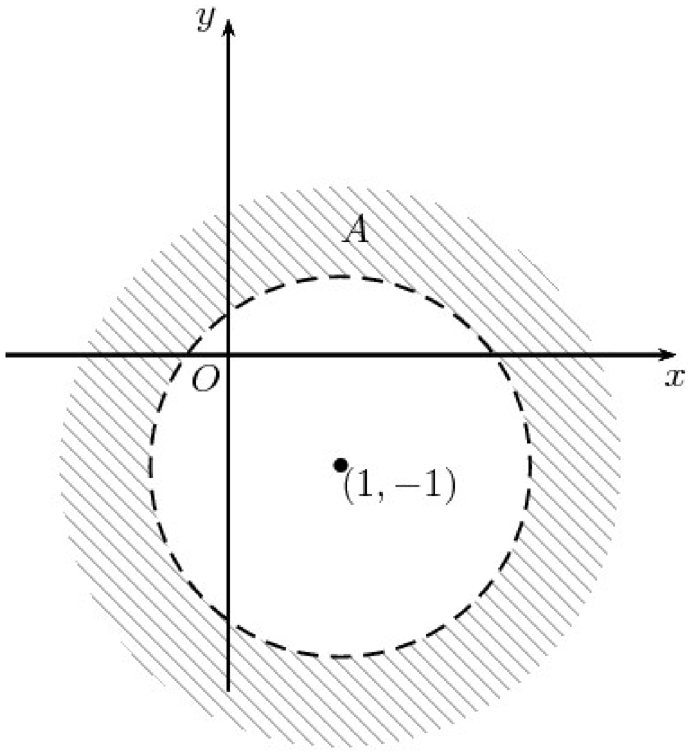
Έτσι, το σύνολο

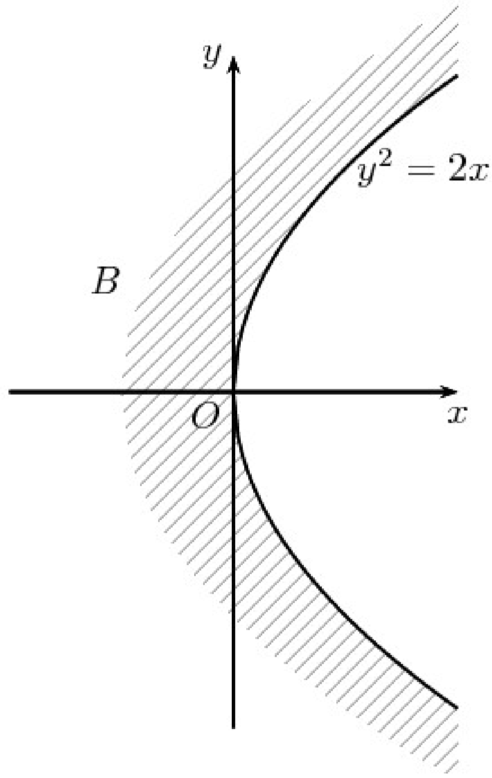
$$A = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x-1)^2 + (y+1)^2 > 3 \right\}$$

είναι ανοικτό, ενώ το σύνολο

$$B = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : y^2 \geq 2x \right\}$$

δεν είναι ανοικτό.





Οι κυριότερες ιδιότητες των ανοικτών συνόλων είναι οι ακόλουθες:

(i) *Τα σύνολα* $\varnothing$, $\mathbb{R}^2$ *είναι ανοικτά σύνολα.*

(ii) *Αν* $\left(\mathrm{A}_i\right)_{i\in I}$ *είναι μια οικογένεια ανοικτών υποσυνόλων του* $\mathbb{R}^2$*, τότε το* $\bigcup_{i\in I} \mathrm{A}_i$ *είναι ανοικτό σύνολο.*

(iii) *Αν* $\left(\mathrm{A}_i\right)_{i\in I}$ *είναι μια πεπερασμένη οικογένεια ανοικτών υποσυνόλων του* $\mathbb{R}^2$*, τότε το σύνολο* $\bigcap_{i\in I} \mathrm{A}_i$ *είναι ανοικτό σύνολο.*

Η ιδιότητα (iii) δεν ισχύει γενικά για άπειρες οικογένειες ανοικτών συνόλων.

Για παράδειγμα, αν $\mathrm{A}_n = s_{1/n}(0,0)$ τότε το A_n είναι ανοικτό για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$, ενώ το $\bigcap_{n=1}^{\infty} \mathrm{A}_n = \{(0,0)\}$ δεν είναι ανοικτό.

Τέλος, ένα σύνολο $\mathrm{B} \subseteq \mathbb{R}^2$ ονομάζεται **κλειστό** όταν το συμπλήρωμά του είναι ανοικτό σύνολο.

Έτσι τα πολύγωνα, οι κύκλοι και οι ελλείψεις είναι κλειστά υποσύνολα του $\mathbb{R}^2$.

Πρέπει να σημειωθεί ότι υπάρχουν σύνολα που δεν είναι ανοικτά ούτε κλειστά, όπως για παράδειγμα το σύνολο $\mathrm{A} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -x < y \le x\right\}$ ενώ, από την άλλη, τα μοναδικά σύνολα που είναι ταυτόχρονα ανοικτά και κλειστά είναι το $\varnothing$ και το $\mathbb{R}^2$.

2. **Οριακά σημεία**

Ένα σημείο $\left(x_0, y_0\right) \in \mathbb{R}^2$ ονομάζεται **οριακό σημείο** ή **σημείο συσσωρεύσεως** του συνόλου $A \subseteq \mathbb{R}^2$, όταν κάθε περιοχή του περιέχει ένα τουλάχιστον σημείο του A διαφορετικό από αυτό, δηλαδή

$$\pi\left(x_0, y_0\right) \cap \left(A \setminus \left\{\left(x_0, y_0\right)\right\}\right) \neq \varnothing$$

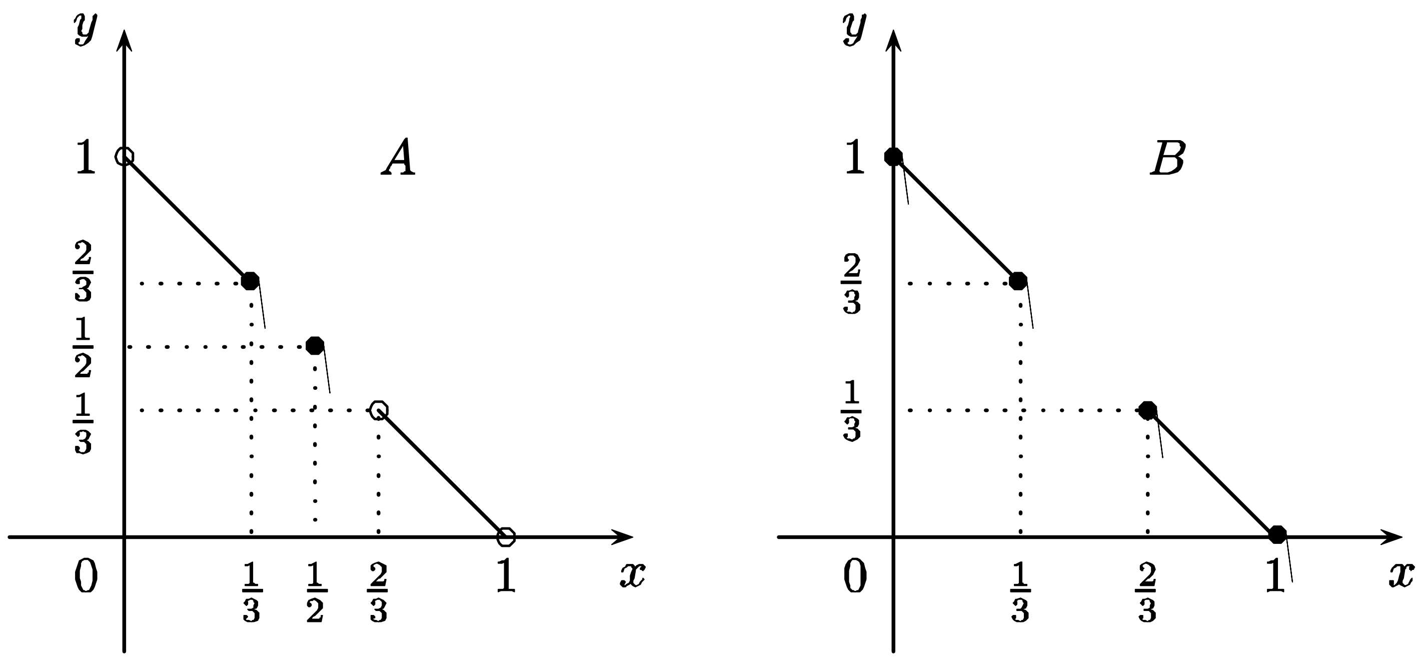
για κάθε περιοχή $\pi\left(x_0, y_0\right)$. Για παράδειγμα, αν

$$A = \left\{\left(x, y\right) \in \mathbb{R}^2 : x \in \left(0, \frac{1}{3}\right] \cup \left(\frac{2}{3}, 1\right) \text{ και } x + y = 1\right\} \cup \left\{\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)\right\}$$

τότε τα οριακά στοιχεία του A είναι τα στοιχεία του συνόλου

$$B = \left\{\left(x, y\right) \in \mathbb{R}^2 : x \in \left[0, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, 1\right] \text{ και } x + y = 1\right\},$$

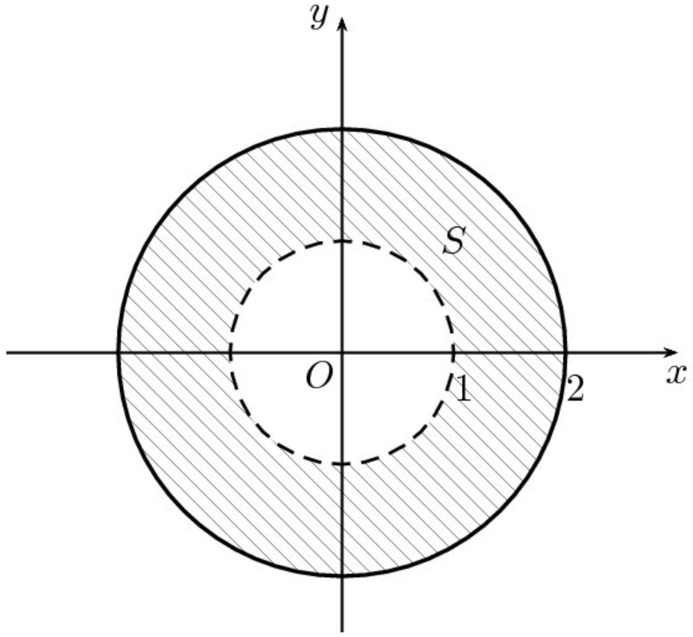
όπως φαίνεται και στο επόμενο σχήμα.



Τα οριακά σημεία ενός συνόλου τα οποία δεν είναι εσωτερικά σημεία του ονομάζονται **συνοριακά**.

Έτσι, τα συνοριακά σημεία του προηγούμενου συνόλου Α είναι όλα τα σημεία του Β (αφού το Α δεν έχει εσωτερικά σημεία).

Για το σύνολο $S = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 < x^2 + y^2 \leq 4 \right\}$,
τα εσωτερικά σημεία ικανοποιούν την $1 < x^2 + y^2 < 4$,
τα οριακά σημεία ικανοποιούν την $1 \leq x^2 + y^2 \leq 4$,
τα συνοριακά σημεία ικανοποιούν την $x^2 + y^2 \in \{1, 4\}$.
Το σύνολο αυτό δεν είναι ανοικτό, ούτε κλειστό.



Τέλος, όπως φαίνεται και στα προηγούμενα παραδείγματα, τα οριακά και τα συνοριακά σημεία ενός συνόλου μπορούν να ανήκουν, ή να μην ανήκουν στο στο σύνολο.

3. **Ακρότατα σημεία**

Έστω μια συνάρτηση f δύο μεταβλητών. Το σημείο $(x_0, y_0) \in D(f)$ ονομάζεται:

(i) **Σημείο ολικού (απόλυτου) μεγίστου** (αντ. **ολικού ελαχίστου**) όταν

$$f(x, y) \le f(x_0, y_0) \text{ (αντ. } f(x, y) \ge f(x_0, y_0))$$

για κάθε $(x, y) \in D(f)$.

(ii) **Σημείο τοπικού (σχετικού) μεγίστου** (αντ. **τοπικού ελαχίστου**) όταν υπάρχει μια περιοχή $\pi(x_0, y_0)$ για την οποία ισχύει

$$f(x, y) \le f(x_0, y_0) \text{ (αντ. } f(x, y) \ge f(x_0, y_0))$$

για κάθε $(x, y) \in D(f) \cap \pi(x_0, y_0)$.

Τα σημεία ολικού (αντ. τοπικού) μεγίστου ή ολικού (αντ. τοπικού) ελαχίστου ονομάζονται και σημεία **ολικών** (αντ. **τοπικών**) **ακρότατων** και συνήθως υπολογίζονται με τη βοήθεια συνθηκών που χρησιμοποιούν μερικές παραγώγους.

2. ΣΥΓΚΛΙΣΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ ΔΥΟ ΜΕΤΑΒΛΗΤΩΝ

Έστω μια συνάρτηση f δύο μεταβλητών, το οριακό σημείο (ξ,η) του $D(f)$ και $\ell\in\mathbb{R}$. Τότε η συνάρτηση f **συγκλίνει** στο ℓ όταν (x,y) τείνει στο (ξ,η) $\left((x,y)\to(\xi,\eta)\right)$, αν για κάθε $\varepsilon>0$ υπάρχει περιοχή $\pi(\xi,\eta)$ τέτοια ώστε

$$(x,y)\in D(f)\cap\left(\pi(\xi,\eta)\setminus\{(\xi,\eta)\}\right)\Rightarrow\left|f(x,y)-\ell\right|<\varepsilon.$$

Τούτο σημειώνεται με $\lim\limits_{(x,y)\to(\xi,n)} f(x,y)=\ell$, και το ℓ ονομάζεται **οριακή τιμή** ή **όριο** της συνάρτησης f για $(x,y)\to(\xi,\eta)$.

Αν στον παραπάνω ορισμό χρησιμοποιηθούν τετραγωνικές και κυκλικές περιοχές, προκύπτουν αντίστοιχα οι επόμενοι ισοδύναμοι ορισμοί του ορίου:

O_1: $\lim\limits_{(x,y)\to(\xi,\eta)} f(x,y)=\ell\Leftrightarrow$ Για κάθε $\varepsilon>0$ υπάρχει $\delta>0$ τέτοιο ώστε για κάθε $(x,y)\in D(f)$ με $0<|x-\xi|<\delta$ και $0<|y-\eta|<\delta$ έπεται ότι $|f(x,y)-\ell|<\varepsilon$.

O_2: $\lim\limits_{(x,y)\to(\xi,\eta)} f(x,y)=\ell\Leftrightarrow$ Για κάθε $\varepsilon>0$ υπάρχει $\delta>0$ τέτοιο ώστε για κάθε $(x,y)\in D(f)$ με $0<(x-\xi)^2+(y-\eta)^2<\delta^2$ έπεται ότι $|f(x,y)-\ell|<\varepsilon$.

Όπως και στις συναρτήσεις μιας μεταβλητής, το όριο των συναρτήσεων μπορεί να ορισθεί ισοδύναμα με τη βοήθεια των ακολουθιών.

Συγκεκριμένα, αποδεικνύεται ότι $\lim\limits_{(x,y)\to(\xi,\eta)} f(x,y)=\ell$ αν και μόνο αν για κάθε ακολουθία $((x_n,y_n))$ στο $D(f)\setminus\{(\xi,\eta)\}$ με $(x_n,y_n)\to(\xi,\eta)$ έπεται ότι $f(x_n,y_n)\to\ell$.

Η παραπάνω ισοδύναμη συνθήκη του ορίου χρησιμοποιείται πολλές φορές για να αποδειχθεί ότι ένα όριο δεν υπάρχει.

Συγκεκριμένα, αν υπάρχουν ακολουθίες $((x_n,y_n))$ και $((z_n,w_n))$ στο $D(f)\setminus\{(\xi,\eta)\}$ με $(x_n,y_n)\to(\xi,\eta)$ και $(z_n,w_n)\to(\xi,\eta)$, ενώ $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n,y_n)\neq\lim\limits_{n\to\infty} f(z_n,w_n)$ τότε, σύμφωνα με τον ακολουθιακό ορισμό της σύγκλισης, το όριο $\lim\limits_{(x,y)\to(\xi,\eta)} f(x,y)$ δεν θα υπάρχει.

Με τη βοήθεια των παραπάνω ορισμών, αποδεικνύονται οι ιδιότητες και οι βασικές προτάσεις της σύγκλισης των συναρτήσεων δύο μεταβλητών, οι οποίες είναι παρόμοιες με τις αντίστοιχες ιδιότητες και προτάσεις των συναρτήσεων μιας μεταβλητής και αποδεικνύονται με ανάλογο τρόπο.

Παράδειγμα

Για τη συνάρτηση $f(x,y)=\cos\frac{1}{xy} \,/\, \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^*$, θεωρούμε τις ακολουθίες

$$(x_n, y_n) = \left(\frac{1}{\pi\sqrt{n}}, \frac{1}{2\sqrt{n}}\right)$$

και

$$(z_n, w_n) = \left(\frac{1}{\pi\sqrt{2n+1}}, \frac{1}{\sqrt{2n+1}}\right),$$

για τις οποίες ισχύει ότι

$$\lim_{n\to\infty}(x_n, y_n) = \lim_{n\to\infty}(z_n, w_n) = (0,0)$$

και

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n, y_n) = \lim_{n\to\infty}\cos\frac{1}{x_n y_n} = \lim_{n\to\infty}\cos(2n\pi) = 1,$$

ενώ

$$\lim_{n\to\infty} f(z_n, w_n) = \lim_{n\to\infty}\cos\frac{1}{z_n w_n} = \lim_{n\to\infty}\cos((2n+1)\pi) = -1.$$

Άρα, δεν υπάρχει το $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$.

Όπως είναι γνωστό, αν υπάρχει το όριο μιας συνάρτησης όταν το x τείνει στο ξ πρέπει να έχει την ίδια τιμή όταν το x τείνει στο ξ από τα αριστερά ή από τα δεξιά.

Στην περίπτωση των συναρτήσεων δύο μεταβλητών, το (x,y) τείνει στο (ξ,η) με άπειρους τρόπους. Έτσι, αν υπάρχει το $\lim\limits_{(x,y)\to(\xi,\eta)} f(x,y)$ τότε πρέπει να έχει την ίδια τιμή ανεξαρτήτως του τρόπου κατά τον οποίο το (x,y) τείνει στο (ξ,η).

Έτσι, για τη συνάρτηση

$$f(x,y)=\frac{2x^2+3y^2}{4x^2+y^2}/\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$$

δεν υπάρχει το όριο $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$, διότι αν (x,y) τείνει στο $(0,0)$ κατά μήκος της ευθείας $y=mx$, όπου $m\in\mathbb{R}$ τότε το όριο είναι ίσο με

$$\lim_{x\to 0} f(x,mx)=\lim_{x\to 0}\frac{2x^2+3m^2x^2}{4x^2+m^2x^2}=\frac{2+3m^2}{4+m^2}$$

οπότε για δύο διαφορετικές ευθείες (δηλαδή διαφορετικές τιμές του m) θα υπάρχουν δύο διαφορετικές οριακές τιμές.

Επαναληπτικά όρια

Δίδεται μια συνάρτηση f δύο μεταβλητών και το οριακό σημείο (ξ,η) του $D(f)$.

Αν θεωρήσουμε της συνάρτηση αυτή ως συνάρτηση του x, και το y σαν μια παράμετρο, και υποθέσουμε ότι υπάρχει το όριο $\lim\limits_{x\to\xi} f(x,y)$ τότε αυτό ορίζει μια συνάρτηση του y. Αν επιπλέον, η συνάρτηση που προέκυψε συγκλίνει όταν $y\to\eta$ τότε ορίζεται το όριο $\lim\limits_{y\to\eta}\lim\limits_{x\to\xi} f(x,y)$.

Ανάλογα ορίζεται και το όριο $\lim\limits_{x\to\xi}\lim\limits_{y\to\eta} f(x,y)$. Τα όρια αυτά ονομάζονται **επαναληπτικά** ή **διαδοχικά όρια** της συνάρτησης f.

Τα επαναληπτικά όρια μιας συνάρτησης δύο μεταβλητών προκύπτουν όταν οι μεταβλητές τείνουν στα ξ, η διαδοχικά, ενώ το όριό της όταν αυτές τείνουν ταυτόχρονα. Για το λόγο αυτό, το $\lim\limits_{(x,y)\to(\xi,\eta)} f(x,y)$ αναφέρεται στη βιβλιογραφία και ως **διπλό όριο** της συνάρτησης.

Τα επαναληπτικά όρια μιας συνάρτησης, αν υπάρχουν, εν γένει δεν είναι ίσα. Εντούτοις, αν υπάρχει το διπλό όριό της τότε αποδεικνύεται ότι τα επαναληπτικά όριά της θα συμπίπτουν με αυτό. Τέλος, είναι δυνατόν τα επαναληπτικά όρια μιας συνάρτησης να υπάρχουν και να είναι ίσα ενώ δεν υπάρχει το διπλό όριό της.

3. ΣΥΝΕΧΕΙΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ ΔΥΟ ΜΕΤΑΒΛΗΤΩΝ

Ορισμός

Μια συνάρτηση f δύο μεταβλητών ονομάζεται **συνεχής** στο σημείο $(\xi,\eta)\in D(f)$ όταν υπάρχει το $\lim\limits_{(x,y)\to(\xi,\eta)} f(x,y)$ και συμπίπτει με την τιμή $f(\xi,\eta)$, δηλαδή

$$\lim_{(x,y)\to(\xi,\eta)} f(x,y)=f(\xi,\eta)$$

Όπως και στις συναρτήσεις μιας μεταβλητής, η συνέχεια μπορεί να ορισθεί ισοδύναμα με τη βοήθεια των ακολουθιών, δηλαδή f συνεχής στο (ξ,η) αν και μόνον αν για κάθε ακολουθία $((x_n,y_n))$ στο $D(f)$ με $(x_n,y_n)\to(\xi,\eta)$ έπεται ότι $f(x_n,y_n)\to f(\xi,\eta)$.

Ιδιότητες

Αν f, g είναι συνεχείς στο (ξ,η) συναρτήσεις δύο μεταβλητών και $\kappa,\lambda\in\mathbb{R}$, τότε και οι συναρτήσεις $\kappa f+\lambda g$, $f\cdot g$ και $\dfrac{f}{g}$ όπου $g(\xi,\eta)\neq 0$, θα είναι συνεχείς στο (ξ,η). Επιπλέον, αν η f είναι συνεχής στο (ξ,η) και η h είναι συνεχής στο $f(\xi,\eta)$ και $R(f)\subseteq D(h)$, τότε και η $h\circ f$ θα είναι συνεχής στο (ξ,η).

Μια συνάρτηση f δύο μεταβλητών ονομάζεται **συνεχής** αν είναι συνεχής σε κάθε σημείο $(\xi, \eta) \in D(f)$.

Οι κυριότερες προτάσεις και θεωρήματα των συνεχών συναρτήσεων μιας μεταβλητής που ορίζονται σε κλειστά διαστήματα, επεκτείνονται για συναρτήσεις δύο μεταβλητών που ορίζονται σε ορθογώνια, δηλαδή σύνολα της μορφής $[a, b] \times [c, d]$.

Συγκεκριμένα, το θεώρημα μέγιστης και ελάχιστης τιμής ισχύει γενικότερα για συναρτήσεις δύο μεταβλητών που ορίζονται σε κλειστά και φραγμένα σύνολα (ένα σύνολο $A \subseteq \mathbb{R}^2$ ονομάζεται **φραγμένο** αν περιέχεται σε ένα ορθογώνιο).

Η ομοιόμορφη συνέχεια των συναρτήσεων που ορίσθηκε για συναρτήσεις μιας μεταβλητής, επεκτείνεται ανάλογα για συναρτήσεις δύο μεταβλητών και αποδεικνύεται ότι κάθε συνεχής συνάρτηση δύο μεταβλητών που ορίζεται σε ένα κλειστό και φραγμένο σύνολο είναι ομοιόμορφα συνεχής.

Ιδιαίτερο ενδιαφέρον παρουσιάζει η επέκταση του θεωρήματος ενδιάμεσων τιμών για συναρτήσεις δύο (ή περισσότερων) μεταβλητών, το οποίο δίδεται παρακάτω.

Αρχικά, θα δοθούν δύο ορισμοί οι οποίοι θα χρησιμοποιηθούν παρακάτω.

