ΑΝΑΛΥΣΗ ΙΙ

ΚΕΦ.10: ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΣ LAPLACE
Σημειώσεις Φροντιστηρίου

Τμήμα Πληροφορικής
Πανεπιστήμιο Πειραιώς

Μετασχηματισμός Laplace

Ορισμός

Μια συνάρτηση $f/[0,+\infty)$ ονομάζεται ***κατά τμήματα συνεχής*** *ανν, για κάθε $b>0$, το πλήθος των σημείων $\xi \in [0,b]$ ασυνέχειας είναι πεπερασμένο και η f παρουσιάζει ασυνέχεια πρώτου είδους σε αυτά (δηλαδή υπάρχουν τα πλευρικά όρια $f_-(\xi) = \lim_{x\to\xi^-} f(x)$ και $f_+(\xi) = \lim_{x\to\xi^+} f(x)$, αλλά δεν είναι και τα δύο ίσα με $f(\xi)$).*

Ορισμός

Μια συνάρτηση $f/[0,+\infty)$ ονομάζεται ***εκθετικής τάξης*** *a, όπου $a\in\mathbb{R}$, αν υπάρχουν $c, t_0 > 0$, τέτοιοι ώστε*

$$|f(t)| \le ce^{at}, \qquad \text{για κάθε } t > t_0.$$

Συμβολίζουμε με L_a το σύνολο συναρτήσεων με πεδίο ορισμού $[0,+\infty)$ που είναι κατά τμήματα συνεχείς και εκθετικής τάξης a.

Ορισμός

Το γενικευμένο ολοκλήρωμα

$$\mathcal{L}[f(t)] := \int_0^{+\infty} f(t)e^{-st}dt,$$

για τις τιμές του s *που συγκλίνει