Αν $A \subseteq S \subseteq \mathbb{R}^2$ τότε το σύνολο A ονομάζεται **ανοικτό στο S** αν για κάθε $(x, y) \in A$ υπάρχει περιοχή $\pi(x, y)$ με $\pi(x, y) \cap S \subseteq A$.

Προφανώς, A ανοικτό στο $\mathbb{R}^2$ σημαίνει απλά ότι το A είναι ανοικτό. Γενικότερα, αν S ανοικτό τότε A ανοικτό στο S αν και μόνο αν A ανοικτό. Από την άλλη, είναι δυνατόν το σύνολο A να είναι ανοικτό στο S αλλά να μην είναι ανοικτό.

Έτσι, το σύνολο $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x^2 + y^2 < 2\}$ είναι ανοικτό στο σύνολο $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x^2 + y^2\}$, αλλά δεν είναι ανοικτό.

Ένα μη κενό σύνολο $S \subseteq \mathbb{R}^2$ ονομάζεται **συνεκτικό** αν δεν υπάρχουν ανοικτά στο S μη κενά σύνολα A, B με $A \cap B = \varnothing$ και $A \cup B = S$.

Η έννοια της συνεκτικότητας των συνόλων είναι πολύ σημαντική και ορίζεται γενικότερα για σύνολα $S \subseteq \mathbb{R}^n$.

Τα διαστήματα είναι συνεκτικά υποσύνολα του $\mathbb{R}$, ενώ τα ορθογώνια και οι κύκλοι είναι συνεκτικά υποσύνολα του $\mathbb{R}^2$.

Θεώρημα 3.1

Έστω μια συνεχής συνάρτηση f δύο μεταβλητών, ορισμένη σε ένα συνεκτικό υποσύνολο S του $\mathbb{R}^2$ και δύο σημεία (x_1, y_1) και (x_2, y_2) στο S με

$$f(x_1, y_1) \neq f(x_2, y_2).$$

Τότε, για κάθε αριθμό γ που ευρίσκεται μεταξύ των $f(x_1, y_1)$ και $f(x_2, y_2)$, υπάρχει ένα τουλάχιστον σημείο $(\xi, \eta) \in S$ με $f(\xi, \eta) = \gamma$.

Το θεώρημα αυτό αποτελεί μια γενίκευση του θεωρήματος ενδιάμεσων τιμών και ισχύει γενικότερα για συναρτήσεις *n* μεταβλητών.

ΑΣΚΗΣΗ 9

Να αποδειχθεί, με τη βοήθεια του ορισμού της σύγκλισης, ότι

$$\lim_{(x,y)\to(2,1)}\left(x^2-3y\right)=1$$

ΛΥΣΗ

Αν τεθεί $f\left(x,y\right)=x^2-3y/\mathbb{R}^2$ τότε είναι:

$$\begin{aligned}\left|f\left(x,y\right)-1\right|&=\left|x^2-3y-1\right|\\&=\left|\left(x^2-2^2\right)-3\left(y-1\right)\right|\\&\leq\left|x-2\right|\left|x+2\right|+3\left|y-1\right|\end{aligned}$$

οπότε αν $\delta>0$ με $\left|x-2\right|<\delta$ και $\left|y-1\right|<\delta$, προκύπτει ότι

$$\left|x+2\right|\leq\left|x-2\right|+4<\delta+4$$

και

$$\left|f\left(x,y\right)-1\right|<\delta\left(\delta+4\right)+3\delta=\delta^2+7\delta \qquad (1)$$

Επομένως, αν ληφθεί $\delta=\min\left\{1,\frac{\varepsilon}{8}\right\}$ τότε, σύμφωνα με τη σχέση (1), θα είναι

$$\left|f\left(x,y\right)-1\right|<\delta^2+7\delta\leq 8\delta\leq\varepsilon.$$

Άρα $\lim\limits_{(x,y)\to(2,1)}\left(x^3-3y\right)=1.$

ΑΣΚΗΣΗ 10(*)

Να αποδειχθεί, με τη βοήθεια του ακολουθιακού ορισμού της σύγκλισης, ότι δεν υπάρχει το όριο

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y),$$

όταν $f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{x^2}{y}, & \text{αν } x\cdot y\neq 0 \\ y+2, & \text{αν } x=0 \\ \dfrac{\sin x}{x}, & \text{αν } y=0 \text{ και } x\neq 0. \end{cases}$

ΛΥΣΗ

Αν υπήρχε το εν λόγω όριο, θα έπρεπε να ισούται με $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n,y_n)$ για οποιαδήποτε επιλογή της ακολουθίας με $(x_n,y_n)\to(0,0)$.

Τούτο όμως δεν ισχύει, διότι

$$\lim_{n\to\infty} f\left(\frac{1}{n},\frac{1}{n}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{1}{n}\right)^2}{\frac{1}{n}}=0,$$

ενώ

$$\lim_{n\to\infty} f\left(0,\frac{1}{n}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}+2\right)=2.$$

ΑΣΚΗΣΗ 11(*)

Να εξετασθεί αν υπάρχει το όριο

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2-2y^2}{3x^2+y^2}.$$

ΛΥΣΗ

Αν υπήρχε το όριο της συνάρτησης

$$f(x,y)=\frac{x^2-2y^2}{3x^2+y^2} / \mathbb{R}\setminus\{(0,0)\},$$

τότε θα έπρεπε να είχε την ίδια τιμή ανεξαρτήτως του τρόπου κατά τον οποίο το σημείο (x,y) τείνει στο σημείο $(0,0)$.

Τούτο όμως δεν είναι αληθές, καθώς, αν το σημείο (x,y) τείνει στο σημείο $(0,0)$ κατά μήκος της ευθείας $y=mx$, τότε η τιμή του ορίου εξαρτάται από την επιλογή του m (και άρα της ευθείας) όπως φαίνεται στην παρακάτω σχέση:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=\lim_{x\to 0}\frac{x^2-2m^2x^2}{3x^2+m^2x^2}=\frac{1-2m^2}{3+m^2}.$$

Έτσι, δεν υπάρχει το $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2-2y^2}{3x^2+y^2}$.

ΑΣΚΗΣΗ 12

Να ευρεθούν τα όρια:

α) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2+1}-1}$, β) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{y\sin\left(x^2+y^2\right)}{x^2+y^2}$,

γ) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \left(1+x^2y^2\right)^{-\frac{1}{x^2+y^2}}$.

ΛΥΣΗ

α) Επειδή

$$\frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2+1}-1} = \frac{\left(x^2+y^2\right)\left(\sqrt{x^2+y^2+1}+1\right)}{\left(x^2+y^2+1\right)-1}$$
$$= \sqrt{x^2+y^2+1}+1,$$

αν τεθεί $z = x^2+y^2$, τότε θα είναι

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2+1}-1} = \lim_{z\to 0}\sqrt{z+1}+1 = 2.$$

β) Αν τεθεί $z = x^2+y^2$, τότε θα είναι

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{y\sin\left(x^2+y^2\right)}{x^2+y^2} = \left(\lim_{y\to 0} y\right)\left(\lim_{z\to 0}\frac{\sin z}{z}\right) = 0\cdot 1 = 0.$$

γ) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \left(1+x^2y^2\right)^{-\frac{1}{x^2+y^2}}$

Αν τεθεί $f(x,y)=\left(1+x^2y^2\right)^{-\frac{1}{x^2+y^2}}$, τότε θα είναι

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \ln f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \left(\ln\left(1+x^2y^2\right)^{-\frac{1}{x^2+y^2}}\right)$$

$$= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \left(\left(-\frac{1}{x^2+y^2}\right)\ln\left(1+x^2y^2\right)\right)$$

$$= -\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y^2}{x^2+y^2} \cdot \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\ln\left(1+x^2y^2\right)}{x^2y^2} \qquad (1)$$

Αλλά, επειδή $0 \le \frac{x^2y^2}{x^2+y^2} \le x^2+y^2$,

θα είναι

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y^2}{x^2+y^2} = 0 \qquad (2)$$

Επιπλέον, αν τεθεί $z=1+x^2y^2$ τότε είναι

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\ln\left(1+x^2y^2\right)}{x^2y^2} = \lim_{z\to1}\frac{\ln z}{z-1} = 1 \qquad (3)$$

Από τις σχέσεις (1), (2) και (3) έπεται ότι

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \ln f(x,y) = 0$$

Τότε όμως, προκύπτει ότι

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} e^{\ln f(x,y)} = e^0 = 1.$$

ΑΣΚΗΣΗ 14

Να αποδειχθεί ότι

$$\lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0} f\left(x,y\right) \neq \lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0} f\left(x,y\right)$$

όταν $f\left(x,y\right)=\dfrac{x+y^2}{\sin x+y^2+e^x x}$.

ΛΥΣΗ

Ισχύει ότι

$$\lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0} f\left(x,y\right)=\lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0}\frac{x+y^2}{\sin x+y^2+e^x x}\right)$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin x+e^x x}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\dfrac{\sin x}{x}+e^x}$$

$$=\frac{1}{\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}+\lim\limits_{x\to 0}e^x}=\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2}$$

και

$$\lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0} f\left(x,y\right)=\lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0}\frac{x+y^2}{\sin x+y^2+e^x x}\right)=\lim_{y\to 0}\frac{y^2}{y^2}=1.$$

Άρα $\lim\limits_{x\to 0}\lim\limits_{y\to 0} f\left(x,y\right)\neq \lim\limits_{y\to 0}\lim\limits_{x\to 0} f\left(x,y\right)$.

ΑΣΚΗΣΗ 15(Θ)

Αν για μια συνάρτηση $f/\mathbb{R}^2$ υπάρχουν τα $\lim\limits_{(x,y)\to(\xi,\eta)} f(x,y)$, $\lim\limits_{x\to\xi}\lim\limits_{y\to\eta} f(x,y)$, $\lim\limits_{y\to\eta}\lim\limits_{x\to\xi} f(x,y)$, να αποδειχθεί ότι είναι ίσα μεταξύ τους.

ΛΥΣΗ

Θα αποδειχθεί ότι $\lim\limits_{(x,y)\to(\xi,\eta)} f(x,y) = \lim\limits_{x\to\xi}\lim\limits_{y\to\eta} f(x,y)$

Αν τεθεί $\lim\limits_{(x,y)\to(\xi,\eta)} f(x,y) = \ell$ και $\lim\limits_{y\to\eta} f(x,y) = g(x)$, αρκεί να αποδειχθεί ότι $\lim\limits_{x\to\xi} g(x) = \ell$.

Από τον ορισμό της σύγκλισης προκύπτει ότι για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ με

$$0 < |x-\xi| < \delta \text{ και } 0 < |y-\eta| < \delta \Rightarrow |f(x,y)-\ell| < \frac{\varepsilon}{2} \quad (1)$$

και για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta_x > 0$ με

$$0 < |y-\eta| < \delta_x \Rightarrow |f(x,y)-g(x)| < \frac{\varepsilon}{2} \quad (2)$$

Κατόπιν τούτων, αν $x \in \mathbb{R}$ με $0 < |x-\xi| < \delta$, επιλέγεται $y_x \in \mathbb{R}$ με $0 < |y_x - \eta| < \min\{\delta, \delta_x\}$ οπότε, χρησιμοποιώντας τις σχέσεις (1) και (2), προκύπτει οτι

$$|g(x)-\ell| \le |f(x,y_x)-\ell| + |f(x,y_x)-g(x)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Ομοίως αποδεικνύεται ότι

$$\lim_{(x,y)\to(\xi,\eta)} f(x,y) = \lim_{y\to\eta}\lim_{x\to\xi} f(x,y).$$

ΑΣΚΗΣΗ 16

Να αποδειχθεί ότι τα επαναληπτικά όρια της

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^4y^4}{(x+y)^4+x^3y^5}, & \text{αν } (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & \text{αν } (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

είναι ίσα, όταν $x\to 0$ και $y\to 0$.

Υπάρχει το διπλό όριο της f όταν $(x,y)\to(0,0)$;

ΛΥΣΗ

Ισχύει ότι $\lim\limits_{x\to 0}\lim\limits_{y\to 0} f(x,y)=\lim\limits_{x\to 0}\left(\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{x^4y^4}{(x+y)^4+x^3y^5}\right)$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x^4 0^4}{(x+0)^4+x^3\cdot 0^5}=0$$

και $\lim\limits_{y\to 0}\lim\limits_{x\to 0} f(x,y)=\lim\limits_{y\to 0}\left(\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^4y^4}{(x+y)^4+x^3y^5}\right)$

$$=\lim_{y\to 0}\frac{0^4 y^4}{(0+y)^4+0^3\cdot y^5}=0.$$

Επειδή $y=0\Rightarrow f(x,y)=0$

και $x+y=0\Rightarrow f(x,y)=-1,$

έπεται ότι αν το (x,y) τείνει στο $(0,0)$ κατά μήκος της ευθείας $y=0$ το όριο που προκύπτει είναι ίσο με 0, ενώ κατά μήκος της ευθείας $x+y=0$ είναι ίσο με -1.

Άρα δεν υπάρχει το $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$.

ΑΣΚΗΣΗ 17(*)

Να μελετηθούν ως προς τη συνέχεια οι

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

$$g(x)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0).\end{cases}$$

ΛΥΣΗ

Προφανώς και οι δύο είναι συνεχείς σε κάθε σημείο $(x,y)\in\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$, ως ρητές συναρτήσεις των x,y.

Θα εξετασθεί η συνέχεια στο $(0,0)$. Επειδή, $\left|\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}\right|\leq\dfrac{1}{2}\sqrt{x^2+y^2}$, για κάθε $(x,y)\in\mathbb{R}^2\setminus\{0,0\}$ και $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\sqrt{x^2+y^2}=0$, προκύπτει ότι $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)=f(0,0)$, άρα η f συνεχής στο $(0,0)$.

Αντίθετα, η g δεν είναι συνεχής στο $(0,0)$ διότι δεν υπάρχει το διπλό όριό της, καθώς, αν $y=mx$, είναι

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}g(x,y)=\lim_{x\to 0}\frac{x(mx)}{x^2+m^2x^2}=\frac{m}{1+m^2}$$

και επομένως, το όριό της εξαρτάται από τον τρόπο που το (x,y) τείνει στο $(0,0)$.

ΔΙΑΛΕΞΗ 2

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 12:
ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ ΔΥΟ ΜΕΤΑΒΛΗΤΩΝ-ΠΑΡΑΓΩΓΙΣΗ

Περιεχόμενα διάλεξης:

Μερικές παράγωγοι
Διαφορισιμότητα
Διαφορικό

ΜΕΡΙΚΕΣ ΠΑΡΑΓΩΓΟΙ

Έστω μια συνάρτηση f δύο μεταβλητών και $(\xi,\eta)\in D(f)$. Θεωρούμε τις συναρτήσεις f_1, f_2 μιας μεταβλητής με $f_1(x)=f(x,\eta)$ και $f_2(y)= f(\xi,y)$.

Αν η συνάρτηση f_1 (αντ. f_2) είναι παραγωγίσιμη στο σημείο ξ (αντ. η), τότε η παράγωγος $f_1'(\xi)$ (αντ. $f_2'(\eta)$) ονομάζεται **μερική παράγωγος** της f ως προς τη μεταβλητή x (αντ. y) και σημειώνεται με $\dfrac{\partial f}{\partial x}(\xi,\eta)$ ή $f_x'(\xi,\eta)$ (αντ. $\dfrac{\partial f}{\partial y}(\xi,\eta)$ ή $f_y'(\xi,n)$).

Με άλλα λόγια, οι μερικές παράγωγοι της συνάρτησης f στο σημείο (ξ,η)(αν υπάρχουν) είναι

$$\frac{\partial f}{\partial x}(\xi,\eta)=\lim_{h\to 0}\frac{f(\xi+h,\eta)-f(\xi,\eta)}{h}$$

και

$$\frac{\partial f}{\partial y}(\xi,\eta)=\lim_{\kappa\to 0}\frac{f(\xi,\eta+\kappa)-f(\xi,\eta)}{\kappa}.$$

Αν ένα από τα παραπάνω όρια ισούται με $+\infty$ (αντ. $-\infty$), τότε λέγεται ότι η αντίστοιχη μερική παράγωγος **απειρίζεται θετικά** (αντ. **αρνητικά**).

Μια συνάρτηση f δύο μεταβλητών ονομάζεται **μερικώς παραγωγίσιμη** αν υπάρχουν οι μερικές παράγωγοί της σε κάθε σημείο $(\xi,\eta)\in D(f)$. Στην περίπτωση αυτή, οι προκύπτουσες συναρτήσεις ονομάζονται **(πρώτες) μερικές παράγωγοι** της f ως προς τις μεταβλητές x, y και σημειώνονται με

$$\frac{\partial f}{\partial x} \text{ ή } f_x{}', \text{ και } \frac{\partial f}{\partial y} \text{ ή } f_y{}'.$$

Παραδείγματα

1)Οι μερικές παράγωγοι της συνάρτησης

$$f(x,y)=\cos(x-3y)\cdot e^{2xy} / \mathbb{R}^2$$

είναι οι

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\left(2y\cos(x-3y)-\sin(x-3y)\right)\cdot e^{2xy}$$

και

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\left(2x\cos(x-3y)+3\sin(x-3y)\right)\cdot e^{2xy}.$$

2) Οι μερικές παράγωγοι της συνάρτησης

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2+xy}{x-y}, & \text{αν } x\neq y\\ 0, & \text{αν } x=y\end{cases}$$

στο σημείο $(0,0)$ είναι

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(0+h,0)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\dfrac{h^2+h\cdot 0}{h-0}-0}{h}=1$$

και

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=\lim_{\kappa\to 0}\frac{f(0,0+\kappa)-f(0,0)}{\kappa}=\lim_{\kappa\to 0}\frac{\dfrac{0+0\cdot \kappa}{0-\kappa}-0}{\kappa}=0$$

.

Γεωμετρική ερμηνεία

Έστω μια συνάρτηση f δύο μεταβλητών και το σημείο $A(\xi,\eta,\zeta)$ της γραφικής της παράστασης, δηλαδή $\zeta=f(\xi,\eta)$.

Το επίπεδο $y=\eta$, το οποίο διέρχεται από το σημείο A και είναι παράλληλο με το επίπεδο Oxz, τέμνεται με την επιφάνεια $z=f(x,y)$ στην καμπύλη C (βλ. τα δύο επόμενα σχήματα).

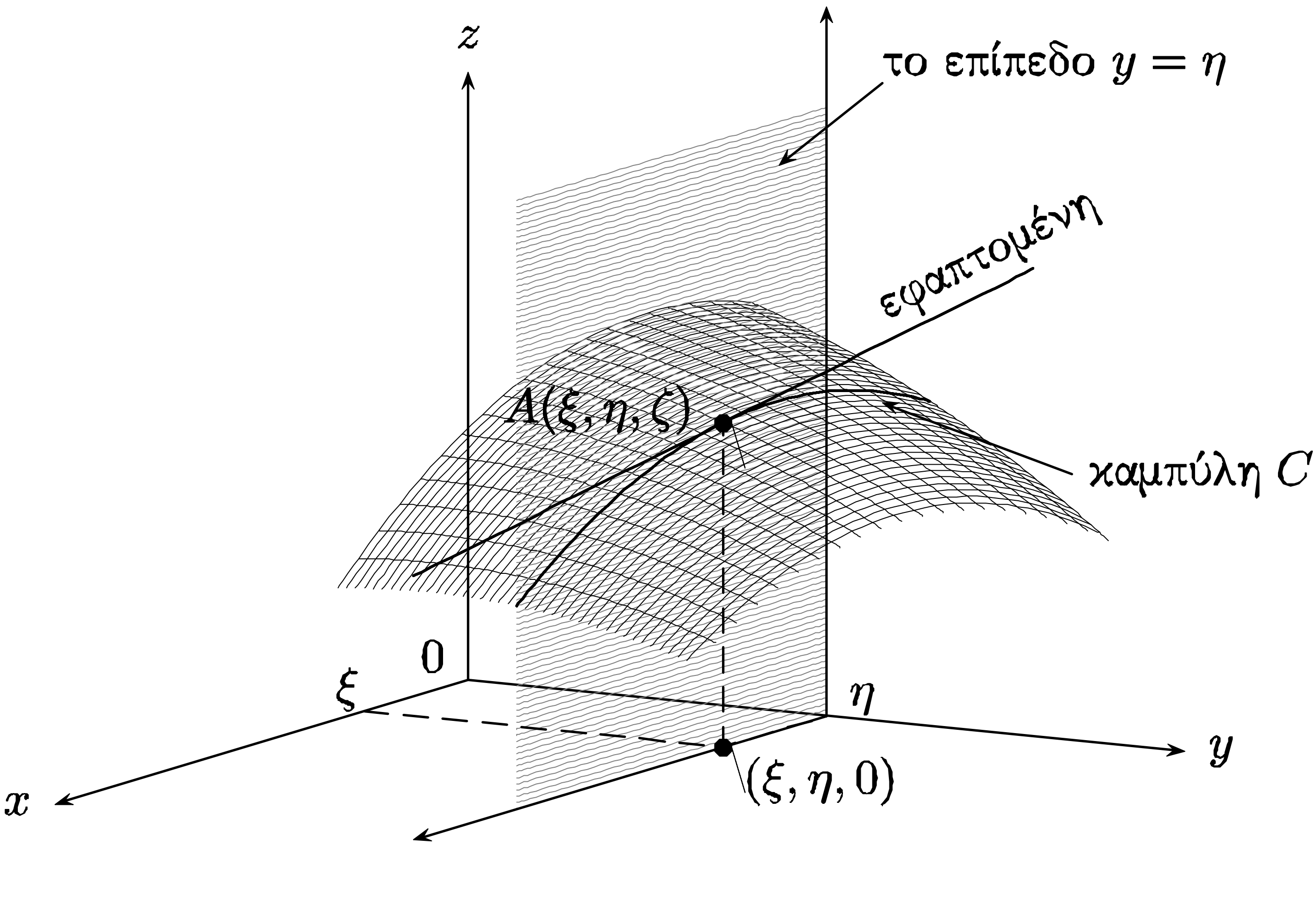
Η καμπύλη αυτή είναι η γραφική παράσταση της συνάρτησης $z=f_1(x)=f(x,\eta)$ στο επίπεδο $y=\eta$.

Διακρίνουμε τις παρακάτω δύο περιπτώσεις:

(i) Αν υποτεθεί ότι υπάρχει η μερική παράγωγος $\frac{\partial f}{\partial x}(\xi,\eta)$ (στο $\mathbb{R}$), τότε ορίζεται ως εφαπτομένη της καμπύλης C στο σημείο A η ευθεία που κείται στο επίπεδο $y=\eta$, διέρχεται από το A και έχει κλίση ίση με $\frac{\partial f}{\partial x}(\xi,\eta)$.

Στην περίπτωση αυτή, η εφαπτομένη ορίζεται από τις εξισώσεις

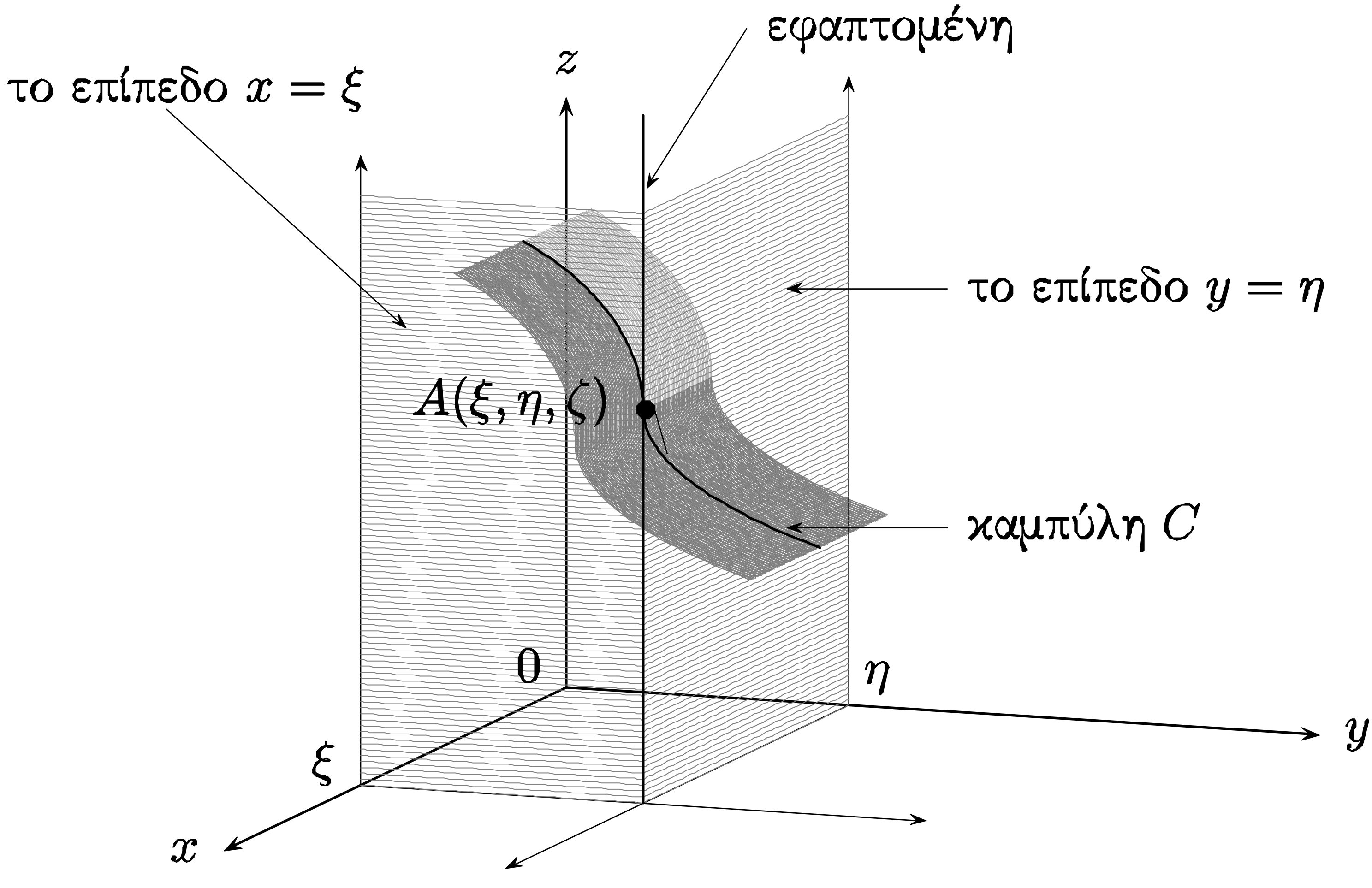
$$z-\zeta=\frac{\partial f}{\partial x}(\xi,\eta)(x-\xi),\ y=\eta.$$



(ii) Αν υποτεθεί ότι η μερική παράγωγος απειρίζεται θετικά ή αρνητικά τότε ορίζεται ως εφαπτομένη της καμπύλης στο σημείο A η ευθεία που διέρχεται από το σημείο αυτό και είναι κάθετη στο επίπεδο Oxy.

Στην περίπτωση αυτή η εφαπτομένη ορίζεται από τις εξισώσεις

$$x = \xi,\ y = \eta.$$



Αντίστοιχη είναι η γεωμετρική ερμηνεία της μερικής παραγώγου $\dfrac{\partial f}{\partial y}(\xi, \eta)$.

Μερικές παράγωγοι ανώτερης τάξης

Έστω η μερικώς παραγωγίσιμη συνάρτηση $f / A \subseteq \mathbb{R}^2$ και έστω ότι οι συναρτήσεις $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} / A$ είναι επίσης μερικώς παραγωγίσιμες. Τότε, οι μερικές παράγωγοι αυτών ονομάζονται **δεύτερες μερικές παράγωγοι** ή **μερικές παράγωγοι δεύτερης τάξης** της συνάρτησης f και σημειώνονται με

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)$ η δεύτερη μερ. παράγωγος ως προς x

$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)$ η δεύτερη μερ. παράγωγος ως προς y

$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)$ και $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)$ οι μεικτές δεύτερες μερικές παράγωγοι ως προς x και y, και ως προς y και x αντίστοιχα.

Για τις μερικές παραγώγους δεύτερης τάξης υπάρχουν και οι αντίστοιχοι συμβολισμοί f''_{xx}, f''_{yy}, f''_{xy} και f''_{yx} οι οποίοι όμως χρησιμοποιούνται σπανιότερα.

Οι μεικτές δεύτερες μερικές παράγωγοι εν γένει δεν είναι ίσες. Εντούτοις, μια ικανή συνθήκη για να είναι αυτές ίσες δίδεται στο επόμενο θεώρημα, γνωστό ως **θεώρημα του Schwarz**.

Θεώρημα 4.1

Αν μιας συνάρτησης f δύο μεταβλητών υπάρχουν οι μερικές παράγωγοι $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ και είναι συνεχείς σε ένα εσωτερικό σημείο (ξ,η) του $D(f)$, τότε ισχύει ότι

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(\xi,\eta)=\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(\xi,\eta).$$

Ανάλογα με τις μερικές παραγώγους δεύτερης τάξης ορίζονται και οι μερικές παράγωγοι n-οστής τάξης.

Γενικά, σημειώνονται με

$\frac{\partial^n f}{\partial x^n}$ η μερική παράγωγος n-οστής τάξης ως προς x,

$\frac{\partial^n f}{\partial y^n}$ η μερική παράγωγος n-οστής τάξης ως προς y,

$\frac{\partial^n f}{\partial x^{\nu_1} \partial y^{\nu_2} \ldots \partial x^{\nu_{\kappa-1}} \partial y^{\nu_\kappa}}$ η μερική μεικτή παράγωγος n-οστής τάξης (όπου $n=\nu_1+\nu_2+\ldots+\nu_\kappa$) με σειρά παραγώγισης από τα δεξιά προς τα αριστερά.

4. ΔΙΑΦΟΡΙΣΙΜΟΤΗΤΑ

Μια συνάρτηση f δύο μεταβλητών ονομάζεται **διαφορίσιμη** σε ένα εσωτερικό σημείο (ξ,η) του $D(f)$, αν υπάρχουν δύο πραγματικοί αριθμοί α, β τέτοιοι ώστε

$$\lim_{(h,\kappa)\to(0,0)} \frac{\left|f(\xi+h,\eta+\kappa)-f(\xi,\eta)-(\alpha h+\beta\kappa)\right|}{\sqrt{h^2+\kappa^2}}=0.$$

Αν εφαρμοσθεί η παραπάνω ισότητα για $\kappa=0$, $h\neq 0$ και $h\to 0$ προκύπτει ότι

$$\lim_{h\to 0}\left|\frac{f(\xi+h,\eta)-f(\xi,\eta)-\alpha h}{h}\right|=0,$$

οπότε

$$\alpha=\lim_{h\to 0}\frac{f(\xi+h,\eta)-f(\xi,\eta)}{h}=\frac{\partial f}{\partial x}(\xi,\eta).$$

Ανάλογα αποδεικνύεται ότι

$$\beta=\frac{\partial f}{\partial y}(\xi,\eta).$$

Παράδειγμα. *Να αποδειχθεί ότι η συνάρτηση* $f(x,y)=3xy^2+2x^2y/\mathbb{R}^2$ *είναι διαφορίσιμη στο* $(2,-1)$.

Λύση: Αρχικά υπολογίζονται οι μερικές παράγωγοι της συνάρτησης στο σημείο $(2,-1)$. Είναι

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=3y^2+4xy, \text{ οπότε } \quad \frac{\partial f}{\partial x}(2,-1)=-5 \text{ και}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=6xy+2x^2, \quad \text{οπότε} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(2,-1)=-4.$$

Κατόπιν τούτων, είναι

$$f(2+h,-1+\kappa)-f(2,-1)-(-5h-4\kappa)=$$

$$=3(2+h)(-1+\kappa)^2+2(2+h)^2(-1+\kappa)+2+5h+4\kappa=$$

$$=2h^2\kappa+3h\kappa^2+2h\kappa-2h^2+6\kappa^2, \text{ οπότε}$$

$$\left|\frac{f(2+h,-1+\kappa)-f(2,-1)-(-5h-4\kappa)}{\sqrt{h^2+\kappa^2}}\right|\le$$

$$\le\frac{2h^2|\kappa|+3|h|\kappa^2+2|h||\kappa|+2h^2+6\kappa^2}{\sqrt{h^2+\kappa^2}}\le$$

$$\le\frac{(h^2+\kappa^2)(2|\kappa|+3|h|+9)}{\sqrt{h^2+\kappa^2}}=\sqrt{h^2+\kappa^2}\,(2|\kappa|+3|h|+9)$$

για κάθε $(h,\kappa)\in\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$.

Επειδή $\lim\limits_{(h,\kappa)\to(0,0)}\sqrt{h^2+\kappa^2}\,(2|\kappa|+3|h|+9)=0$, προκύπτει ότι $\lim\limits_{(h,\kappa)\to(0,0)}\dfrac{f(2+\kappa,-1+\kappa)-f(2,-1)-(-5h-4\kappa)}{\sqrt{h^2+\kappa^2}}=0$

και επομένως, η f είναι διαφορίσιμη στο $(2,-1)$.

Πρόταση 5.1. Κάθε διαφορίσιμη συνάρτηση f δύο μεταβλητών, στο (ξ,η), είναι συνεχής σ' αυτό.

Η ύπαρξη των μερικών παραγώγων μιας συνάρτησης δύο μεταβλητών σε ένα σημείο (ξ,η) δεν συνεπάγεται εν γένει τη συνέχειά της στο σημείο αυτό.

Από την άλλη, η συνέχειά της σε ένα σημείο δεν συνεπάγεται εν γένει την ύπαρξη των μερικών παραγώγων της στο σημείο αυτό.

Κατόπιν τούτων, η διαφορισιμότητα μιας συνάρτησης f δύο μεταβλητών δεν προκύπτει από την ύπαρξη των μερικών παραγώγων της ούτε από τη συνέχειά της. Επιπλέον, είναι δυνατόν μια συνάρτηση f δύο μεταβλητών να είναι συνεχής σε ένα σημείο (ξ,η) και ταυτόχρονα να υπάρχουν οι μερικές παράγωγοι της στο (ξ,η), αλλά να μην είναι διαφορίσιμη στο σημείο αυτό.

Πρόταση 5.2. Έστω f συνάρτηση δύο μεταβλητών και (ξ,η) ένα εσωτερικό σημείο του $D(f)$. Αν μια (τουλάχιστον) από τις μερικές παραγώγους της f υπάρχει σε κάθε σημείο μιας περιοχής του (ξ,η) και είναι συνεχής στο (ξ,η) και η άλλη υπάρχει στο (ξ,η), τότε η f είναι διαφορίσιμη στο (ξ,η).

Πρέπει να τονισθεί ότι η συνέχεια των μερικών παραγώγων μιας συνάρτησης δύο μεταβλητών δεν είναι αναγκαία συνθήκη για τη διαφορισιμότητά της.

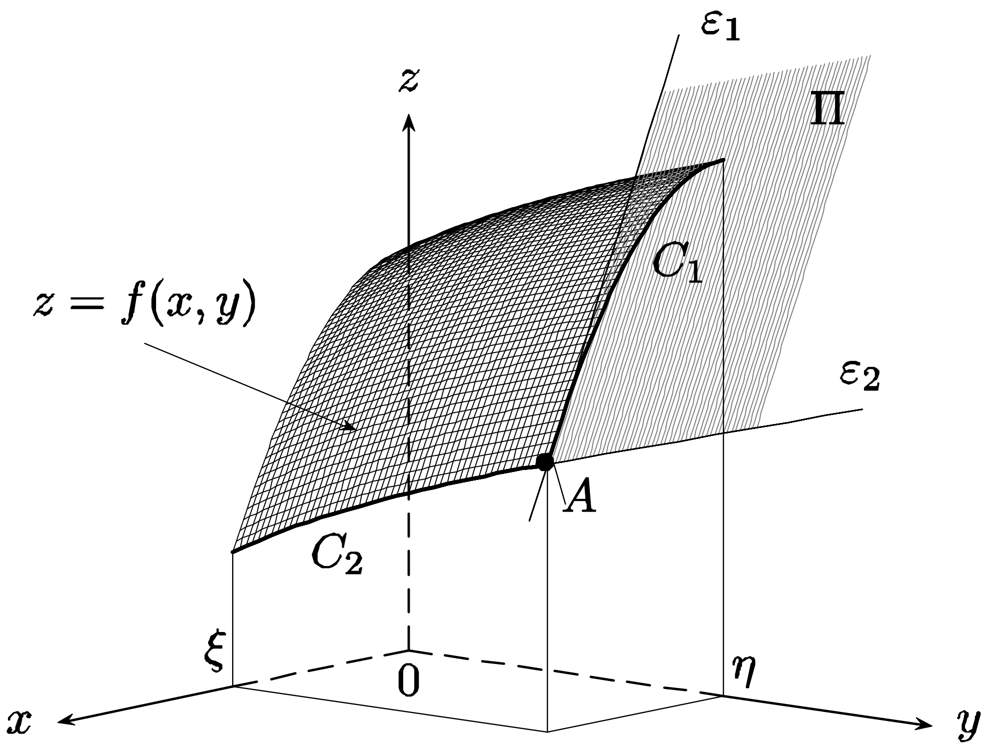
Εφαπτόμενο επίπεδο. Έστω συνάρτηση f και ένα σημείο $A(\xi,\eta,\zeta)$ της γραφικής της παράστασης έτσι ώστε η f να είναι διαφορίσιμη στο (ξ,η). Αν C_1, C_2 είναι οι τομές των επιπέδων $y=\eta$ και $x=\xi$ με την επιφάνεια $z=f(x,y)$, τότε οι ευθείες:

$$(\varepsilon_1):\quad z-\zeta=\frac{\partial f}{\partial x}(\xi,\eta)(x-\xi),\quad y=\eta$$

$$(\varepsilon_2):\quad z-\zeta=\frac{\partial f}{\partial y}(\xi,\eta)(y-\eta),\quad x=\xi$$

είναι οι εφαπτομένες στο σημείο A των καμπυλών C_1, C_2 αντίστοιχα. Το επίπεδο (Π) που ορίζεται από τις ευθείες (ε_1), (ε_2) ονομάζεται **εφαπτόμενο επίπεδο** της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $A(\xi,\eta,\zeta)$. Κατόπιν τούτων, η εξίσωση του (Π) είναι

$$z-\zeta=\frac{\partial f}{\partial x}(\xi,\eta)(x-\xi)+\frac{\partial f}{\partial y}(\xi,\eta)(y-\eta).$$



Παράδειγμα. Να ευρεθεί η εξίσωση του εφαπτόμενου επιπέδου στη σφαίρα κέντρου $O(0,0,0)$ και ακτίνας r, στο σημείο $A(\xi,\eta,\zeta)$, με $\zeta>0$.

Λύση. Επειδή το σημείο A ανήκει στο άνω ημισφαίριο της δοσμένης σφαίρας (αφού $\zeta>0$), θα ισχύει

$$\xi^2+\eta^2+\zeta^2=r^2 \text{ και } \zeta>0 \Leftrightarrow \zeta=\sqrt{r^2-(\xi^2+\eta^2)},$$

δηλαδή το σημείο ανήκει στη γραφική παράσταση της συνάρτησης με τύπο $f(x,y)=\sqrt{r^2-\left(x^2+y^2\right)}$.

Επειδή

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\frac{1}{2}\frac{-2x}{\sqrt{r^2-\left(x^2+y^2\right)}}=-\frac{x}{\sqrt{r^2-\left(x^2+y^2\right)}}$$

για κάθε $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ με $x^2+y^2<r^2$, προκύπτει ότι

$$\frac{\partial f}{\partial x}(\xi,\eta)=-\frac{\xi}{\sqrt{r^2-\left(\xi^2+\eta^2\right)}}=-\frac{\xi}{\zeta}.$$

Ανάλογα, προκύπτει ότι $\frac{\partial f}{\partial y}(\xi,\eta)=-\frac{\eta}{\zeta}$.

Άρα η εξίσωση του ζητούμενου εφαπτόμενου επίπεδου είναι

$$z-\zeta=\left(-\frac{\xi}{\zeta}\right)(x-\xi)+\left(-\frac{\eta}{\zeta}\right)(y-\eta)$$

ή, ισοδύναμα, $\zeta z-\zeta^2=-\xi x+\xi^2-\eta y+\eta^2$

και τελικά, $\xi x+\eta y+\zeta z=r^2$.

ΑΣΚΗΣΗ 30(*)

Να ευρεθεί η εξίσωση του εφαπτόμενου επιπέδου

α) στον κώνο με εξίσωση $8x^2+9y^2-6z^2=0$ στο σημείο $A(3,4,-6)$.

β) στο ελλειπτικό παραβολοειδές με εξίσωση $z=2x^2+3y^2$, στο σημείο $A(-2,1,11)$.

ΛΥΣΗ

α) Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$f(x,y)=-\frac{1}{\sqrt{6}}\sqrt{8x^2+9y^2}\;/\;\mathbb{R}^2$$

στη γραφική παράσταση της οποίας ανήκει το A.

Επειδή $\quad \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)=-\dfrac{1}{\sqrt{6}}\dfrac{8x}{\sqrt{8x^2+9y^2}}$

και $\quad \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)=-\dfrac{1}{\sqrt{6}}\dfrac{9y}{\sqrt{8x^2+9y^2}}$,

για κάθε $(x,y)\in\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$, προκύπτει ότι

$$\frac{\partial f}{\partial x}(3,4)=-\frac{2}{3}\ \text{και}\ \frac{\partial f}{\partial y}(3,4)=-1.$$

Κατόπιν τούτων, η εξίσωση του ζητούμενου εφαπτόμενου επιπέδου είναι

$$z+6=-\frac{2}{3}(x-3)+(-1)(y-4)$$

ή, ισοδύναμα, $\quad 2x+3y+3z=0.$

β) Να ευρεθεί η εξίσωση του εφαπτόμενου επιπέδου στο ελλειπτικό παραβολοειδές με εξίσωση $z = 2x^2 + 3y^2$, στο σημείο $A(-2,1,11)$.

Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$f(x,y) = 2x^2 + 3y^2 / \mathbb{R}^2$$

στη γραφική παράσταση της οποίας ανήκει το $A(-2,1,11)$.

Επειδή

$$\frac{\partial f}{\partial x}(-2,1) = -8 \text{ και } \frac{\partial f}{\partial y}(-2,1) = 6,$$

προκύπτει ότι η εξίσωση του ζητούμενου εφαπτόμενου επιπέδου είναι

$$z - 11 = -8(x+2) + 6(y-1)$$

ή, ισοδύναμα,

$$-8x + 6y - z = 11.$$

5. ΔΙΑΦΟΡΙΚΟ

Υπενθυμίζουμε ότι το διαφορικό μιας συνάρτησης μίας μεταβλητής f στο σημείο ξ ορίζεται ως η γραμμική απεικόνιση

$$\mathbb{R} \ni t \to f'(\xi) \cdot t \in \mathbb{R}$$

και σημειώνεται με $\mathbf{df}(\boldsymbol{\xi})$, δηλαδή

$$\big(df(\xi)\big)(t) = f'(\xi) \cdot t, \qquad \text{για κάθε } t \in \mathbb{R}.$$

Έστω μια συνάρτηση f δύο μεταβλητών, η οποία είναι διαφορίσιμη σε ένα εσωτερικό σημείο (ξ, η) του $D(f)$. Τότε, η γραμμική απεικόνιση

$$\mathbb{R}^2 \ni (h, \kappa) \to \frac{\partial f}{\partial x}(\xi, \eta) \cdot h + \frac{\partial f}{\partial y}(\xi, \eta) \cdot \kappa$$

ονομάζεται (**ολικό**) **διαφορικό** της συνάρτησης f στο σημείο (ξ, η) και σημειώνεται με $df(\xi, \eta)$, δηλαδή

$$\big(df(\xi, \eta)\big)(h, \kappa) = \frac{\partial}{\partial x}(\xi, \eta) \cdot h + \frac{\partial f}{\partial y}(\xi, \eta) \cdot \kappa.$$

Οι γραμμικές απεικονίσεις:

$$\mathbb{R} \ni h \to \frac{\partial f}{\partial x}(\xi, \eta) \cdot h \quad \text{και} \qquad \mathbb{R} \ni \kappa \to \frac{\partial f}{\partial y}(\xi, \eta) \cdot \kappa$$

ονομάζονται **μερικά διαφορικά** της συνάρτησης f στο σημείο (ξ, η) ως προς x και y αντίστοιχα, και σημειώνονται όπως και στις συναρτήσεις μιας μεταβλητής με $\frac{\partial f}{\partial x}(\xi,\eta)dx$ και $\frac{\partial f}{\partial y}(\xi,\eta)dy$ αντίστοιχα.

Έτσι, το ολικό διαφορικό της συνάρτησης f στο σημείο (ξ,η) είναι

$$df(\xi,\eta)=\frac{\partial f}{\partial x}(\xi,\eta)dx+\frac{\partial f}{\partial y}(\xi,\eta)dy$$

Για παράδειγμα, το διαφορικό της συνάρτησης

$$f(x,y)=3x^2y-2xy^2\,/\,\mathbb{R}^2$$

στο σημείο $(-1,1)$ είναι

$$df(-1,1)=\frac{\partial f}{\partial x}(-1,1)dx+\frac{\partial f}{\partial y}(-1,1)dy=-8dx+7dy.$$

Αν μια συνάρτηση f είναι διαφορίσιμη σε κάθε εσωτερικό σημείο του $D(f)$, τότε η απεικόνιση $df\,/\,(D(f))^{o}$ που ορίζεται από τη σχέση

$$df=\frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial y}dy$$

ονομάζεται **διαφορικό** της f.

Γεωμετρική ερμηνεία

Έστω συνάρτηση f δύο μεταβλητών, διαφορίσιμη στο (ξ,η), και $(h,\kappa)\neq(0,0)$ με $(\xi+h,\eta+\kappa)\in D(f)$.

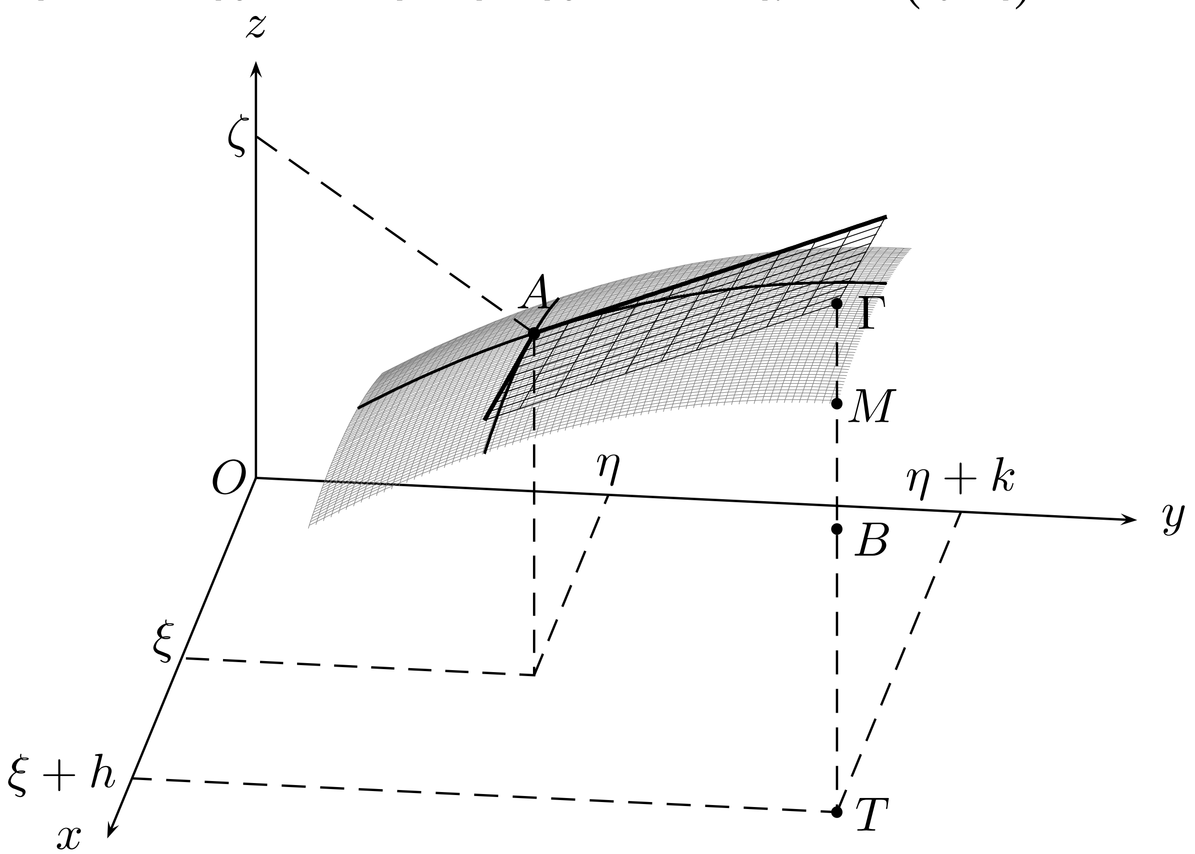
Αν το εφαπτόμενο επίπεδο της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $A(\xi,\eta,\zeta)$ τέμνει την ευθεία: $x=\xi+h$, $y=\eta+\kappa$ στο σημείο Γ τότε η κατηγμένη του Γ $z=(\mathrm{T}\Gamma)$ προκύπτει από την εξίσωση

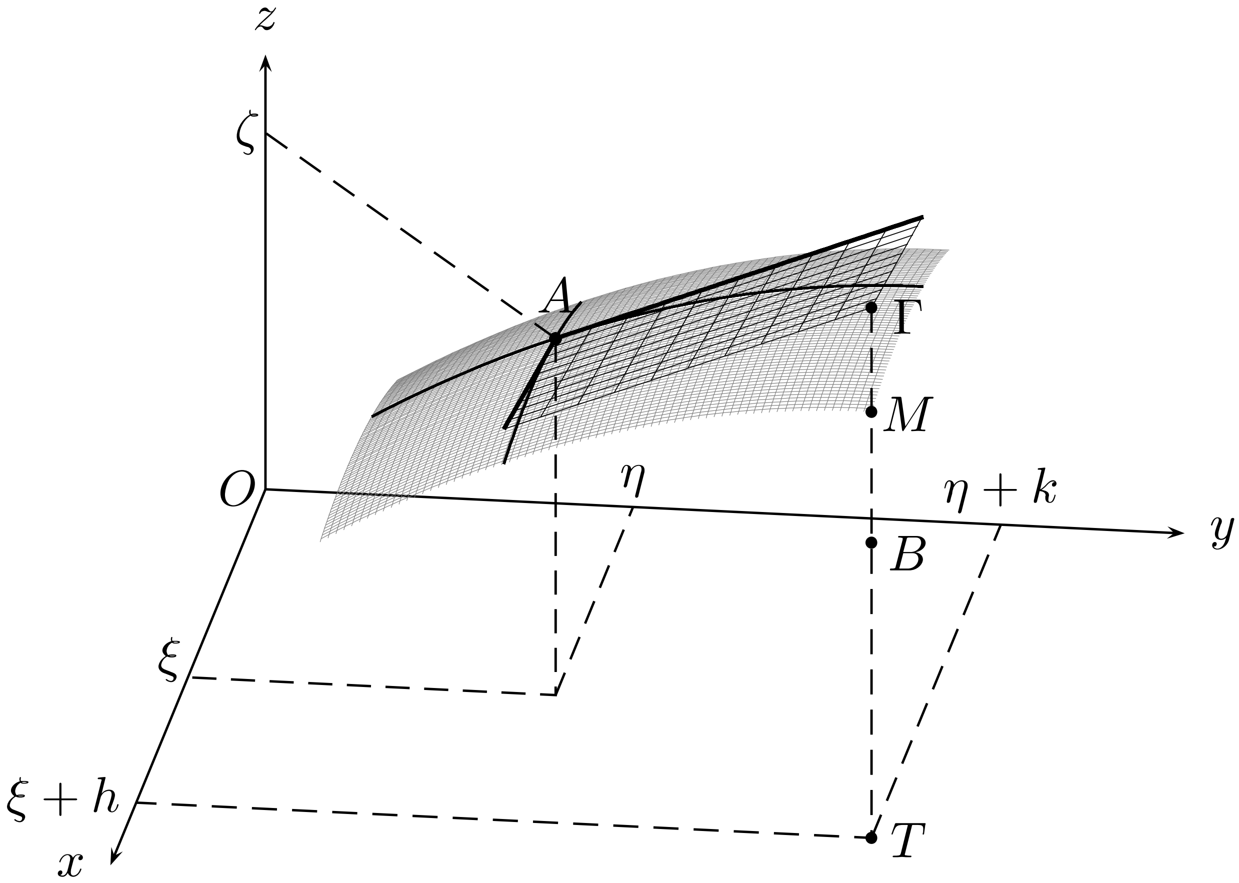
$$z-\zeta=\frac{\partial f}{\partial x}(\xi,\eta)(\xi+h-\xi)+\frac{\partial f}{\partial y}(\xi,\eta)(\eta+\kappa-\eta)$$

ή, ισοδύναμα, $(\mathrm{T}\Gamma)-(\mathrm{TB})=\dfrac{\partial f}{\partial x}(\xi,\eta)h+\dfrac{\partial f}{\partial y}(\xi,\eta)k$

$$(\mathrm{B}\Gamma)=df(\xi,\eta)(h,\kappa).$$

Άρα το μήκος (ΒΓ) εκφράζει γεωμετρικά το διαφορικό της συνάρτησης στο σημείο (ξ,η).





Αν υποτεθεί ότι τα h, κ είναι πολύ μικρά (δηλαδή $(h,\kappa)\to(0,0)$), προκύπτει ότι $(MB)\simeq(B\Gamma)$ οπότε αν τεθούν $\Delta x = h$, $\Delta y = \kappa$ προκύπτει ο τύπος

$$f(\xi+\Delta x,\eta+\Delta y)-f(\xi,\eta)\simeq df(\xi,\eta)(\Delta x,\Delta y) \qquad (1)$$

Ο παραπάνω τύπος επαληθεύεται άμεσα από τον ορισμό της διαφορισιμότητας, και χρησιμοποιείται για την κατά προσέγγιση τιμή ποσοτήτων που εξαρτώνται από δύο μεταβλητές.

ΑΣΚΗΣΗ 32(*)

Να υπολογισθεί, με τη βοήθεια του διαφορικού, μια προσεγγιστική τιμή του αριθμού $\sqrt{(3.98)^2+(3.01)^2}$.

ΛΥΣΗ

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2} \,/\, \mathbb{R}^2$,

η οποία έχει συνεχείς μερικές παραγώγους

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \text{ και } \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

σε κάθε σημείο $(x,y)\in\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$, και διαφορικό

$$df=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}dx+\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}dy.$$

Εφαρμόζοντας τον τύπο

$$f(\xi+\Delta x,\eta+\Delta y)-f(\xi,\eta)\simeq(df)(\xi,\eta)(\Delta x,\Delta y)$$

για $\xi=4$, $\eta=3$, $\Delta x=-0.02$ και $\Delta y=0.01$ προκύπτει ότι

$$f(3.98,3.01)-f(4,3)\simeq(df)(4,3)(-0.02,0.01)$$

$$\sqrt{(3.98)^2+(3.01)^2}-\sqrt{4^2+3^2}\simeq\frac{4}{\sqrt{4^2+3^2}}(-0.02)+\frac{3}{\sqrt{4^2+3^2}}(0.01)$$

και τελικά,

$$\sqrt{\left(3.98^2\right)+(3.01)^2}\simeq 4.99.$$

Όπως είναι γνωστό, κάθε συνάρτηση μιας μεταβλητής της οποίας η παράγωγος μηδενίζεται σ' ένα ανοικτό διάστημα είναι σταθερή. Ανάλογο αποτέλεσμα ισχύει και για συναρτήσεις δύο μεταβλητών.

Πρόταση 6.1

Μια διαφορίσιμη συνάρτηση f δύο μεταβλητών είναι σταθερή σε κάθε εσωτερικό σημείο του $D(f)$ **αν και μόνον αν** $df = 0$**.**

Το διαφορικό δεύτερης τάξης ορίζεται συνήθως για συναρτήσεις δύο μεταβλητών των οποίων οι δεύτερες μερικές παράγωγοι είναι συνεχείς, ως εξής:

$$d^2f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}dx^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}dxdy + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}dy^2.$$

Έτσι, το διαφορικό δεύτερης τάξης της συνάρτησης

$$f(x,y) = 2x^3 - 3x^2y^2 + 3y^3 + 5x^2 + 6y - 4 / \mathbb{R}^2$$

στο σημείο $(-1,1)$ είναι

$$d^2f(-1,1) = -8dx^2 + 12dxdy + 12dy^2.$$

ΑΣΚΗΣΗ 21

Να αποδειχθεί ότι $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) \neq \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0)$, για την

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3 y - x y^3}{x^2 + y^2}, \text{ αν } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, \quad \text{αν} (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

ΛΥΣΗ

Αρχικά, υπολογίζονται οι μερικές παράγωγοι πρώτης τάξης.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{(3x^2 y - y^3)(x^2 + y^2) - 2x(x^3 y - x y^3)}{(x^2 + y^2)^2}$$

$$= \frac{x^4 y + 4x^2 y^3 - y^5}{(x^2 + y^2)^2}$$

για κάθε $(x,y) \neq (0,0)$ και συνεπώς

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} = 0.$$

Ανάλογα ευρίσκεται ότι

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{x^5 - 4x^3 y^2 - x y^4}{(x^2 + y^2)^2}$$

για κάθε $(x,y) \neq (0,0)$ και συνεπώς

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0.$$

Κατόπιν τούτων, είναι

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)(0,0) = \lim_{k\to 0}\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(0,k) - \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)}{k}$$

$$= \lim_{k\to 0}\frac{\frac{0^4\cdot k + 4\cdot 0^2\cdot k^3 - k^5}{\left(0^2+k^2\right)^2} - 0}{k} = \lim_{k\to 0}\frac{-\frac{k^5}{k^4}}{k} = -1$$

και

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)(0,0) = \lim_{h\to 0}\frac{\frac{\partial f}{\partial y}(h,0) - \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{\frac{h^5 - 4h^3\cdot 0^2 - h\cdot 0^4}{\left(h^2+0^2\right)^2} - 0}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\frac{h^5}{h^4}}{h} = 1.$$

Άρα,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) = -1 \neq 1 = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0).$$

ΑΣΚΗΣΗ 24

Να αποδειχθεί ότι υπάρχουν οι μερικές παράγωγοι $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ και $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$, αλλά η f δεν είναι συνεχής στο $(0,0)$, όταν

$$f(x,y)\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2}, \text{ αν } (x,y)\neq(0,0)\\ 0, \quad \text{αν } (x,y)=(0,0).\end{cases}$$

ΛΥΣΗ

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{h\cdot 0}{h^2+0^2}-0}{h}=0.$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=\lim_{k\to 0}\frac{f(0,k)-f(0,0)}{k}=\lim_{k\to 0}\frac{\frac{0\cdot k}{0^2+k^2}-0}{k}=0.$$

Η f δεν είναι συνεχής στο $(0,0)$ διότι δεν υπάρχει το

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{xy}{x^2+y^2},$$

επειδή η τιμή του όταν $(x,y)\to(0,0)$ κατά μήκος μιας ευθείας $y=mx$, $m\in\mathbb{R}$, εξαρτάται από το m, αφού είναι

$$\lim_{x\to 0}f(x,mx)=\lim_{x\to 0}\frac{x\cdot mx}{x^2+m^2x^2}=\frac{m}{1+m^2}.$$

ΑΣΚΗΣΗ 25

Να αποδειχθεί ότι η συνάρτηση

$$f(x,y)=\sqrt{4x^2+9y^2}\ /\mathbb{R}^2$$

είναι συνεχής, αλλά δεν υπάρχουν οι μερικές παραγωγοί της στο σημείο $(0,0)$.

ΛΥΣΗ

Η συνάρτηση f είναι συνεχής, ως σύνθεση των συνεχών συναρτήσεων

$$g(x)=4x^2+9y^2\ /\mathbb{R}^2 \text{ και } k(x)=\sqrt{x}\ /[0,+\infty).$$

Θα αποδειχθεί ότι δεν υπάρχει η μερική παράγωγος $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$.

Πραγματικά, επειδή για $h\neq 0$ είναι

$$\frac{f(0+h,0)-f(0,0)}{h}=\frac{\sqrt{4h^2+9\cdot 0^2}-0}{h}=2\frac{|h|}{h},$$

έπεται ότι

$$\lim_{h\to 0^+}\frac{f(0+h,0)-f(0,0)}{h}=2\neq -2=\lim_{h\to 0^-}\frac{f(0+h,0)-f(0,0)}{h}$$

Άρα δεν υπάρχει η $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$.

Ανάλογα αποδεικνύεται ότι δεν υπάρχει και η $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$.

ΑΣΚΗΣΗ 27

Δίδεται η συνάρτηση

$$f(x,y)\begin{cases}\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}, \text{ αν } (x,y)\neq(0,0)\\ 0, \quad \text{αν } (x,y)=(0,0).\end{cases}$$

Να αποδειχθεί ότι είναι συνεχής και υπάρχουν οι μερικές της παράγωγοι στο σημείο $(0,0)$, αλλά δεν είναι διαφορίσιμη στο σημείο αυτό.

ΛΥΣΗ

Αρχικά, παρατηρείται ότι

$$0\leq\frac{|xy|}{\sqrt{x^2+y^2}}\leq\frac{1}{2}\sqrt{x^2+y^2}, \text{ για κάθε } (x,y)\neq(0,0).$$

Άρα $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{|xy|}{\sqrt{x^2+y^2}}=0$ και η δοσμένη συνάρτηση είναι συνεχής στο $(0,0)$.

Επιπλέον, υπάρχουν οι μερικές παράγωγοί της στο σημείο $(0,0)$ και είναι

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(0+h,0)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\dfrac{h\cdot 0}{\sqrt{h^2+0^2}}-0}{h}=0$$

και

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=\lim_{k\to 0}\frac{f(0,0+k)-f(0,0)}{k}=\lim_{k\to 0}\frac{\dfrac{0\cdot k}{\sqrt{0^2+k^2}}-0}{k}=0$$

Αντίθετα, η δοσμένη συνάρτηση δεν είναι διαφορίσιμη στο σημείο $(0,0)$. Πραγματικά, για $(h,k)\neq(0,0)$ είναι

$$\frac{\left|f(h+0,k+0)-f(0,0)-(0\cdot k+0\cdot h)\right|}{\sqrt{h^2+k^2}}=\frac{\dfrac{|hk|}{\sqrt{h^2+k^2}}}{\sqrt{h^2+k^2}}=\frac{|hk|}{h^2+k^2}$$

και το όριο $\lim\limits_{(h,k)\to(0,0)}\dfrac{hk}{h^2+k^2}$ δεν υπάρχει διότι, αν υπήρχε, θα έπρεπε να ήταν ανεξάρτητο από τον τρόπο κατά τον οποίο το (h,k) τείνει στο $(0,0)$. Τούτο όμως δεν ισχύει καθώς αν $k=mh$, τότε

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)}\frac{|hk|}{h^2+k^2}=\lim_{h\to0}\frac{|hmh|}{h^2+(mh)^2}=\frac{m}{1+m^2}.$$

Άρα η δοσμένη συνάρτηση δεν είναι διαφορίσιμη στο $(0,0)$.

ΑΣΚΗΣΗ 28(Θ)

Να αποδειχθεί η πρόταση 5.2: *Έστω f συνάρτηση δύο μεταβλητών και* (ξ,η) *ένα εσωτερικό σημείο του* $D(f)$. *Αν μια (τουλάχιστον) από τις μερικές παραγώγους της f υπάρχει σε κάθε σημείο μιας περιοχής του* (ξ,η) *και είναι συνεχής στο* (ξ,η) *και η άλλη υπάρχει στο* (ξ,η), *τότε η f είναι διαφορίσιμη στο* (ξ,η).

ΛΥΣΗ

Χωρίς βλάβη της γενικότητας, υποτίθεται ότι ορίζεται η μερική παράγωγος $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ σε μια τετραγωνική περιοχή $\tau_{\delta_1}(\xi,\eta)$, και είναι συνεχής στο σημείο (ξ,η).

Προφανώς, ισχύει η σχέση

$$f(\xi+h,\eta+k)-f(\xi,\eta)$$

$$=\left(f(\xi+h,\eta+k)-f(\xi,\eta+k)\right)+\left(f(\xi,\eta+k)-f(\xi,\eta)\right) \qquad (1)$$

Αν $(h,k)\in\tau_{\delta_1}(\xi,\eta)$ και $h\neq 0$, τότε, επειδή η συνάρτηση $f_1(x)=f(x,\eta+k)$ είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα με άκρα ξ και $\xi+h$, εφαρμόζεται το Θ.Μ.Τ. του Διαφορικού Λογισμού, οπότε υπάρχει $x_1=\xi+\lambda h$, όπου $|\lambda|<1$, τέτοιο ώστε $f_1(\xi+h)-f_1(\xi)=f_1'(x_1)h$

ή, ισοδύναμα,

$$f(\xi+h,\eta+k)-f(\xi,\eta+k)=\frac{\partial f}{\partial x}(\xi+\lambda h,\eta+k)h \quad (2)$$

Η $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ είναι συνεχής στο σημείο (ξ,η), άρα για $\dfrac{\varepsilon}{2}>0$ υπάρχει $0<\delta_2<\delta_1$ τέτοιο ώστε

$$|h|<\delta_2, |k|<\delta_2 \Rightarrow \left|\frac{\partial f}{\partial x}(\xi+h,\eta+k)-\frac{\partial f}{\partial x}(\xi,\eta)\right|<\frac{\varepsilon}{2} \quad (3)$$

Εξάλλου, επειδή υπάρχει η $\dfrac{\partial f}{\partial y}(\xi,\eta)$, προκύπτει ότι για $\dfrac{\varepsilon}{2}>0$ υπάρχει $\delta_3>0$ τέτοιο ώστε

$$|k|<\delta_3 \Rightarrow \left|\frac{f(\xi,\eta+k)-f(\xi,\eta)}{k}-\frac{\partial f}{\partial y}(\xi,\eta)\right|<\frac{\varepsilon}{2} \quad (4)$$

Επομένως, από τις (1), (2), (3) και (4) προκύπτει ότι

$$\frac{\left|f(\xi+h,\eta+k)-f(\xi,\eta)-\frac{\partial f}{\partial x}(\xi,\eta)h-\frac{\partial f}{\partial y}(\xi,\eta)k\right|}{\sqrt{h^2+k^2}}$$

$$\leq \frac{\left|f(\xi+h,\eta+k)-f(\xi,\eta+k)-\frac{\partial f}{\partial x}(\xi,\eta)h\right|}{\sqrt{h^2+k^2}}+\frac{\left|f(\xi,\eta+k)-f(\xi,\eta)-\frac{\partial f}{\partial y}(\xi,\eta)k\right|}{\sqrt{h^2+k^2}}$$

$$=\frac{\left|\frac{\partial f}{\partial x}(\xi+\lambda h,\eta+k)-\frac{\partial f}{\partial x}(\xi,\eta)\right||h|}{\sqrt{h^2+k^2}}+\frac{\left|\frac{f(\xi,\eta+k)-f(\xi,\eta)}{k}-\frac{\partial f}{\partial y}(\xi,\eta)\right||k|}{\sqrt{h^2+k^2}}$$

$$<\frac{\varepsilon}{2}\frac{|h|}{\sqrt{h^2+k^2}}+\frac{\varepsilon}{2}\frac{|k|}{\sqrt{h^2+k^2}}<\varepsilon$$

για κάθε $|h|<\delta$ και $|k|<\delta$, όπου $\delta=\min\{\delta_2,\delta_3\}$.

Τότε όμως, σύμφωνα με τον ορισμό της διαφορισιμότητας, η συνάρτηση f είναι διαφορίσιμη στο σημείο (ξ,η).

ΔΙΑΛΕΞΗ 3

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 12:
ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ ΔΥΟ ΜΕΤΑΒΛΗΤΩΝ-ΠΑΡΑΓΩΓΙΣΗ

Περιεχόμενα διάλεξης:

Παραγώγιση σύνθετων συναρτήσεων
Πεπλεγμένες συναρτήσεις
Ακριβείς διαφορικές εξισώσεις

ΠΑΡΑΓΩΓΙΣΗ ΣΥΝΘΕΤΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

Στην παράγραφο αυτή θα επεκταθεί ο γνωστός κανόνας της αλυσίδας για συναρτήσεις δύο μεταβλητών.

Πρόταση 7.1

Έστω μια συνάρτηση f δύο μεταβλητών, η οποία είναι διαφορίσιμη σε ένα σημείο $(\xi,\eta)\in\left(D(f)\right)^{o}$**, και δύο συναρτήσεις φ, σ δύο μεταβλητών ορισμένες σε ένα σύνολο Γ, με** $R(\varphi)\times R(\sigma)\subseteq D(f)$**.**

Αν υπάρχουν οι μερικές παράγωγοι των συναρτήσεων φ, σ σε ένα σημείο $(x_0,y_0)\in\Gamma^{o}$ **με** $\varphi(x_0,y_0)=\xi$ **και** $\sigma(x_0,y_0)=\eta$**, τότε θα υπάρχουν και οι μερικές παράγωγοι της σύνθετης συνάρτησης**

$$g(x,y)=f\left(\varphi(x,y),\sigma(x,y)\right)/\Gamma$$

στο σημείο (x_0,y_0)**, με**

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x_0,y_0)=\frac{\partial f}{\partial \varphi}(\xi,\eta)\frac{\partial \varphi}{\partial x}(x_0,y_0)+\frac{\partial f}{\partial \sigma}(\xi,\eta)\frac{\partial \sigma}{\partial x}(x_0,y_0)$$

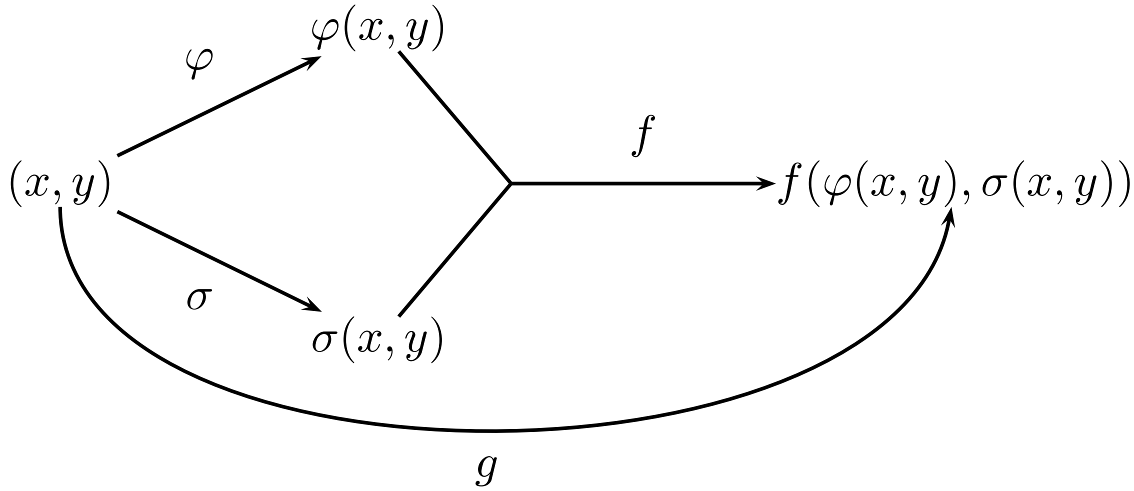
και

$$\frac{\partial g}{\partial y}(x_0,y_0)=\frac{\partial f}{\partial \varphi}(\xi,\eta)\frac{\partial \varphi}{\partial y}(x_0,y_0)+\frac{\partial f}{\partial \sigma}(\xi,\eta)\frac{\partial \sigma}{\partial y}(x_0,y_0).$$

Με άλλα λόγια, για τις συναρτήσεις:

$$\Gamma \ni (x, y) \overset{\varphi}{\mapsto} \varphi(x, y) \in R(\varphi), \quad (x, y) \overset{\sigma}{\mapsto} \sigma(x, y) \in R(\sigma),$$

και $f \,/\, D(f)$, με $R(\varphi) \times R(\sigma) \subseteq D(f)$, ορίζεται η συνάρτηση g σύμφωνα με το παρακάτω σχήμα



για την οποία ισχύουν οι τύποι:

$$\frac{\partial g}{\partial x}\left(x_0, y_0\right) = \frac{\partial f}{\partial \varphi}\left(\xi, \eta\right)\frac{\partial \varphi}{\partial x}\left(x_0, y_0\right) + \frac{\partial f}{\partial \sigma}\left(\xi, \eta\right)\frac{\partial \sigma}{\partial x}\left(x_0, y_0\right)$$

και

$$\frac{\partial g}{\partial y}\left(x_0, y_0\right) = \frac{\partial f}{\partial \varphi}\left(\xi, \eta\right)\frac{\partial \varphi}{\partial y}\left(x_0, y_0\right) + \frac{\partial f}{\partial \sigma}\left(\xi, \eta\right)\frac{\partial \sigma}{\partial y}\left(x_0, y_0\right)$$

Εφαρμογή

Να ευρεθούν οι μερικές παράγωγοι της συνάρτησης $g(x,y)=\cos\left(\left(3xy^2+5y^3\right)\left(x^3-3xy^2\right)\right)/\mathbb{R}^2$.

Λύση

Αν τεθούν, $\varphi(x,y)=3xy^2+5y^3$, $\sigma(x,y)=x^3-3xy^2$ και $f(\varphi,\sigma)=\cos(\varphi\sigma)$, τότε είναι

$$\frac{\partial g}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial \varphi}\cdot\frac{\partial \varphi}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial \sigma}\cdot\frac{\partial \sigma}{\partial x}$$

$$=-\sigma\sin(\varphi\sigma)\left(3y^2\right)-\varphi\sin(\varphi\sigma)\left(3x^2-3y^2\right)$$

$$=-3\sin\left(\left(3xy^2+5y^3\right)\left(x^3-3xy^2\right)\right)\cdot$$

$$\cdot\left(\left(x^3-3xy^2\right)y^2+\left(3xy^2+5y^3\right)\left(x^2-y^2\right)\right)$$

$$=-3\sin\left(\left(3xy^2+5y^3\right)\left(x^3-3xy^2\right)\right)\cdot$$

$$\cdot\left(4x^3y^2+5x^2y^3-6xy^4-5y^5\right)$$

Ανάλογα προκύπτει ότι

$$\frac{\partial g}{\partial y}=-3\sin\left(\left(3xy^2+5y^3\right)\left(x^3-3xy^2\right)\right)\cdot$$

$$\cdot\left(2x^4y+5x^3y^2-12x^2y^3-25xy^4\right)$$

Στην ειδική περίπτωση που οι συναρτήσεις φ, σ είναι συναρτήσεις μιας μεταβλητής, δηλαδή

$\varphi(x,y)=u(x)$ και $\sigma(x,y)=v(x)$, τότε και η συνάρτηση $g(x,y)=f(\varphi(x,y),\sigma(x,y))=f(u(x),v(x))$ είναι μιας μεταβλητής και ο τύπος που δίδει την παράγωγό της προκύπτει στο επόμενο πόρισμα άμεσα από την πρόταση 7.1.

Πόρισμα 7.2

Έστω μια συνάρτηση f δύο μεταβλητών η οποία είναι διαφορίσιμη σε ένα σημείο $(\xi,\eta)\in(D(f))^{o}$, και δύο συναρτήσεις u, v μιας μεταβλητής ορισμένες σε ένα σύνολο Δ με $R(u)\times R(v)\subseteq D(f)$.

Αν οι συναρτήσεις u, v είναι παραγωγίσιμες σε ένα σημείο $x_0\in\Delta^{o}$ τότε θα είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και η συνάρτηση

$$g(x)=f(u(x),v(x))/\Delta,$$

με

$$\frac{dg}{dx}(x_0)=\frac{\partial f}{\partial u}(\xi,\eta)\frac{du}{dx}(x_0)+\frac{\partial f}{\partial v}(\xi,\eta)\frac{dv}{dx}(x_0).$$

Εφαρμογή

Δίδεται μια επιφάνεια $z=f(x,y)$, μια καμπύλη C σε παραμετρική μορφή:

$$x=u(t), y=v(t), z=g(t),$$

όπου $t\in I$, η οποία ευρίσκεται πάνω στην επιφάνεια, και ένα σημείο $A(\xi,\eta,\zeta)$ το οποίο ευρίσκεται πάνω στην καμπύλη. Να αποδειχθεί ότι η εφαπτομένη της καμπύλης C στο σημείο A ανήκει στο εφαπτόμενο επίπεδο της επιφάνειας $z=f(x,y)$ στο σημείο A.

Λύση. Επειδή η καμπύλη C ευρίσκεται πάνω στην επιφάνεια $z=f(x,y)$, θα ισχύει για κάθε $t\in I$ η σχέση

$$g(t)=f\big(u(t),v(t)\big) \qquad (1)$$

Επιπλέον, επειδή το σημείο $A(\xi,\eta,\zeta)$ είναι σημείο της καμπύλης C, θα υπάρχει $t_0\in I$ με

$$\xi=u(t_0), \eta=v(t_0), \zeta=g(t_0).$$

Όπως είναι γνωστό, η εξίσωση της εφαπτομένης της καμπύλης C στο σημείο A δίδεται από τις σχέσεις

$$x-\xi=\frac{du}{dt}(t_0)\cdot(t-t_0), \qquad y-\eta=\frac{dv}{dt}(t_0)\cdot(t-t_0),$$

$$z-\zeta=\frac{dg}{dt}(t_0)\cdot(t-t_0) \qquad (2)$$

Έτσι, παραγωγίζοντας και τα δύο μέλη της σχέσης (1) προκύπτει σύμφωνα με το πόρισμα 7.2 η σχέση

$$\frac{dg}{dt}(t_0)=\frac{\partial f}{\partial x}(\xi,\eta)\frac{du}{dt}(t_0)+\frac{\partial f}{\partial y}(\xi,\eta)\frac{dv}{dy}(t_0) \qquad (3)$$

Οπότε, από τις σχέσεις (2) και (3) προκύπτει ότι

$$z-\zeta=\left(\frac{\partial f}{\partial x}(\xi,\eta)\frac{du}{dt}(t_0)+\frac{\partial f}{\partial y}(\xi,\eta)\frac{dv}{dt}(t_0)\right)\cdot(t-t_0)$$

$$=\frac{\partial f}{\partial x}(\xi,\eta)(x-\xi)+\frac{\partial f}{\partial y}(\xi,\eta)(y-\eta).$$

Κατόπιν τούτων, κάθε σημείο (x,y,z) το οποίο ανήκει στην εφαπτομένη της καμπύλης C στο σημείο A, θα ευρίσκεται στο εφαπτόμενο επίπεδο της επιφάνειας $z=f(x,y)$ στο A.

Το προηγούμενο πόρισμα έχει πολλές εφαρμογές. Κατ' αρχάς, με τη βοήθειά του προκύπτουν ορισμένες ενδιαφέρουσες προτάσεις που αφορούν τις ομογενείς συναρτήσεις και δίδονται στις επόμενες 2 ασκήσεις.

Υπενθυμίζεται ότι μια συνάρτηση δύο μεταβλητών f/A είναι ομογενής τάξης k αν για κάθε $(x,y)\in A$ έπεται ότι $(tx,ty)\in A$ και $f(tx,ty)=t^k f(x,y)$ για κάθε $t\in\mathbb{R}$.

Για παράδειγμα, η συνάρτηση f, με

$$f(x,y)=3x^2y^2-4\frac{y^5}{x}+5x^3y+\frac{2x^6}{y^2},$$

είναι ομογενής τάξης 4.

ΑΣΚΗΣΗ 37

Αν $f/A \subseteq \mathbb{R}^2$ είναι μια ομογενής συνάρτηση βαθμού k, να αποδειχθεί η σχέση

$$x\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)+y\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=kf(x,y),$$

για κάθε $(x,y)\in A^o$, όπου η f είναι διαφορίσιμη και ισχύει $(tx,ty)\in A$, για κάθε $t\in\mathbb{R}$.

ΛΥΣΗ

Θεωρούμε τις συναρτήσεις $u, \upsilon, g/\mathbb{R}$, με

$$u(t)=tx,\ \upsilon(t)=ty \text{ και } g(t)=f(tx,ty).$$

Επειδή η συνάρτηση f είναι ομογενής βαθμού k, προκύπτει ότι $\quad g(t)=t^k f(x,y),$

οπότε $\quad g'(t)=kt^{k-1}f(x,y) \qquad (1)$

Εφαρμόζοντας το πόρισμα 7.2, προκύπτει ότι

$$g'(t)=\frac{\partial f}{\partial u}(u(t),\upsilon(t))\cdot\frac{du}{dt}(t)+\frac{\partial f}{\partial \upsilon}(u(t),\upsilon(t))\cdot\frac{d\upsilon}{dt}(t)$$

ή, ισοδύναμα, $g'(t)=x\frac{\partial f}{\partial u}(tx,ty)+y\frac{\partial f}{\partial \upsilon}(tx,ty). \quad (2)$

Από τις σχέσεις (1) και (2) προκύπτει ότι

$$x\frac{\partial f}{\partial u}(tx,ty)+y\frac{\partial f}{\partial \upsilon}(tx,ty)=kt^{k-1}f(x,y),$$

οπότε, αν τεθεί $t=1$ στην παραπάνω σχέση, προκύπτει ότι $\quad x\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)+y\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=kf(x,y).$

ΑΣΚΗΣΗ 38

Έστω μια διαφορίσιμη συνάρτηση $f / A \subseteq \mathbb{R}^2$, για την οποία ισχύει η σχέση

$$x\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)+y\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=kf(x,y).$$

Αν (t_1,t_2) είναι ένα διάστημα με $0<t_1<1<t_2$ και $(tx,ty)\in A$ για κάθε $t\in(t_1,t_2)$, να αποδειχθεί ότι

$$f(tx,ty)=t^k f(x,y) \quad \text{για κάθε } t\in(t_1,t_2).$$

ΛΥΣΗ

Θεωρούμε τις συναρτήσεις $u,v / \mathbb{R}$ και $g/(t_1,t_2)$ με

$$u(t)=tx,\ v(t)=ty \text{ και } g(t)=f(tx,ty).$$

Εφαρμόζοντας το πόρισμα 7.2, προκύπτει ότι

$$g'(t)=x\frac{\partial f}{\partial u}(tx,ty)+y\frac{\partial f}{\partial v}(tx,ty),$$

οπότε, από την δοσμένη σχέση, προκύπτει ότι

$$tg'(t)=tx\frac{\partial f}{\partial(tx)}(tx,ty)+ty\frac{\partial f}{\partial(ty)}(tx,ty)=kf(tx,ty).$$

Επομένως, $tg'(t)=kg(t)$, για κάθε $t\in(t_1,t_2)$.

Η τελευταία διαφορική εξίσωση είναι χωριζομένων μεταβλητών, οπότε για $g \neq 0$ είναι

$$\int \frac{dg(t)}{g(t)} = \int k \frac{dt}{t},$$

άρα

$$\ln|g(t)| = k \ln t + \ln c_1, \quad c_1 > 0,$$

οπότε

$$g(t) = ct^k, \text{ όπου } c = \pm c_1 \in \mathbb{R}^*.$$

Αν συμπεριληφθεί και η λύση $g = 0$, προκύπτει τελικά, ότι

$$g(t) = ct^k, \text{ όπου } c \in \mathbb{R},$$

για κάθε $t \in (t_1, t_2)$.

Έτσι, για $t = 1$ η παραπάνω ισότητα δίδει

$$f(x, y) = g(1) = c$$

και τελικά, $f(tx, ty) = g(t) = f(x, y)t^k$.

Άλλη μια εφαρμογή του πορίσματος 7.2 είναι το επόμενο θεώρημα, το οποίο αποτελεί γενίκευση του θεωρήματος της μέσης τιμής του Διαφορικού Λογισμού, για συναρτήσεις δύο μεταβλητών.

Θεώρημα 7.3

Έστω μια συνάρτηση f δύο μεταβλητών και δύο σημεία $(\alpha_1,\alpha_2),(\beta_1,\beta_2)\in\mathbb{R}^2$ τέτοια ώστε το ευθύγραμμο τμήμα L με άκρα τα σημεία αυτά να περιέχεται στο $D(f)$, δηλαδή

$$\left((1-t)\alpha_1+t\beta_1,(1-t)\alpha_2+t\beta_2\right)\in D(f)$$

για κάθε $t\in[0,1]$.

Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής σε κάθε σημείο του L και διαφορίσιμη σε κάθε σημείο του $L\setminus\{(\alpha_1,\alpha_2),(\beta_1,\beta_2)\}$, τότε υπάρχει (τουλάχιστον) ένα σημείο $(\xi,\eta)\in L\setminus\{(\alpha_1,\alpha_2),(\beta_1,\beta_2)\}$ τέτοιο ώστε

$$f(\beta_1,\beta_2)-f(\alpha_1,\alpha_2)=\frac{\partial}{\partial x}(\xi,\eta)(\beta_1-\alpha_1)+\frac{\partial}{\partial y}(\xi,\eta)(\beta_2-\alpha_2)$$

.

Εφαρμογή. Να αποδειχθεί ότι η εξίσωση

$$\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi t}{3}\cos\frac{\pi t}{6}-\frac{\pi}{6}\sin\frac{\pi t}{3}\sin\frac{\pi t}{6}=\frac{3}{4}$$

έχει μια τουλάχιστον λύση στο διάστημα (0,1).

Λύση. Θεωρούμε την $f(x,y)=\sin x\cos y/\mathbb{R}^2$, για την οποία ισχύει ότι

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\cos x\cos y \text{ και } \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=-\sin x\sin y$$

για κάθε $(x,y)\in\mathbb{R}^2$.

Επειδή οι μερικές παράγωγοι της f είναι συνεχείς, έπεται ότι η συνάρτηση αυτή είναι διαφορίσιμη και συνεπώς, εφαρμόζοντας το θεώρημα 7.3 για τη συνάρτηση αυτή, για τα σημεία $(0,0)$ και $\left(\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{6}\right)$, προκύπτει ότι υπάρχει $t\in(0,1)$ τέτοιο ώστε

$$f\left(\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{6}\right)-f(0,0)=\frac{\partial f}{\partial x}(\xi,\eta)\left(\frac{\pi}{3}-0\right)+\frac{\partial f}{\partial y}(\xi,\eta)\left(\frac{\pi}{6}-0\right)$$

όπου $\xi=(1-t)\cdot 0+t\frac{\pi}{3}=\frac{\pi t}{3}$ και $\eta=(1-t)0+t\frac{\pi}{6}=\frac{\pi t}{6}$.

Κατόπιν τούτων, προκύπτουν οι ισοδύναμες σχέσεις:

$$\sin\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{6}=\cos\frac{\pi t}{3}\cos\frac{\pi t}{6}\cdot\frac{\pi}{3}-\sin\frac{\pi t}{3}\sin\frac{\pi t}{6}\cdot\frac{\pi}{6}$$

$$\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi t}{3}\cos\frac{\pi t}{6}-\frac{\pi}{6}\sin\frac{\pi t}{3}\sin\frac{\pi t}{6}=\frac{3}{4}.$$

ΠΕΠΛΕΓΜΕΝΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

Δίδεται μια επίπεδη καμπύλη C με εξίσωση $f(x,y)=0$. Ενδιαφέρον παρουσιάζει το πρόβλημα προσδιορισμού μιας συνάρτησης $\varphi / B \subseteq \mathbb{R}$, της οποίας η γραφική παράσταση είναι η καμπύλη C ή, γενικότερα, μέρος αυτής.

Με άλλα λόγια, η συνάρτηση αυτή πρέπει να ικανοποιεί τη συναρτησιακή εξίσωση

$$f\left(x,\varphi(x)\right)=0 \qquad (1)$$

για κάθε $x \in B$.

Υπάρχουν περιπτώσεις όπου η συνάρτηση φ δεν δίδεται με άμεσο τρόπο (δηλαδή το y συναρτήσει του x) αφού η παραπάνω συναρτησιακή εξίσωση δεν είναι πάντα επιλύσιμη ως προς $\varphi(x)$. Τότε λέγεται ότι η συνάρτηση $\varphi(x)$ είναι **πεπλεγμένη**, ή ότι δίδεται σε **πεπλεγμένη μορφή**.

Στις εφαρμογές, τέτοιες συναρτήσεις εμφανίζονται πολύ συχνά ως λύσεις διαφορικών εξισώσεων.

Μια ικανή συνθήκη για την ύπαρξη μιας τέτοιας συνάρτησης φ δίδεται στο ακόλουθο θεώρημα γνωστό ως **θεώρημα πεπλεγμένων συναρτήσεων**.

Θεώρημα 8.1

Αν μια συνάρτηση f δύο μεταβλητών έχει συνεχείς μερικές παραγώγους και υπάρχει εσωτερικό σημείο (ξ,η) **του** $D(f)$ **με** $f(\xi,\eta)=0$ **και** $\dfrac{\partial f}{\partial y}(\xi,\eta)\neq 0$**, τότε υπάρχει μια περιοχή** $\pi(\xi)$ **και μια μοναδική συνάρτηση** $\varphi/\pi(\xi)$ **για την οποία ισχύει ότι:**

(i) $f(x,y)=0$ **αν και μόνον αν** $y=\varphi(x)$**, για κάθε** $x\in\pi(\xi)$**.**

(ii) Υπάρχει η παράγωγος της συνάρτησης φ στο σημείο ξ, με

$$\varphi'(\xi)=-\frac{\dfrac{\partial f}{\partial x}(\xi,\eta)}{\dfrac{\partial f}{\partial y}(\xi,\eta)}.$$

Παράδειγμα

Για την συνάρτηση

$$f(x,y)=y^4-3y^3x^2+y^2x+3y-4x-4/\mathbb{R}^2,$$

οι μερικές παράγωγοι

$$\frac{\partial f}{\partial x}=-6y^3x+y^2-4,$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}=4y^3-9y^2x^2+2yx+3$$

είναι συνεχείς και υπάρχει το σημείο $(-1,3)\in\mathbb{R}^2$ με

$$f(-1,3)=0,\qquad \frac{\partial f}{\partial y}(-1,3)=24\neq 0.$$

Συνεπώς, θα υπάρχει μοναδική συνάρτηση φ ορισμένη σε μια περιοχή $\pi(-1)$, με $f(x,\varphi(x))=0$ για κάθε $x\in\pi(-1)$ και

$$\varphi'(-1)=-\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(-1,3)}{\frac{\partial f}{\partial y}(-1,3)}=-\frac{167}{24}.$$

Πρέπει να σημειωθεί ότι το θεώρημα πεπλεγμένων συναρτήσεων χρησιμοποιείται για την εύρεση της παραγώγου συναρτήσεων που δίδονται σε πεπλεγμένη μορφή.

Εφαρμογή. Να ευρεθεί η παράγωγος $\frac{dy}{dx}$ όταν

$$x^4y + xy^4 - 3x^2y^2 = 10.$$

Λύση. Αν τεθεί

$$f(x,y) = x^4y + xy^4 - 3x^2y^2 - 10 / \mathbb{R}^2$$

τότε, σύμφωνα με το θεώρημα πεπλεγμένων συναρτήσεων, για $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ με $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \neq 0$ θα ισχύει η σχέση

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial y}} = -\frac{4x^3y + y^4 - 6xy^2}{x^4 + 4y^3x - 6x^2y} = \frac{y}{x}\frac{6xy - 4x^3 - y^3}{x^3 + 4y^3 - 6xy}.$$

ΑΚΡΙΒΗ ΔΙΑΦΟΡΙΚΑ

Το άθροισμα $u(x,y)dx+\upsilon(x,y)dy$, με $u,\upsilon/A\subseteq\mathbb{R}^2$ ονομάζεται **ακριβές διαφορικό** όταν υπάρχει διαφορίσιμη συνάρτηση f/A με

$$df=u(x,y)dx+\upsilon(x,y)dy$$

ή, ισοδύναμα, $\dfrac{\partial f}{\partial x}=u$ και $\dfrac{\partial f}{\partial y}=\upsilon$,

δεδομένου ότι $df=\dfrac{\partial f}{\partial x}dx+\dfrac{\partial f}{\partial y}dy$.

Παράδειγμα.

Το άθροισμα $\left(6xy^3-4y\right)dx+\left(9x^2y^2-4x\right)dy$ είναι ακριβές διαφορικό, διότι αν $f(x,y)=3x^2y^3-4xy/\mathbb{R}^2$ τότε ισχύει ότι $\dfrac{\partial f}{\partial x}=6xy^3-4y$ και $\dfrac{\partial f}{\partial y}=9x^2y^2-4x$.

Στην επόμενη πρόταση δίδεται μια ικανή και αναγκαία συνθήκη για να είναι ένα άθροισμα ακριβές.

Πρόταση 9.1

Για δύο συναρτήσεις $u,\upsilon/A\subseteq\mathbb{R}^2$ **με συνεχείς μερικές παραγώγους** $\dfrac{\partial u}{\partial y}$ **και** $\dfrac{\partial \upsilon}{\partial x}$**, το άθροισμα**

$$u(x,y)dx+\upsilon(x,y)dy$$

είναι ακριβές αν και μόνο αν $\dfrac{\partial u}{\partial y}=\dfrac{\partial \upsilon}{\partial x}$**.**

Εφαρμογή. Να αποδειχθεί ότι το άθροισμα

$$\left(x+\sin y\right)dx+\left(x\cos y-2y\right)dy \text{ είναι ακριβές,}$$

και να ευρεθεί μια διαφορίσιμη συνάρτηση $f/\mathbb{R}^2$ με

$$df=\left(x+\sin y\right)dx+\left(x\cos y-2y\right)dy$$

Λύση

Αν τεθούν $u\left(x,y\right)=x+\sin y$ και $\upsilon\left(x,y\right)=x\cos y-2y$ τότε ισχύει $\dfrac{\partial u}{\partial y}=\cos y=\dfrac{\partial \upsilon}{\partial x}$ οπότε, σύμφωνα με την πρόταση 9.1, θα υπάρχει διαφορίσιμη συνάρτηση f με

$$\frac{\partial f}{\partial x}=x+\sin y \quad (1), \qquad \frac{\partial f}{\partial y}=x\cos y-2y \quad (2)$$

Κατόπιν τούτων, ολοκληρώνοντας και τα δύο μέλη της σχέσης (1) ως προς x προκύπτει ότι

$$f\left(x,y\right)=\frac{x^2}{2}+x\sin y+c\left(y\right) \qquad (3)$$

όπου $c\left(y\right)$είναι η σταθερά της ολοκλήρωσης, η οποία θα είναι μια συνάρτηση του y. Στη συνέχεια, παραγωγίζοντας τα δύο μέλη της (3) ως προς y προκύπτει ότι

$$\frac{\partial f}{\partial y}=x\cos y+c'\left(y\right) \qquad (4)$$

οπότε από τις (2) και (4) θα είναι $c'\left(y\right)=-2y$ και τελικά $c\left(y\right)=\ -y^2+\kappa$, όπου $\kappa\in\mathbb{R}$. Άρα κάθε συνάρτηση f της μορφής $f\left(x,y\right)=\dfrac{x^2}{2}+x\sin y-y^2+\kappa$ όπου $\kappa\in\mathbb{R}$, είναι λύση του προβλήματος.

Ακριβής διαφορική εξίσωση

Κάθε διαφορική εξίσωση της μορφής

$$u(x,y)dx + \upsilon(x,y)dy = 0 \qquad (1)$$

της οποίας το πρώτο μέλος είναι ένα ακριβές διαφορικό ονομάζεται **ακριβής** ή **πλήρης**.

Για να ευρεθεί η γενική λύση της διαφορικής εξίσωσης (1), αρκεί να ευρεθεί μια διαφορίσιμη συνάρτηση f με

$$df = u(x,y)dx + \upsilon(x,y)dy.$$

Τότε η εξίσωση (1) γράφεται ισοδύναμα

$$df = 0 \Leftrightarrow f(x,y) = c$$

και η λύση της δίδεται στην παραπάνω πεπλεγμένη μορφή $f(x,y) = c$.

Παράδειγμα

Για τη διαφορική εξίσωση

$$(x\sin y)dx + (x\cos y - 2y)dy = 0$$

ευρίσκεται η συνάρτηση $f(x,y) = \frac{x^2}{2} + x\sin y - y^2$

για την οποία ισχύει

$$df = (x + \sin y)dx + (x\cos y - 2y)dy.$$

Συνεπώς, η αρχική διαφορική εξίσωση δίδει ισοδύναμα

$$df = 0 \Leftrightarrow \frac{x^2}{2} + x\sin y - y^2 = c,\ \text{όπου}\ c \in \mathbb{R}.$$

Διαφορικές εξισώσεις που ανάγονται σε ακριβείς

Υπάρχουν περιπτώσεις διαφορικών εξισώσεων της μορφής

$$u(x,y)dx + \upsilon(x,y)dy = 0$$

οι οποίες αν και δεν είναι ακριβείς, ανάγονται σε ακριβείς διαφορικές εξισώσεις.

Συγκεκριμένα, επιλέγεται κατάλληλη θετική συνάρτηση $I(x,y)$, η οποία ονομάζεται **ολοκληρωτικός παράγοντας**, ώστε η ισοδύναμη εξίσωση

$$I(x,y)u(x,y)dx + I(x,y)\upsilon(x,y)dy = 0$$

να είναι ακριβής.

ΑΣΚΗΣΗ 48(*)

Δίδεται η διαφορική εξίσωση
$y^2(x-3y)dx+(1-3y^2x)dy=0$.

α) Να αποδειχθεί ότι η εξίσωση αυτή δεν είναι ακριβής.

β) Να αναχθεί η δοσμένη διαφορική εξίσωση σε ακριβή, με τη βοήθεια του ολοκληρωτικού παράγοντα $I(x,y)=y^{-2}$.

γ) Να ευρεθεί η γενική λύση της.

ΛΥΣΗ

α) Επειδή

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(y^2(x-3y)\right)=2xy-9y^2\neq -3y^2=\frac{\partial}{\partial x}\left(1-3y^2x\right),$$

προκύπτει ότι η διαφορική εξίσωση δεν είναι ακριβής.

β) Αν υποτεθεί ότι $y\neq 0$, και πολλαπλασιάσουμε και τα δύο μέλη της δοσμένης διαφορικής εξίσωσης με y^{-2}, προκύπτει η διαφορική εξίσωση

$$(x-3y)dx+(y^{-2}-3x)dy=0 \qquad (1)$$

Αν τεθεί $u(x,y)=x-3y$ και $\upsilon(x,y)=y^{-2}-3x$, τότε θα είναι

$$\frac{\partial u}{\partial y}=-3=\frac{\partial \upsilon}{\partial x}$$

και επομένως, η διαφορική εξίσωση (1) είναι ακριβής.

γ) Επειδή η διαφορική εξίσωση (1) είναι ακριβής, θα υπάρχει μια διαφορίσιμη συνάρτηση $f/\mathbb{R}^2$ για την οποία ισχύουν

$$\frac{\partial f}{\partial x} = x - 3y \qquad \text{και} \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = y^{-2} - 3x.$$

Ολοκληρώνοντας ως προς x και τα δύο μέλη της πρώτης από τις παραπάνω σχέσεις, προκύπτει ότι

$$f(x,y) = \frac{x^2}{2} - 3xy + c(y)$$

όπου $c(y)$ είναι η σταθερά ολοκλήρωσης.

Τότε, θα είναι $$y^{-2} - 3x = \frac{\partial f}{\partial y} = -3x + c'(y)$$

και επομένως, $$c'(y) = y^{-2} \Leftrightarrow c(y) = -\frac{1}{y} + k$$

για κάποιο $k \in \mathbb{R}$.

Άρα $f(x,y) = \dfrac{x^2}{2} - 3xy - \dfrac{1}{y} + k$, και η γενική λύση της (1) δίδεται σε πεπλεγμένη μορφή από τη σχέση

$$\frac{x^2}{2} - 3xy - \frac{1}{y} = c, \qquad \text{όπου } c \in \mathbb{R}.$$

Τέλος, η γενική λύση της δοσμένης διαφορικής εξίσωσης αποτελείται από την παραπάνω γενική λύση της (1), καθώς και από τη λύση $y = 0$, που εξαιρέθηκε λόγω του περιορισμού $y \neq 0$ στο β).

ΑΣΚΗΣΗ 40

Να αποδειχθεί, με τη βοήθεια του Θεωρήματος 7.3, ότι η εξίσωση $\sqrt{2}(1-3t)\left(1-2t+3t^2\right)^{-3/2}=1-\sqrt{2}$ έχει τουλάχιστον μια λύση στο διάστημα $(0,1)$.

ΛΥΣΗ

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x,y)=\left(1-2xy+x^2\right)^{-1/2}/A$, όπου $A=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 1-2xy+x^2>0\right\}$.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=(y-x)\left(1-2xy+x^2\right)^{-3/2} \qquad (1)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=x\left(1-2xy+x^2\right)^{-3/2} \qquad (2)$$

Οι μερικές παράγωγοι είναι συνεχείς σε κάθε $(x,y)\in A$, επομένως η f είναι διαφορίσιμη. Το ευθύγραμμο τμήμα

$$L=\left\{(t,1-t):0\le t\le 1\right\}$$

που ενώνει τα $(1,0)$ και $(0,1)$ περιέχεται στο A, αφού

$$1-2t(1-t)+t^2=(1-t)^2+2t^2>0, \text{ για κάθε } t\in[0,1].$$

Έτσι, εφαρμόζεται το Θ. 7.3 οπότε υπάρχει $t\in(0,1)$ με

$$f(1,0)-f(0,1)=\frac{\partial f}{\partial x}(\xi,\eta)(1-0)+\frac{\partial f}{\partial y}(\xi,\eta)(0-1) \qquad (3)$$

όπου $(\xi,\eta)=(t,1-t)$. Έτσι, από (1), (2), (3) προκύπτει

$$\frac{1}{\sqrt{2}}-1=(1-2t)\left(1-2t(1-t)+t^2\right)^{-3/2}-t\left(1-2t(1-t)+t^2\right)^{-3/2}$$

ή, ισοδύναμα, $\sqrt{2}(1-3t)\left(1-2t+3t^2\right)^{-3/2}=1-\sqrt{2}$.

ΑΣΚΗΣΗ 42

Να εξετασθεί αν η εξίσωση της έλλειψης

$$\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}=1, \text{ όπου } \alpha,\beta>0,$$

λύνεται μονοσήμαντα ως προς y σε μια περιοχή του ξ, όπου (ξ,η), $\eta\neq 0$, είναι σημείο της έλλειψης και να ευρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης της έλλειψης στο σημείο αυτό.

ΛΥΣΗ

Αν τεθεί $f(x,y)=\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}-1/\mathbb{R}^2$, τότε θα είναι

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\frac{2x}{\alpha^2} \quad \text{και}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\frac{2y}{\beta^2} \quad \text{για κάθε } (x,y)\in\mathbb{R}^2.$$

Επειδή οι μερικές παράγωγοι της f είναι συνεχείς και ισχύουν οι σχέσεις

$$f(\xi,\eta)=0 \text{ και } \frac{\partial f}{\partial y}(\xi,\eta)=\frac{2\eta}{\beta^2}\neq 0,$$

ικανοποιούνται οι υποθέσεις του θεωρήματος των πεπλεγμένων συναρτήσεων και επομένως, θα υπάρχει μια συνάρτηση φ μιας μεταβλητής, ορισμένη σε μια περιοχή $\pi(\xi)$ του ξ τέτοια ώστε:

(i) $$\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}=1 \Leftrightarrow f(x,y)=0 \Leftrightarrow y=\varphi(x),$$
για κάθε $x \in \pi(\xi)$.

(ii) Υπάρχει η παράγωγος της φ στο ξ, και μάλιστα είναι
$$\varphi'(\xi)=-\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(\xi,\eta)}{\frac{\partial f}{\partial y}(\xi,\eta)}=-\frac{\frac{2\xi}{\alpha^2}}{\frac{2\eta}{\beta^2}}=-\frac{\beta^2}{\alpha^2}\frac{\xi}{\eta}.$$

Κατόπιν τούτων, η εφαπτομένη της έλλειψης στο σημείο (ξ,η) θα έχει εξίσωση

$$y-\eta=\varphi'(\xi)(x-\xi) \Leftrightarrow$$
$$y-\eta=-\frac{\beta^2\xi}{\alpha^2\eta}(x-\xi) \Leftrightarrow$$
$$\beta^2\xi x+\alpha^2\eta y=\alpha^2\eta^2+\beta^2\xi^2 \Leftrightarrow$$
$$\frac{\xi x}{\alpha^2}+\frac{\eta y}{\beta^2}=\frac{\xi^2}{\alpha^2}+\frac{\eta^2}{\beta^2} \Leftrightarrow$$
$$\frac{\xi x}{\alpha^2}+\frac{\eta y}{\beta^2}=1.$$

ΑΣΚΗΣΗ 43(*)

Να ευρεθεί η παράγωγος $\dfrac{dy}{dx}$ όταν

$$\sin\frac{x}{y}+\sin\frac{y}{x}=1.$$

ΛΥΣΗ

Αν τεθεί $f(x,y)=\sin\dfrac{x}{y}+\sin\dfrac{y}{x}-1/\mathbb{R}^*\times\mathbb{R}^*$ τότε, σύμφωνα με το θεώρημα πεπλεγμένων συναρτήσεων για $x,y\neq 0$ με $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)\neq 0$, θα είναι

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial y}}=-\frac{\frac{1}{y}\cos\frac{x}{y}-\frac{y}{x^2}\cos\frac{y}{x}}{-\frac{x}{y^2}\cos\frac{x}{y}+\frac{1}{x}\cos\frac{y}{x}}$$

$$=-\frac{\frac{1}{x^2y}\left(x^2\cos\frac{x}{y}-y^2\cos\frac{y}{x}\right)}{\frac{1}{y^2x}\left(-x^2\cos\frac{x}{y}+y^2\cos\frac{y}{x}\right)}=\frac{y}{x}.$$

ΑΣΚΗΣΗ 46(*)

Να αποδειχθεί ότι η διαφορική εξίσωση

$$\left(2x\cos y - y^2\sin x\right)dx + \left(2y\cos x - x^2\sin x\right)dy = 0$$

είναι ακριβής, και να ευρεθεί η γενική λύση της.

ΛΥΣΗ

Αν τεθούν

$$u\left(x,y\right) = 2x\cos y - y^2\sin x$$

$$\upsilon\left(x,y\right) = 2y\cos x - x^2\sin y$$

τότε θα είναι

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -2\left(x\sin y + y\sin x\right) = \frac{\partial \upsilon}{\partial x},$$

οπότε η δοσμένη διαφορική εξίσωση είναι ακριβής.

Έτσι, θα υπάρχει μια διαφορισίμη συνάρτηση $f / \mathbb{R}^2$ για την οποία ισχύει η σχέση

$$df = \left(2x\cos y - y^2 \sin x\right)dx + \left(2y\cos x - x^2 \sin y\right)dy \quad (1)$$

ή, ισοδύναμα,

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x\cos y - y^2 \sin x \quad (2)$$

και

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2y\cos x - x^2 \sin y \quad (3)$$

Ολοκληρώνοντας την (2) ως προς x, προκύπτει ότι

$$f\left(x,y\right) = x^2\cos y + y^2\cos x + c\left(y\right) \quad (4)$$

όπου $c\left(y\right)$ είναι η σταθερά ολοκλήρωσης.

Από την (4) προκύπτει ότι

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -x^2\sin y + 2y\cos x + c'\left(y\right) \quad (5)$$

Από τις σχέσεις (3) και (5) προκύπτει ότι $c'\left(y\right) = 0$ και επομένως, η συνάρτηση $c\left(y\right)$ είναι σταθερή.

Έτσι, κάθε συνάρτηση της μορφής

$$f\left(x,y\right) = x^2\cos y + y^2\cos x + k$$

όπου k είναι μια πραγματική σταθερά, ικανοποιεί την εξίσωση (1).

Τότε όμως, η δοσμένη διαφορική εξίσωση γίνεται $df = 0 \Leftrightarrow f$: σταθερή συνάρτηση.

Έτσι, η γενική λύση της δοσμένης διαφορικής εξίσωσης δίδεται σε πεπλεγμένη μορφή από την εξίσωση

$$x^2\cos y + y^2\cos x = c, \quad \text{όπου } c \in \mathbb{R}.$$

ΑΣΚΗΣΗ 47(*)

Να λυθεί η διαφορική εξίσωση

$\frac{2x}{y^3}dx + \frac{y^2 - 3x^2}{y^4}dy = 0$, όταν $xy > 0$ και $y(1) = 1$.

ΛΥΣΗ

Αν τεθούν

$$u(x,y) = \frac{2x}{y^3},$$

$$\upsilon(x,y) = \frac{y^2 - 3x^2}{y^4}$$

θα είναι

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{6x}{y^4} = \frac{\partial \upsilon}{\partial x},$$

οπότε η δοσμένη διαφορική εξίσωση θα είναι ακριβής.

Έτσι, θα υπάρχει διαφορίσιμη συνάρτηση $f/\mathbb{R}^2$ με

$$df = \frac{2x}{y^3}dx + \frac{y^2 - 3x^2}{y^4}dy \qquad (1)$$

ή, ισοδύναμα,

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{2x}{y^3} \qquad (2)$$

και

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{y^2 - 3x^2}{y^4} \qquad (3)$$

Ολοκληρώνοντας και τα δύο μέλη της σχέσης (2) ως προς x, προκύπτει

$$f(x,y)=\frac{x^2}{y^3}+c(y) \qquad (4)$$

όπου $c(y)$ είναι η σταθερά ολοκλήρωσης.

Από τη σχέση (4) προκύπτει ότι

$$\frac{\partial f}{\partial y}=-\frac{3x^2}{y^4}+c'(y) \qquad (5)$$

Από τις σχέσεις (3) και (5) προκύπτει ότι

$c'(y)=\frac{1}{y^2}$ και επομένως, $c(y)=-\frac{1}{y}+k$, όπου $k\in\mathbb{R}$.

Έτσι, κάθε συνάρτηση της μορφής

$$f(x,y)=\frac{x^2}{y^3}-\frac{1}{y}+k$$

ικανοποιεί την εξίσωση (1).

Κατόπιν τούτων, η δοσμένη διαφορική εξίσωση γίνεται

$$df=0\Leftrightarrow d\left(\frac{x^2}{y^3}-\frac{1}{y}\right)=0\Leftrightarrow \frac{x^2}{y^3}-\frac{1}{y}=c \qquad (6)$$

όπου $c\in\mathbb{R}$.

Επιπλέον, επειδή $y=1$ όταν $x=1$, προκύπτει ότι $c=0$ οπότε η σχέση (6) δίδει $y^2=x^2$.

Τέλος, επειδή $xy>0$, προκύπτει ότι η ζητούμενη λύση είναι η συνάρτηση $y=x$.

ΑΣΚΗΣΗ 49(*)

Δίδεται η διαφορική εξίσωση

$$\left(xy^3 + 2x^2y^2 - y^2\right)dx + \left(x^2y^2 + 2x^3y - 2x^2\right)dy = 0.$$

α) Να αποδειχθεί ότι η εξίσωση αυτή δεν είναι ακριβής.

β) Να αναχθεί η δοσμένη διαφορική εξίσωση σε ακριβή, με τη βοήθεια του ολοκληρωτικού παράγοντα $I(x,y) = \dfrac{e^{xy}}{x^2y^2}$.

γ) Να ευρεθεί η γενική λύση της δοσμένης διαφορικής εξίσωσης.

ΛΥΣΗ

α) Επειδή

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(xy^3 + 2x^2y^2 - y^2\right) = 3xy^2 + 4x^2y - 2y \neq 2xy^2 + 6x^2y - 4x$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}\left(x^2y^2 + 2x^3y - 2x^2\right),$$

έπεται ότι η δοσμένη διαφορική εξίσωση δεν είναι ακριβής.

β) Αν υποτεθεί ότι $y \neq 0$, και πολλαπλασιάσουμε και τα δύο μέλη της δοσμένης διαφορικής εξίσωσης με $\dfrac{e^{xy}}{x^2y^2}$, προκύπτει η διαφορική εξίσωση

$$e^{xy}\left(\frac{y}{x}+2-\frac{1}{x^2}\right)dx+e^{xy}\left(1+\frac{2x}{y}-\frac{2}{y^2}\right)dy=0 \qquad (1)$$

Αν τεθεί

$$u(x,y)=e^{xy}\left(\frac{y}{x}+2-\frac{1}{x^2}\right) \quad \text{και} \quad v(x,y)=e^{xy}\left(1+\frac{2x}{y}-\frac{2}{y^2}\right)$$

τότε θα είναι $\dfrac{\partial u}{\partial y}=(y+2x)e^{xy}=\dfrac{\partial v}{\partial x}$

και επομένως, η διαφορική εξίσωση (1) είναι ακριβής.

γ) Επειδή η διαφορική εξίσωση (1) είναι ακριβής, θα υπάρχει μια διαφορίσιμη συνάρτηση $f/\mathbb{R}^2$ για την οποία ισχύουν

$$\frac{\partial f}{\partial x}=e^{xy}\left(\frac{y}{x}+2-\frac{1}{x^2}\right) \qquad (2)$$

και

$$\frac{\partial f}{\partial y}=e^{xy}\left(1+\frac{2x}{y}-\frac{2}{y^2}\right) \qquad (3)$$

Ολοκληρώνοντας και τα δύο μέλη της σχέσης (2) ως προς x, προκύπτει ότι

$$f(x,y)=\int\left(\frac{ye^{xy}}{x}-\frac{e^{xy}}{x^2}\right)dx+2\int e^{xy}dx$$

$$=\frac{e^{xy}}{x}+\frac{2}{y}e^{xy}+c(y) \qquad \left(\text{διότι } \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{e^{xy}}{x}\right)=\frac{ye^{xy}}{x}-\frac{e^{xy}}{x^2}\right)$$

$$=e^{xy}\left(\frac{1}{x}+\frac{2}{y}\right)+c(y) \tag{4}$$

όπου $c(y)$ είναι η σταθερά ολοκλήρωσης.

Από τις (3), (4) προκύπτουν διαδοχικά οι σχέσεις:

$$xe^{xy}\left(\frac{1}{x}+\frac{2}{y}\right)-\frac{2e^{xy}}{y^2}+c'(y)=e^{xy}\left(1+\frac{2x}{y}-\frac{2}{y^2}\right)$$

$$c'(y)=0$$

$$c(y)=k,$$

όπου $k\in\mathbb{R}$.

Άρα $f(x,y)=e^{xy}\left(\frac{1}{x}+\frac{2}{y}\right)+k$, και η γενική λύση της (1) δίδεται σε πεπλεγμένη μορφή από τη σχέση

$$e^{xy}\left(\frac{1}{x}+\frac{2}{y}\right)=c,$$

όπου $c\in\mathbb{R}$.

Τέλος, η γενική λύση της δοσμένης διαφορικής εξίσωσης αποτελείται από την παραπάνω γενική λύση της (1) καθώς και από τη λύση $y=0$, που εξαιρέθηκε λόγω του περιορισμού $y\neq 0$ στο β).

ΔΙΑΛΕΞΗ 4

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 12:
ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ ΔΥΟ ΜΕΤΑΒΛΗΤΩΝ-ΠΑΡΑΓΩΓΙΣΗ

Περιεχόμενα διάλεξης:

Ακρότατα, σαγματικά

Δεσμευμένα ακρότατα

ΑΚΡΟΤΑΤΑ–ΣΑΓΜΑΤΙΚΑ

Στην παράγραφο αυτή, θα δοθούν συνθήκες για τον προσδιορισμό των ακροτάτων τιμών μια συνάρτησης δύο μεταβλητών.

Για μια συνάρτηση f δύο μεταβλητών, ένα σημείο $(\xi,\eta)\in D(f)$ ονομάζεται **σημείο στασιμότητας** ή **στάσιμο σημείο της f** αν υπάρχουν οι μερικές παράγωγοι της f στο (ξ,η) και ισχύει

$$\frac{\partial f}{\partial x}(\xi,\eta)=\frac{\partial f}{\partial y}(\xi,\eta)=0.$$

Η επόμενη πρόταση αποτελεί την επέκταση του θεωρήματος του Fermat για συναρτήσεις δύο μεταβλητών.

Πρόταση 10.1

Έστω μια συνάρτηση f δύο μεταβλητών και (ξ,η) ένα εσωτερικό σημείο του $D(f)$, στο οποίο υπάρχουν οι μερικές παράγωγοι της f. Αν επιπλέον (ξ,η) είναι σημείο τοπικού ακρότατου, τότε το σημείο αυτό είναι στάσιμο.

Η υπόθεση "(ξ,η) είναι ένα εσωτερικό σημείο του $D(f)$" στην παραπάνω πρόταση είναι απαραίτητη, αφού ένα συνοριακό σημείο του $D(f)$ μπορεί να είναι σημείο τοπικού ακρότατου αλλά να μην είναι στάσιμο.

Για παράδειγμα, η συνάρτηση

$$f(x,y) = x^2y^2 / [0,1]\times[0,1]$$

παρουσιάζει μέγιστη τιμή στο σημείο $(1,1)$, αλλά

$$\frac{\partial f}{\partial x}(1,1) = \frac{\partial f}{\partial y}(1,1) = 2 \neq 0.$$

Η συνθήκη

$$\frac{\partial f}{\partial x}(\xi,\eta) = \frac{\partial f}{\partial y}(\xi,\eta) = 0$$

ονομάζεται **συνθήκη πρώτης τάξης** και είναι αναγκαία, αλλά όχι ικανή για την ύπαρξη των ακρότατων τιμών.

Για παράδειγμα, για τη συνάρτηση

$$f(x,y) = xy / \mathbb{R}^2$$

ισχύει ότι $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$, αλλά το $(0,0)$ δεν είναι σημείο τοπικού ακρότατου, αφού κάθε τετραγωνική περιοχή

$$\pi_\delta(0,0) = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x| < \delta \text{ και } |y| < \delta\right\}$$

περιέχει τα σημεία $\left(-\frac{\delta}{2},\frac{\delta}{2}\right)$ και $\left(\frac{\delta}{2},\frac{\delta}{2}\right)$ με

$$f\left(-\frac{\delta}{2},\frac{\delta}{2}\right) < f(0,0) = 0 < f\left(\frac{\delta}{2},\frac{\delta}{2}\right).$$

Ένα σημείο (ξ,η,ζ) της γραφικής παράστασης μιας διαφορίσιμης συνάρτησης f δύο μεταβλητών ονομάζεται **σαγματικό** αν το (ξ,η) είναι εσωτερικό σημείο του $D(f)$, στάσιμο σημείο της f, και κάθε περιοχή του περιέχει σημεία

$$(x,y)\in D(f) \text{ με } f(\xi,\eta)<f(x,y)$$

και σημεία

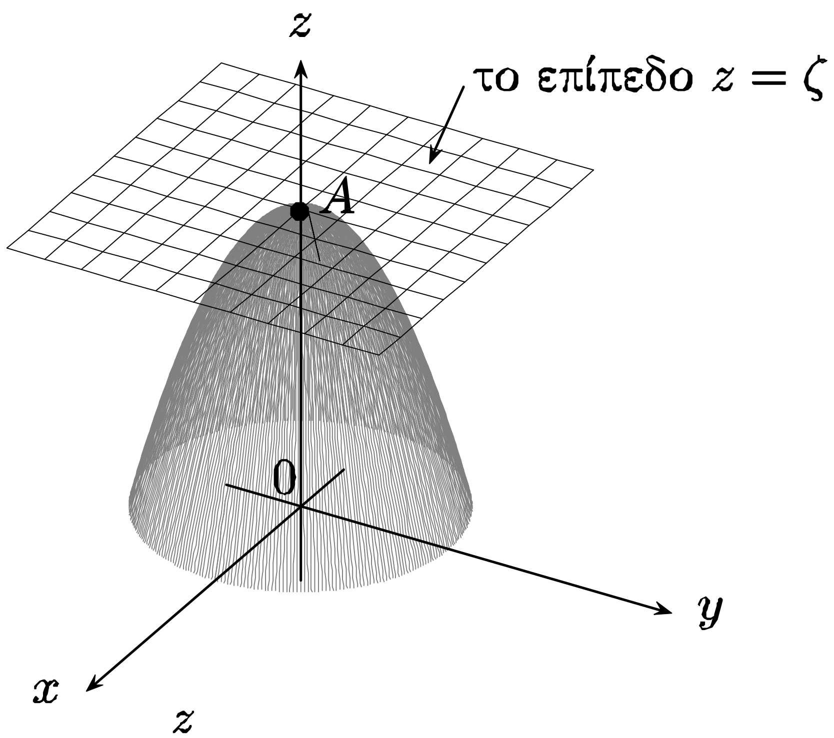
$$(x,y)\in D(f) \text{ με } f(x,y)<f(\xi,\eta).$$

Στην περίπτωση αυτή, λέγεται ότι η συνάρτηση f παρουσιάζει σαγματικό σημείο στο (ξ,η).

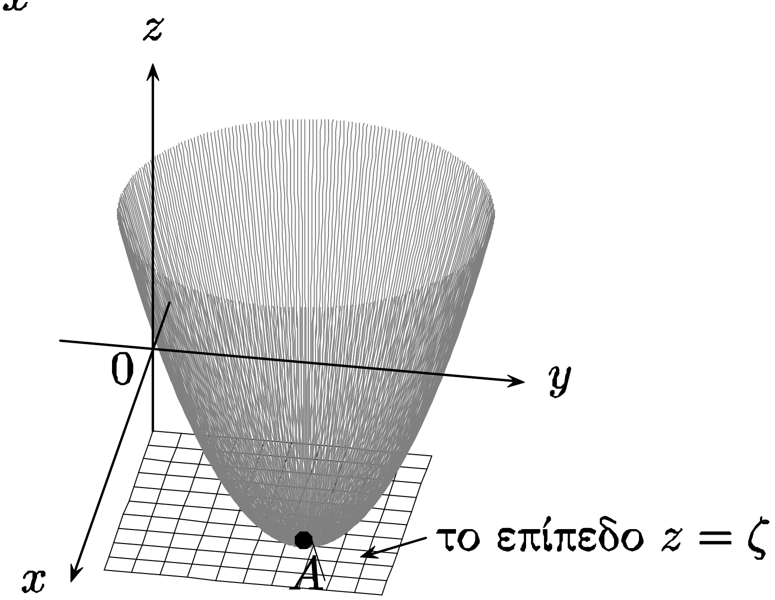
Έτσι, η συνάρτηση $f(x,y)=xy/\mathbb{R}^2$ του προηγούμενου παραδείγματος παρουσιάζει σαγματικό σημείο στο σημείο $(0,0)$.

Στα επόμενα τρία σχήματα, το σημείο (ξ,η) είναι στάσιμο σημείο της αντίστοιχης συνάρτησης και επομένως το εφαπτόμενο επίπεδο στο σημείο $A(\xi,\eta,\zeta)$ είναι παράλληλο με το επίπεδο Oxy, αφού η εξίσωσή του είναι $z-\zeta=\frac{\partial f}{\partial x}(\xi,\eta)(x-\xi)+\frac{\partial f}{\partial y}(\xi,\eta)(y-\eta)=0$

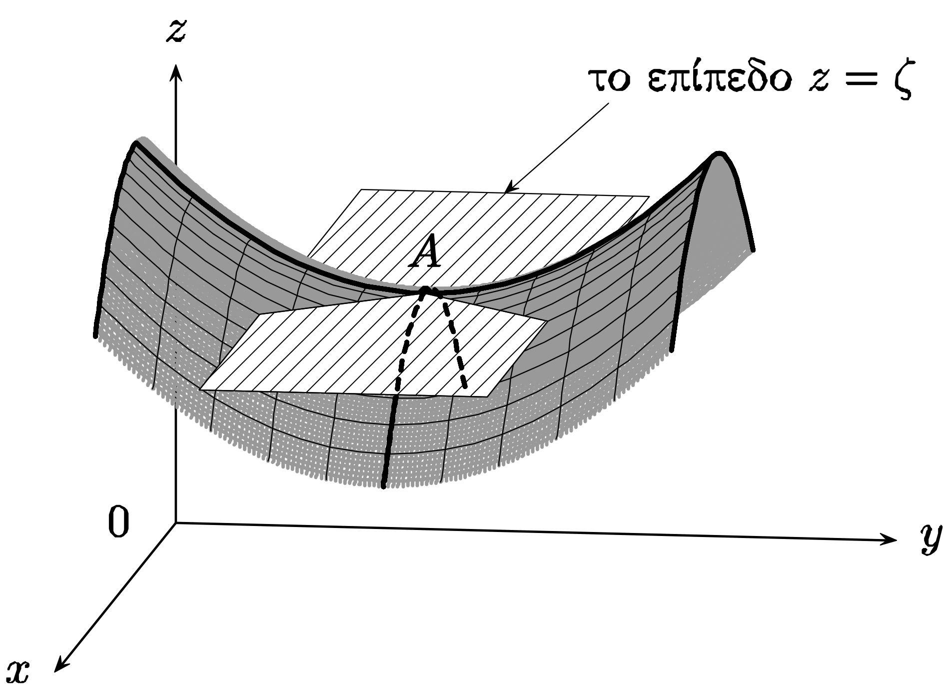
Στο πρώτο, το σημείο A είναι τοπικό μέγιστο, στο δεύτερο τοπικό ελάχιστο και στο τρίτο σαγματικό σημείο.



z
το επίπεδο z = ζ
A
0
y
x



z
0
y
το επίπεδο z = ζ
A
x



z
το επίπεδο z = ζ
A
0
y
x

Πρόταση 10.2

Έστω μια διαφορίσιμη συνάρτηση f δύο μεταβλητών και (ξ,η) εσωτερικό σημείο του $D(f)$, το οποίο είναι σημείο στασιμότητας. Επιπλέον, οι $\dfrac{\partial f}{\partial x}, \dfrac{\partial f}{\partial y}$ είναι διαφορίσιμες στο (ξ,η) και

$$D = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\xi,\eta) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(\xi,\eta) \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(\xi,\eta) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\xi,\eta) \end{vmatrix}.$$

Τότε,

(i) Αν $D > 0$ και $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\xi,\eta), \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\xi,\eta) < 0$, η f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο (ξ,η).

(ii) Αν $D > 0$ και $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\xi,\eta), \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\xi,\eta) > 0$, η f παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο στο (ξ,η).

(iii) Αν $D < 0$, η f παρουσιάζει σαγματικό σημείο στο (ξ,η).

Η συνθήκη της παραπάνω πρότασης ονομάζεται **συνθήκη δεύτερης τάξης** και είναι ικανή για την ύπαρξη των ακρότατων ή σαγματικών σημείων.

Εφαρμογή. Να ευρεθούν τα στάσιμα σημεία της

$$f(x,y)=2x^3+xy^2+5x^2+y^2/\mathbb{R}^2,$$

και στη συνέχεια να προσδιορισθεί η φύση τους.

Λύση: Αρχικά, ευρίσκουμε τις μερικές παραγώγους πρώτης και δεύτερης τάξης της δοσμένης συνάρτησης.

$$\frac{\partial f}{\partial x}=6x^2+y^2+10x,\quad \frac{\partial f}{\partial y}=2y(x+1),$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=12x+10,\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=2(x+1)\text{ και }\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=2y=\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}.$$

Τα στάσιμα σημεία της f προκύπτουν ως λύσεις του συστήματος

$$\left\{\begin{matrix}\dfrac{\partial f}{\partial x}=0\\ \dfrac{\partial f}{\partial y}=0\end{matrix}\right\}\Leftrightarrow\left\{\begin{matrix}6x^2+y^2+10x=0\\ 2y(x+1)=0\end{matrix}\right\}.$$

Από τη δεύτερη εξίσωση προκύπτει ότι $y=0$ ή $x=-1$.

1. Αν $y=0$, τότε από την πρώτη εξίσωση του συστήματος προκύπτει ότι

$$6x^2+10x=0\Leftrightarrow x=0\text{ ή }x=-\frac{5}{3}.$$

2. Αν $x=-1$, τότε από την πρώτη εξίσωση του συστήματος προκύπτει ότι

$$y^2=4\Leftrightarrow y=2\text{ ή }y=-2.$$

Κατόπιν τούτων, τα στάσιμα σημεία της f είναι τα

$$\left(0,0\right), \left(-\frac{5}{3},0\right), \left(-1,2\right) \text{ και } \left(-1,-2\right).$$

Στη συνέχεια, χρησιμοποιώντας τη συνθήκη δεύτερης τάξης, θα εξετασθεί η φύση των παραπάνω σημείων. Πραγματικά, είναι

$$D = \begin{vmatrix} 12x+10 & 2y \\ 2y & 2\left(x+1\right) \end{vmatrix} = 4\left(\left(x+1\right)\left(6x+5\right) - y^2\right).$$

Διακρίνουμε τις παρακάτω περιπτώσεις:

i. Για το σημείο $\left(0,0\right)$ είναι

$$D = 20 > 0,\ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\left(0,0\right) = 10 > 0 \text{ και } \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\left(0,0\right) = 2 > 0,$$

οπότε η f παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο στο $\left(0,0\right)$.

ii. Για το σημείο $\left(-\frac{5}{3},0\right)$ είναι

$$D = \frac{40}{3} > 0,\ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\left(-\frac{5}{3},0\right) = -10 < 0,\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\left(-\frac{5}{3},0\right) = -\frac{4}{3} < 0,$$

οπότε η f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο $\left(-\frac{5}{3},0\right)$.

iii. Για τα σημεία $\left(-1,2\right)$ και $\left(-1,-2\right)$ είναι $D = -16 < 0$, οπότε η συνάρτηση f παρουσιάζει σαγματικά σημεία στα $\left(-1,2\right)$ και $\left(-1,-2\right)$.

Παρατηρήσεις

1. Η υπόθεση “(ξ,η) εσωτερικό σημείο του $D(f)$” είναι απαραίτητη στην πρόταση 10.2.

   Για παράδειγμα, αν $f(x,y)=e^{-xy}/\left[0,+\infty\right)\times\left[0,+\infty\right)$,

   τότε είναι $\dfrac{\partial f}{\partial x}=-ye^{-xy},\dfrac{\partial f}{\partial y}=-xe^{-xy},\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}=y^2e^{-xy},$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=x^2e^{-xy} \text{ και } \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=(xy-1)e^{-xy}=\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}.$$

   Επομένως, για το συνοριακό σημείο $(0,0)$ είναι

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0)=\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0)=0,$$

$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(0,0)=\dfrac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(0,0)=-1$, οπότε $D=\begin{vmatrix}0 & -1\\ -1 & 0\end{vmatrix}=-1<0,$

ενώ στο σημείο αυτό η f παρουσιάζει ολικό μέγιστο.

2. Αν οι $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ είναι συνεχείς στο (ξ,η) και $D>0$, τότε οι $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\xi,\eta)$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\xi,\eta)$ είναι ομόσημες.

Πραγματικά,

$$0<D=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\xi,\eta)\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\xi,\eta)-\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(\xi,\eta)\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(\xi,\eta)$$

$$=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\xi,\eta)\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\xi,\eta)-\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(\xi,\eta)\right)^2$$

οπότε $0\le\left(\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(\xi,\eta)\right)^2<\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\xi,\eta)\cdot\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\xi,\eta).$

Έτσι, στην περίπτωση αυτή αρκεί να ελέγχεται το πρόσημο μίας εκ των δύο.

3. Αν $D=0$, από την πρόταση 10.2, δεν προκύπτει απάντηση για τη φύση των στάσιμων σημείων

ΑΣΚΗΣΗ 51

Δίδονται οι συναρτήσεις f, g, h στο $\mathbb{R}^2$, με

$f(x,y) = -(x-y)^2$, $g(x,y) = x^2y^2$ και $h(x,y) = x^3 - 3xy^2$.

(i) Να αποδειχθεί ότι η ορίζουσα D της πρότασης 10.2, για κάθε μια από τις συναρτήσεις αυτές και για το σημείο $(0,0)$, είναι ίση με 0.

(ii) Να αποδειχθεί ότι το $(0,0)$ είναι σημείο ολικού μεγίστου της f, σημείο ολικού ελαχίστου της g, και σαγματικό σημείο για την h.

ΛΥΣΗ

(i) Για τη συνάρτηση f είναι

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -2(x-y),\ \frac{\partial f}{\partial y} = 2(x-y)$$

και
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -2,\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 2,$$

οπότε
$$D = \begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = 0.$$

Για τη συνάρτηση g είναι

$$\frac{\partial g}{\partial x} = 2xy^2,\ \frac{\partial g}{\partial y} = 2x^2y$$

και
$$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} = 2y^2,\ \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} = 2x^2,\ \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 g}{\partial y \partial x} = 4xy,$$

οπότε, για $x = y = 0$, είναι $D = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}$.

Για τη συνάρτηση h είναι

$$\frac{\partial h}{\partial x}=3\left(x^2-y^2\right),\ \frac{\partial h}{\partial y}=-6xy$$

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}=6x,\ \frac{\partial^2 h}{\partial y^2}=-6x,\ \frac{\partial^2 h}{\partial y\partial x}=-6y,$$

οπότε, για $x=y=0$, είναι $D=\begin{vmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{vmatrix}=0$.

(ii) Επειδή

$$f\left(x,y\right)=-\left(x-y\right)^2\le 0=f\left(0,0\right),$$

για κάθε $\left(x,y\right)\in\mathbb{R}^2$, προκύπτει ότι το $\left(0,0\right)$ είναι σημείο ολικού μεγίστου της f.

Επειδή

$$g\left(x,y\right)=x^2y^2\ge 0=g\left(0,0\right)$$

για κάθε $\left(x,y\right)\in\mathbb{R}^2$, προκύπτει ότι το $\left(0,0\right)$ είναι σημείο ολικού ελαχίστου της f.

Τέλος, η συνάρτηση $h\left(x,y\right)=x^3-3xy^2$ παρουσιάζει σαγματικό σημείο στο $\left(0,0\right)$, διότι κάθε τετραγωνική περιοχή $\tau_\delta\left(0,0\right)$, όπου $\delta>0$, περιέχει τα σημεία

$$\left(-\frac{\delta}{2},\frac{\delta}{6}\right)\text{ και }\left(\frac{\delta}{2},\frac{\delta}{6}\right)\text{ με}$$

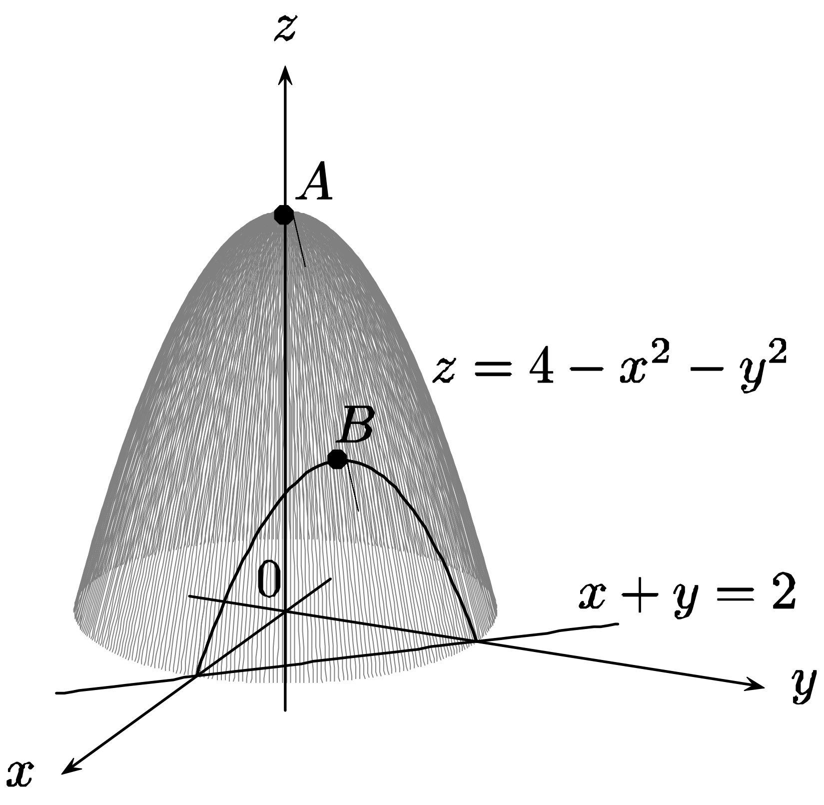
$$h\left(-\frac{\delta}{2},\frac{\delta}{6}\right)=-\frac{\delta^3}{12}<0=h\left(0,0\right)<\frac{\delta^3}{12}=h\left(\frac{\delta}{2},\frac{\delta}{6}\right).$$

ΔΕΣΜΕΥΜΕΝΑ ΑΚΡΟΤΑΤΑ

Υπάρχουν προβλήματα ακρότατων τιμών, στα οποία οι μεταβλητές της συνάρτησης συνδέονται με μια σχέση. Συγκεκριμένα, αναζητούνται τα ακρότατα μιας συνάρτησης f δύο μεταβλητών όταν οι μεταβλητές της ικανοποιούν μια εξίσωση $\varphi(x, y) = 0$.

Στην περίπτωση αυτή, τα ακρότατα (αν υπάρχουν) ονομάζονται **δεσμευμένα** με **δεσμό** την εξίσωση $\varphi(x, y) = 0$.

Για παράδειγμα, αν $f(x, y) = 4 - x^2 - y^2 / \mathbb{R}^2$, τότε το $A(0,0,4)$ είναι ολικό μέγιστο της f ενώ το $B(1,1,2)$ είναι δεσμευμένο ολικό μέγιστο της f με δεσμό την εξίσωση $x + y = 2$, όπως φαίνεται στο επόμενο σχήμα.



Πρόταση 11.1

Άν $f,\varphi/A\subseteq\mathbb{R}^2$ **είναι δύο συναρτήσεις με συνεχείς μερικές παραγώγους και** (ξ,η) **ένα εσωτερικό σημείο του Α, στο οποίο η συνάρτηση f παρουσιάζει δεσμευμένο τοπικό ακρότατο με δεσμό την εξίσωση** $\varphi(x,y)=0$, **τότε ισχύει η σχέση**

$$\frac{\partial f}{\partial x}(\xi,\eta)\cdot\frac{\partial \varphi}{\partial y}(\xi,\eta)=\frac{\partial f}{\partial y}(\xi,\eta)\cdot\frac{\partial \varphi}{\partial x}(\xi,\eta).$$

Αν υποτεθεί ότι $\frac{\partial f}{\partial y}(\xi,\eta),\frac{\partial \varphi}{\partial y}(\xi,\eta)\neq 0$, τότε από την ισότητα της προηγούμενης πρότασης προκύπτει ότι

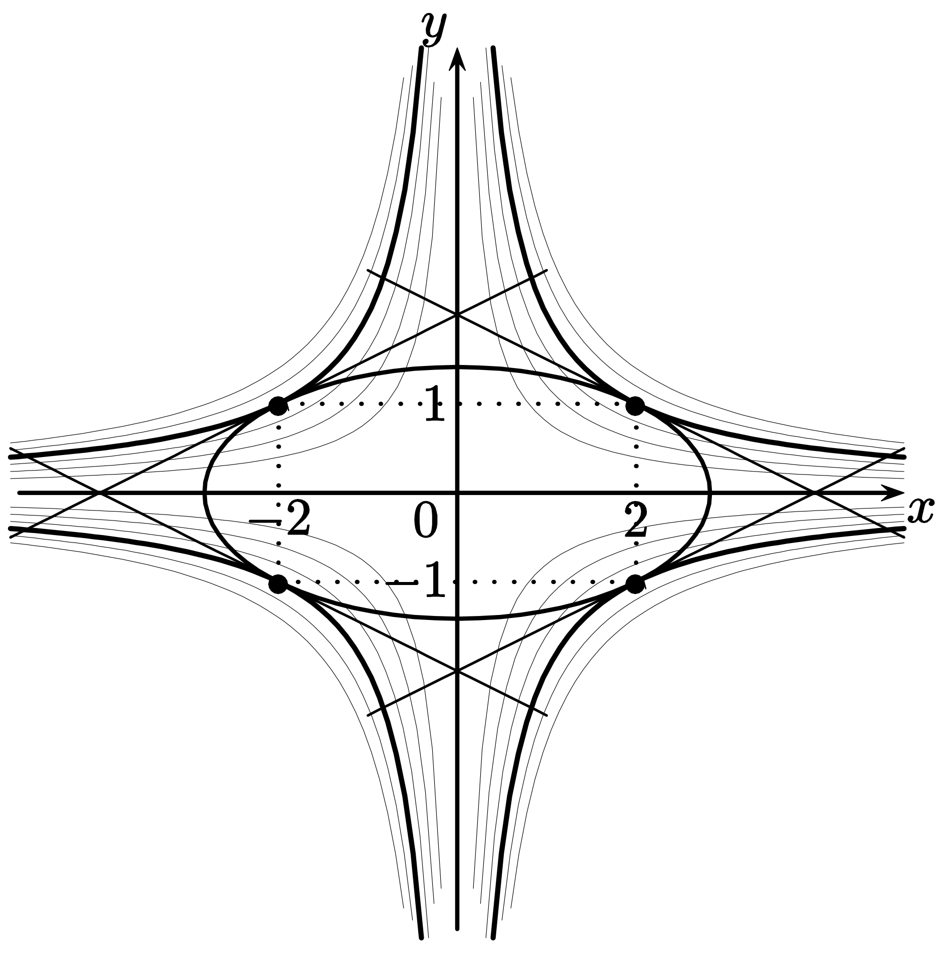
$$-\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(\xi,\eta)}{\frac{\partial f}{\partial y}(\xi,\eta)}=-\frac{\frac{\partial \varphi}{\partial x}(\xi,\eta)}{\frac{\partial \varphi}{\partial y}(\xi,\eta)},$$

οπότε, σύμφωνα με το θεώρημα πεπλεγμένων συναρτήσεων, οι συναρτήσεις που δίδονται με πεπλεγμένη μορφή από τις εξισώσεις $f(x,y)=c$, όπου $c=f(\xi,\eta)$, και $\varphi(x,y)=0$ έχουν ίσες παραγώγους στο σημείο (ξ,η). Με άλλα λόγια, η ισοϋψής καμπύλη της συνάρτησης f που περνάει από το σημείο $(\xi,\eta)\in A$ και η καμπύλη που ορίζεται από την εξίσωση $\varphi(x,y)=0$ έχουν κοινή εφαπτομένη στο σημείο (ξ,η).

Παράδειγμα

Αν $f(x,y) = xy / \mathbb{R}^2$ και $\varphi(x,y) = x^2 + 4y^2 - 8 / \mathbb{R}^2$, τότε αποδεικνύεται ότι στα σημεία $(2,1)$, $(-2,-1)$, $(2,-1)$ και $(-2,1)$ η συνάρτηση f παρουσιάζει δεσμευμένα τοπικά ακρότατα, με δεσμό την εξίσωση $\varphi(x,y) = 0$.

Έτσι, όπως φαίνεται και στο επόμενο σχήμα, οι ισοϋψείς καμπύλες της συνάρτησης f που περνάνε από τα σημεία αυτά και η έλλειψη που ορίζεται από το δεσμό έχουν κοινές εφαπτομένες στα σημεία τομής τους.



Μέθοδος των πολλαπλασιαστών Lagrange

Η μέθοδος αυτή χρησιμοποιείται για την εύρεση των δεσμευμένων τοπικών ακροτάτων μιας συνάρτησης f. Σύμφωνα με αυτή, θεωρούμε τη **συνάρτηση του Lagrange**

$$L(x,y)=f(x,y)+\lambda\varphi(x,y)/A,$$

όπου $\lambda\in\mathbb{R}$ ονομάζεται **πολλαπλασιαστής Lagrange**.

Αν $\frac{\partial\varphi}{\partial x}(\xi,\eta)\neq 0$ (αντ. $\frac{\partial\varphi}{\partial y}(\xi,\eta)\neq 0$), τότε για

$$\lambda=-\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(\xi,\eta)}{\frac{\partial\varphi}{\partial x}(\xi,\eta)} \qquad (\text{αντ. για } \lambda=-\frac{\frac{\partial f}{\partial y}(\xi,\eta)}{\frac{\partial\varphi}{\partial y}(\xi,\eta)}),$$

ισχύει ότι

$$\frac{\partial L}{\partial x}(\xi,\eta)=\frac{\partial L}{\partial y}(\xi,\eta)=0,$$

για κάποιο $\lambda\in\mathbb{R}$.

Πράγματι, αν για παράδειγμα $\lambda = -\dfrac{\dfrac{\partial f}{\partial x}(\xi,\eta)}{\dfrac{\partial \varphi}{\partial x}(\xi,\eta)}$, τότε

$$\frac{\partial L}{\partial x}(\xi,\eta) = \frac{\partial f}{\partial x}(\xi,\eta) - \frac{\dfrac{\partial f}{\partial x}(\xi,\eta)}{\dfrac{\partial \varphi}{\partial x}(\xi,\eta)} \frac{\partial \varphi}{\partial x}(\xi,\eta) = 0$$

και, χρησιμοποιώντας την πρόταση 11.1,

$$\frac{\partial L}{\partial y}(\xi,\eta) = \frac{\partial f}{\partial y}(\xi,\eta) - \frac{\dfrac{\partial f}{\partial x}(\xi,\eta)}{\dfrac{\partial \varphi}{\partial x}(\xi,\eta)} \frac{\partial \varphi}{\partial y}(\xi,\eta) = \frac{\partial f}{\partial y}(\xi,\eta) - \frac{\partial f}{\partial y}(\xi,\eta) = 0$$

Κατόπιν τούτων, τα δεσμευμένα ακρότατα της f με δεσμό την $\varphi(x,y)=0$ πρέπει να αναζητηθούν στα σημεία που προκύπτουν ως λύσεις του συστήματος

$$\left\{\begin{array}{c} \dfrac{\partial L}{\partial x}(x,y) = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial y}(x,y) = 0 \\ \varphi(x,y) = 0 \end{array}\right\} \qquad (\Sigma)$$

Μια ικανή συνθήκη για τη φύση των δεσμευμένων τοπικών ακρότατων δίδεται στην επόμενη πρόταση.

Πρόταση 11.2

Έστω $f,\varphi / A \subseteq \mathbb{R}^2$ **δύο συναρτήσεις με συνεχείς πρώτες και δεύτερες μερικές παραγώγους,** (ξ,η) **ένα εσωτερικό σημείο του A τέτοιο ώστε** $\frac{\partial\varphi}{\partial x}(\xi,\eta)\neq 0$ **ή** $\frac{\partial\varphi}{\partial y}(\xi,\eta)\neq 0$, (ξ,η,λ) **λύση του συστήματος (Σ) για κάποιο** $\lambda\in\mathbb{R}$**, και**

$$\Delta=\begin{vmatrix} \frac{\partial^2 L}{\partial x^2}(\xi,\eta) & \frac{\partial^2 L}{\partial x\partial y}(\xi,\eta) & \frac{\partial\varphi}{\partial x}(\xi,\eta) \\ \frac{\partial^2 L}{\partial y\partial x}(\xi,\eta) & \frac{\partial^2 L}{\partial y^2}(\xi,\eta) & \frac{\partial\varphi}{\partial y}(\xi,\eta) \\ \frac{\partial\varphi}{\partial x}(\xi,\eta) & \frac{\partial\varphi}{\partial y}(\xi,\eta) & 0 \end{vmatrix}.$$

Τότε,

(i) Αν $\Delta>0$**, η συνάρτηση παρουσιάζει δεσμευμένο τοπικό μέγιστο στο σημείο** (ξ,η)**.**

(ii) Αν $\Delta<0$**, η συνάρτηση παρουσιάζει δεσμευμένο τοπικό ελάχιστο στο σημείο** (ξ,η)**.**

Εφαρμογή

Να ευρεθούν τα δεσμευμένα τοπικά ακρότατα της $f(x,y) = xy / \mathbb{R}^2$, όταν $x^2 + 4y^2 = 8$.

Λύση: Θεωρούμε τις συναρτήσεις

$$\varphi(x,y) = x^2 + 4y^2 - 8 / \mathbb{R}^2$$

$$L(x,y) = xy + \lambda\left(x^2 + 4y^2 - 8\right) / \mathbb{R}^2.$$

Αρχικά, ευρίσκουμε τις λύσεις του συστήματος

$$\left\{\begin{array}{c} \dfrac{\partial L}{\partial x} = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial y} = 0 \\ \varphi(x,y) = 0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} y + 2\lambda x = 0 \\ x + 8\lambda y = 0 \\ x^2 + 4y^2 = 8 \end{array}\right\}.$$

Από τις δύο πρώτες εξισώσεις του παραπάνω συστήματος προκύπτει ότι $x = -8\lambda(-2\lambda x) = 16\lambda^2 x$

οπότε $x = 0$ ή $\lambda = -\dfrac{1}{4}$ ή $\lambda = \dfrac{1}{4}$.

Αν όμως $x = 0$, τότε $y = 0$, το οποίο είναι αδύνατο λόγω της τρίτης εξίσωσης του συστήματος.

Άρα ($\lambda = -\dfrac{1}{4}$ και $y = \dfrac{1}{2}x$) ή ($\lambda = \dfrac{1}{4}$ και $y = -\dfrac{1}{2}x$).

Κατόπιν τούτων, από την τρίτη εξίσωση του συστήματος προκύπτουν οι λύσεις του συστήματος:

$$\left(2, 1, -\frac{1}{4}\right), \left(-2, -1, -\frac{1}{4}\right), \left(2, -1, \frac{1}{4}\right) \text{ και } \left(-2, 1, \frac{1}{4}\right).$$

Ακολούθως, υπολογίζουμε τις μερικές παραγώγους δεύτερης τάξης της συνάρτησης L, και τις μερικές παραγώγους πρώτης τάξης της συνάρτησης φ:

$$\frac{\partial^2 L}{\partial x^2} = 2\lambda,\ \frac{\partial^2 L}{\partial y^2} = 8\lambda,\ \frac{\partial^2 L}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 L}{\partial y \partial x} = 1$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = 2x \text{ και } \frac{\partial \varphi}{\partial y} = 8y.$$

Στη συνέχεια, ευρίσκεται η τιμή της ορίζουσας Δ της προηγούμενης πρότασης για κάθε μια από τις λύσεις του συστήματος. Είναι

$$\Delta = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 L}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 L}{\partial x \partial y} & \frac{\partial \varphi}{\partial x} \\ \frac{\partial^2 L}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 L}{\partial y^2} & \frac{\partial \varphi}{\partial y} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial y} & \frac{\partial \varphi}{\partial y} & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2\lambda & 1 & 2x \\ 1 & 8\lambda & 8y \\ 2x & 8y & 0 \end{vmatrix} = 32\left(xy - 4\lambda y^2 - \lambda x^2\right)$$

Διακρίνουμε τις παρακάτω περιπτώσεις:

(i) Αν $\left(x, y, \lambda\right) = \left(2, 1, -\frac{1}{4}\right)$ ή $\left(-2, -1, -\frac{1}{4}\right)$ τότε $\Delta = 128 > 0$, οπότε η f παρουσιάζει δεσμευμένο τοπικό μέγιστο ίσο με, $f_{max} = f\left(2,1\right) = f\left(-2,-1\right) = 2$.

(ii) Αν $\left(x, y, \lambda\right) = \left(2, -1, \frac{1}{4}\right)$ ή $\left(-2, 1, \frac{1}{4}\right)$ τότε $\Delta = -128 < 0$, οπότε η f παρουσιάζει δεσμευμένο τοπικό ελάχιστο ίσο με $f_{min} = f\left(2,-1\right) = f\left(-2,1\right) = -2$.

ΑΣΚΗΣΗ 58

Να προσδιορισθεί η ελάχιστη και μέγιστη απόσταση της αρχής των αξόνων από τα σημεία της καμπύλης με εξίσωση $5x^2+6xy+5y^2=8$.

ΛΥΣΗ

Θεωρούμε τις συναρτήσεις

$f(x,y)=x^2+y^2/\mathbb{R}^2$,

$\varphi(x,y)=5x^2+6xy+5y^2-8$,

$L(x,y)=x^2+y^2+\lambda\left(5x^2+6xy+5y^2-8\right)$.

Αρχικά, ευρίσκουμε τις λύσεις του συστήματος

$$\left\{\begin{array}{c}\dfrac{\partial L}{\partial x}=0\\ \dfrac{\partial L}{\partial y}=0\\ \varphi(x,y)=0\end{array}\right\}\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{c}2x+10\lambda x+6\lambda y=0\\ 2y+6\lambda x+10\lambda y=0\\ 5x^2+6xy+5y^2=8\end{array}\right\}.$$

Αφαιρώντας κατά μέλη τις δύο πρώτες εξισώσεις του συστήματος, προκύπτει ότι

$$2x-2y+4\lambda x-4\lambda y=0\Leftrightarrow x-y+2\lambda(x-y)=0$$

$$\Leftrightarrow 2\left(x-y\right)\left(2\lambda+1\right)=0\Leftrightarrow x=y \text{ ή } \lambda=-\frac{1}{2}.$$

Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:

1. Αν $x = y$, τότε από την τρίτη εξίσωση του συστήματος προκύπτει ότι

$$5x^2 + 6x^2 + 5x^2 = 8 \Leftrightarrow x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Από την πρώτη εξίσωση του συστήματος θα είναι

$$2 + 16\lambda = 0 \Leftrightarrow \lambda = -\frac{1}{8}.$$

Έτσι, σ' αυτή την περίπτωση, το σύστημα έχει δύο λύσεις:

$$\left(x = \frac{1}{\sqrt{2}}, y = \frac{1}{\sqrt{2}}, \lambda = -\frac{1}{8}\right) \text{ και } \left(x = -\frac{1}{\sqrt{2}}, y = -\frac{1}{\sqrt{2}}, \lambda = -\frac{1}{8}\right)$$

2. Αν $x \neq y$ τότε, όπως είδαμε, θα πρέπει $\lambda = -\frac{1}{2}$.

Επιπλέον, από την πρώτη εξίσωση του συστήματος προκύπτει ότι

$$2x - 5x - 3y = 0 \Leftrightarrow x = -y.$$

Τότε όμως, από την τρίτη εξίσωση του συστήματος θα είναι

$$5x^2 - 6x^2 + 5x^2 = 8 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{2}.$$

Έτσι, σ' αυτή την περίπτωση, το σύστημα έχει επίσης δύο λύσεις:

$$\left(x = \sqrt{2}, y = -\sqrt{2}, \lambda = -\frac{1}{2}\right) \text{ και } \left(x = -\sqrt{2}, y = \sqrt{2}, \lambda = -\frac{1}{2}\right).$$

Θεωρούμε την ορίζουσα

$$\Delta = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial^2 L}{\partial x^2} & \dfrac{\partial^2 L}{\partial x \partial y} & \dfrac{\partial \varphi}{\partial x} \\ \dfrac{\partial^2 L}{\partial y \partial x} & \dfrac{\partial^2 L}{\partial y^2} & \dfrac{\partial \varphi}{\partial y} \\ \dfrac{\partial \varphi}{\partial x} & \dfrac{\partial \varphi}{\partial y} & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2+10\lambda & 6\lambda & 10x+6y \\ 6\lambda & 2+10\lambda & 10y+6x \\ 10x+6y & 10y+6x & 0 \end{vmatrix}$$

$$= -16\Big((40\lambda+17)\left(x^2+y^2\right)+(48\lambda+30)xy\Big).$$

Στην πρώτη περίπτωση, ευρίσκεται ότι $\Delta = -384 < 0$, οπότε τα $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ και $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ είναι σημεία δεσμευμένου τοπικού ελάχιστου της f, η δε ελάχιστη τιμή είναι

$$f_{\min} = f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 = 1.$$

Στη δεύτερη περίπτωση, ευρίσκεται ότι $\Delta = 384 > 0$, οπότε τα $\left(\sqrt{2}, -\sqrt{2}\right)$ και $\left(-\sqrt{2}, \sqrt{2}\right)$ είναι σημεία δεσμευμένου τοπικού μέγιστου της f, η δε μέγιστη τιμή είναι

$$f_{\max} = f\left(\sqrt{2}, -\sqrt{2}\right) = \left(\sqrt{2}\right)^2 + \left(-\sqrt{2}\right)^2 = 4.$$

Άρα η ελάχιστη και η μέγιστη απόσταση της αρχής των αξόνων από τα σημεία της καμπύλης με εξίσωση $5x^2+6xy+5y^2=8$ είναι αντίστοιχα:

$$d_{\min} = \sqrt{f_{\min}} = 1 \qquad \text{και} \qquad d_{\max} = \sqrt{f_{\max}} = 2.$$

ΑΣΚΗΣΗ 52

Να ευρεθούν τα στάσιμα σημεία της συνάρτησης
$$f\left(x,y\right)=x^3+y^3-3x-12y+20/\mathbb{R}^2,$$
και στη συνέχεια να προσδιορισθεί η φύση τους.

ΛΥΣΗ

Αρχικά, ευρίσκουμε τις μερικές παραγώγους πρώτης και δεύτερης τάξης της f.
$$\frac{\partial f}{\partial x}=3\left(x^2-1\right),\ \frac{\partial f}{\partial y}=3\left(y^2-4\right)$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=6x,\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=6y,\ \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}=0.$$

Τα στάσιμα σημεία της f προκύπτουν ως λύσεις του συστήματος
$$\left\{\begin{matrix}\dfrac{\partial f}{\partial x}=0\\ \dfrac{\partial f}{\partial y}=0\end{matrix}\right\}\Leftrightarrow\left\{\begin{matrix}x=1 \ \text{ή} \ x=-1\\ y=2 \ \text{ή} \ y=-2\end{matrix}\right\}.$$

Επομένως, τα στάσιμα σημεία της f είναι τα $\left(1,2\right)$, $\left(-1,-2\right)$, $\left(-1,2\right)$ και $\left(1,-2\right)$.

Στη συνέχεια, θα προσδιορισθεί η φύση τους, με τη βοήθεια της συνθήκης δεύτερης τάξης.

Είναι

$$D = \begin{vmatrix} 6x & 0 \\ 0 & 6y \end{vmatrix} = 36xy.$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3\left(x^2 - 1\right),\ \frac{\partial f}{\partial y} = 3\left(y^2 - 4\right)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 6x,\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 6y,\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 0$$

Διακρίνουμε τις παρακάτω περιπτώσεις:

1. Για το σημείο $\left(1,2\right)$ είναι

$$D = 72 > 0,\ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 6 > 0 \text{ και } \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 12 > 0,$$

οπότε το $\left(1,2\right)$ είναι σημείο τοπικού ελαχίστου.

2. Για το σημείο $\left(-1,-2\right)$ είναι

$$D = 72 > 0,\ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -6 < 0 \text{ και } \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -12 < 0,$$

οπότε το $\left(-1,-2\right)$ είναι σημείο τοπικού μεγίστου.

3. Για τα σημεία $\left(-1,2\right)$ και $\left(1,-2\right)$ είναι $D = -72 < 0$, οπότε η συνάρτηση f παρουσιάζει σαγματικά σημεία στα $\left(-1,2\right)$ και $\left(1,-2\right)$.

ΑΣΚΗΣΗ 53

Να ευρεθούν τα στάσιμα σημεία της συνάρτησης

$f\left(x,y\right)=\sin x+\sin y+\cos\left(x+y\right)/\left[0,2\pi\right]\times\left[0,2\pi\right]$,

και στη συνέχεια να προσδιορισθεί η φύση τους.

ΛΥΣΗ

Αρχικά, ευρίσκουμε τις μερικές παραγώγους πρώτης και δεύτερης τάξης της δοσμένης συνάρτησης.

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\cos x-\sin\left(x+y\right),\ \frac{\partial f}{\partial y}=\cos y-\sin\left(x+y\right),$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=-\left(\sin x+\cos\left(x+y\right)\right),\quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=-\left(\sin y+\cos\left(x+y\right)\right),$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=-\cos\left(x+y\right)=\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}.$$

Τα στάσιμα σημεία της δοσμένης συνάρτησης προκύπτουν σαν λύσεις του συστήματος

$$\left\{\begin{array}{l}\dfrac{\partial f}{\partial x}=0\\[2mm] \dfrac{\partial f}{\partial y}=0\end{array}\right\}\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}\cos x-\sin\left(x+y\right)=0\\ \cos y-\sin\left(x+y\right)=0\end{array}\right\}.$$

Από το παραπάνω σύστημα προκύπτει ότι

$$\cos x=\cos y\Leftrightarrow x=y \text{ ή } x=2\pi-y.$$

Διακρίνουμε τις παρακάτω περιπτώσεις:

1. Αν $x = y$ τότε θα είναι

$$\cos x = \sin 2x \Leftrightarrow \cos x = 2\sin x \cos x$$

$$\Leftrightarrow \cos x\left(1 - 2\sin x\right) = 0 \Leftrightarrow \cos x = 0 \text{ ή } \sin x = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} \text{ ή } x = \frac{3\pi}{2} \text{ ή } x = \frac{\pi}{6} \text{ ή } x = \frac{5\pi}{6}.$$

2. Αν $x = 2\pi - y$ τότε θα είναι

$$\cos x = \sin 2\pi = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} \text{ ή } x = \frac{3\pi}{2}.$$

Σε αυτή την περίπτωση, $y = \frac{3\pi}{2}$ όταν $x = \frac{\pi}{2}$ και $y = \frac{\pi}{2}$ όταν $x = \frac{3\pi}{2}$.

Κατόπιν τούτων, τα στάσιμα σημεία είναι $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, $\left(\frac{3\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$, $\left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}\right)$, $\left(\frac{5\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\right)$, $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$ και $\left(\frac{3\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

Θα εξετάσουμε τη φύση τους, με τη βοήθεια της συνθήκης δευτέρας τάξης.

Γι' αυτό, θεωρούμε την ορίζουσα

$$D=\begin{vmatrix}\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial y\partial x} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}-\left(\sin x+\cos\left(x+y\right)\right) & -\cos\left(x+y\right)\\ -\cos\left(x+y\right) & -\left(\sin y+\cos\left(x+y\right)\right)\end{vmatrix}$$

$$=\sin x\sin y+\left(\sin x+\sin y\right)\cos\left(x+y\right).$$

1. Για το σημείο $\left(\frac{3\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right)$ είναι $D=3>0$ και $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\left(\frac{3\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right)=\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\left(\frac{3\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right)=2>0$, οπότε το σημείο αυτό είναι σημείο τοπικού ελάχιστου.

2. Για τα $\left(\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{6}\right)$ και $\left(\frac{5\pi}{6},\frac{5\pi}{6}\right)$ είναι $D=\frac{3}{4}>0$ και $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\left(\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\left(\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\left(\frac{5\pi}{6},\frac{5\pi}{6}\right)=\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\left(\frac{5\pi}{6},\frac{5\pi}{6}\right)=-1<0$ οπότε τα σημεία αυτά είναι σημεία τοπικών μέγιστων.

3. Για τα σημεία $\left(\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right),\left(\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right)$ και $\left(\frac{3\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ είναι $D=-1<0$, οπότε στα σημεία αυτά η συνάρτηση παρουσιάζει σαγματικό σημείο.

ΑΣΚΗΣΗ 56

Να ευρεθούν οι ακρότατες τιμές της συνάρτησης

$$f(x,y)=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}/\mathbb{R}^*\times\mathbb{R}^*,\ \text{όταν}\ \frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}=\frac{1}{2}.$$

ΛΥΣΗ

Θεωρούμε τις συναρτήσεις

$$\varphi(x,y)=\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}-\frac{1}{2}/\mathbb{R}^*\times\mathbb{R}^* \qquad \text{και}$$

$$L(x,y)=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\lambda\left(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}-\frac{1}{2}\right)/\mathbb{R}^*\times\mathbb{R}^*.$$

Αρχικά, ευρίσκουμε τις λύσεις του συστήματος

$$\left\{\begin{array}{c}\dfrac{\partial L}{\partial x}=0\\ \dfrac{\partial L}{\partial y}=0\\ \varphi(x,y)=0\end{array}\right\}\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{c}-\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{2\lambda}{x^3}=0\\ -\dfrac{1}{y^2}-\dfrac{2\lambda}{y^3}=0\\ \dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{y^2}=\dfrac{1}{2}\end{array}\right\}\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{c}x=y=-2\lambda\\ \dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{y^2}=\dfrac{1}{2}\end{array}\right\}$$

$$\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{c}x=y=-2\lambda\\ \lambda=\pm1\end{array}\right\}$$

Άρα οι λύσεις του παραπάνω συστήματος είναι $(\lambda=1,x=y=-2)$ και $(\lambda=-1,x=y=2)$.

Κατόπιν, υπολογίζουμε τις μερικές παραγώγους δεύτερης τάξης της L και τις μερικές παραγώγους πρώτης τάξης της φ.

$$\frac{\partial^2 L}{\partial x^2}=\frac{2}{x^3}+\frac{6\lambda}{x^4},\ \frac{\partial^2 L}{\partial y^2}=\frac{2}{y^3}+\frac{6\lambda}{y^4},\ \frac{\partial^2 L}{\partial x\partial y}=0=\frac{\partial^2 L}{\partial y\partial x}$$

$$,\ \frac{\partial\varphi}{\partial x}=-\frac{2}{x^3} \text{ και } \frac{\partial\varphi}{\partial y}=-\frac{2}{y^3}.$$

Έτσι, αφού $x=y=-2\lambda$ προκύπτει ότι

$$\Delta=\begin{vmatrix} \frac{2}{x^3}+\frac{6\lambda}{x^4} & 0 & -\frac{2}{x^3} \\ 0 & \frac{2}{y^3}+\frac{6\lambda}{y^4} & -\frac{2}{y^3} \\ -\frac{2}{x^3} & -\frac{2}{y^3} & 0 \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} \frac{2}{-8\lambda^3}+\frac{6\lambda}{16\lambda^4} & 0 & \frac{2}{8\lambda^3} \\ 0 & \frac{2}{-8\lambda^3}+\frac{6\lambda}{16\lambda^4} & \frac{2}{8\lambda^3} \\ \frac{2}{8\lambda^3} & \frac{2}{8\lambda^3} & 0 \end{vmatrix}=-\frac{1}{64\lambda^9}.$$

Έτσι, για το $(-2,-2)$ είναι $\lambda=1$ και $\Delta=-\frac{1}{64}<0$, οπότε η f παίρνει την ελάχιστη τιμή της που είναι ίση με $f(-2,-2)=-1$.

Για το $(2,2)$ είναι $\lambda=-1$ και $\Delta=\frac{1}{64}>0$, οπότε η f παίρνει τη μέγιστη τιμή της που είναι ίση με $f(2,2)=1$.

ΑΣΚΗΣΗ 57

Να ευρεθούν οι ακρότατες τιμές της συνάρτησης

$$f(x,y)=\cos^2 x+\cos^2 y/\mathbb{R}^2, \text{ όταν } x-y=\frac{\pi}{4}.$$

ΛΥΣΗ

Θεωρούμε τις συναρτήσεις $\varphi(x,y)=x-y-\frac{\pi}{4}/\mathbb{R}^2$

και $L(x,y)=\cos^2 x+\cos^2 y+\lambda\left(x-y-\frac{\pi}{4}\right)/\mathbb{R}^2.$

Αρχικά, ευρίσκουμε τις λύσεις του συστήματος

$$\left\{\begin{array}{c}\frac{\partial L}{\partial x}=0\\ \frac{\partial L}{\partial y}=0\\ \varphi(x,y)=0\end{array}\right\}\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{c}\sin 2x=\lambda\\ \sin 2y=-\lambda\\ x-y=\frac{\pi}{4}\end{array}\right\}.$$

Από τις δύο πρώτες εξισώσεις προκύπτει ότι

$$\sin 2x=\sin(-2y)\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{c}2x=2k\pi-2y\\ 2x=2k\pi+\pi+2y\end{array}\right\}, \text{ όπου } k\in\mathbb{Z}.$$

Η δεύτερη από τις παραπάνω δύο σχέσεις, η οποία ισοδύναμα γράφεται $x-y=k\pi+\frac{\pi}{2}$, απορρίπτεται, διότι από την τρίτη εξίσωση του συστήματος θα είχαμε τότε ότι $k\pi+\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{4}\Leftrightarrow k=-\frac{1}{4}$, το οποίο είναι αδύνατο, αφού $k\in\mathbb{Z}$.

Άρα, το αρχικό σύστημα ισοδυναμεί με το σύστημα

$$\left\{\begin{array}{l} x+y=k\pi \\ x-y=\dfrac{\pi}{4} \\ \lambda=\sin 2x \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=\left(k+\dfrac{1}{4}\right)\dfrac{\pi}{2} \\ y=\left(k-\dfrac{1}{4}\right)\dfrac{\pi}{2} \\ \lambda=(-1)^k\dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{array}\right\}, \text{ όπου } k\in\mathbb{Z}.$$

Θεωρούμε την ορίζουσα

$$\Delta=\begin{vmatrix} \dfrac{\partial^2 L}{\partial x^2} & \dfrac{\partial^2 L}{\partial x\partial y} & \dfrac{\partial \varphi}{\partial x} \\ \dfrac{\partial^2 L}{\partial y\partial x} & \dfrac{\partial^2 L}{\partial y^2} & \dfrac{\partial \varphi}{\partial y} \\ \dfrac{\partial \varphi}{\partial x} & \dfrac{\partial \varphi}{\partial y} & 0 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} -2\cos 2x & 0 & 1 \\ 0 & -2\cos 2y & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$=2(\cos 2x+\cos 2y).$$

Αν $x=\left(k+\frac{1}{4}\right)\frac{\pi}{2}$ και $y=\left(k-\frac{1}{4}\right)\frac{\pi}{2}$, όπου $k\in\mathbb{Z}$ προκύπτει ότι

$$\cos 2x=\begin{cases} \dfrac{\sqrt{2}}{2}, & k \text{ άρτιος} \\ -\dfrac{\sqrt{2}}{2}, & k \text{ περιττός,} \end{cases} \qquad \cos 2y=\begin{cases} \dfrac{\sqrt{2}}{2}, & k \text{ άρτιος} \\ -\dfrac{\sqrt{2}}{2}, & k \text{ περιττός} \end{cases}$$

και επομένως, $\Delta=\begin{cases} 2\sqrt{2}, & k \text{ άρτιος} \\ -2\sqrt{2}, & k \text{ περιττός} \end{cases}$

Άρα $\Delta > 0$ όταν k άρτιος και $\Delta < 0$ όταν k περιττός.

Κατόπιν τούτων, η συνάρτηση $f/\mathbb{R}^2$ παίρνει ακρότατη τιμή όταν

$$x = \left(k + \frac{1}{4}\right)\frac{\pi}{2} \quad \text{και} \quad y = \left(k - \frac{1}{4}\right)\frac{\pi}{2},$$

η οποία είναι μέγιστη όταν ο k είναι άρτιος, ενώ είναι ελάχιστη όταν ο k είναι περιττός.

Η μέγιστη και η ελάχιστη τιμή της συνάρτησης είναι αντίστοιχα

$$f_{max} = f\left(\left(\frac{\pi}{8}, -\frac{\pi}{8}\right)\right) = \cos^2\left(\frac{\pi}{8}\right) + \cos^2\left(-\frac{\pi}{8}\right)$$
$$= 2\cos^2\left(\frac{\pi}{8}\right) = 1 + \cos\frac{\pi}{4} = 1 + \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$f_{min} = f\left(\left(\frac{5\pi}{8}, \frac{3\pi}{8}\right)\right) = \cos^2\left(\frac{5\pi}{8}\right) + \cos^2\left(\frac{3\pi}{8}\right)$$
$$= 2\cos^2\left(\frac{3\pi}{8}\right) = 1 + \cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}.$$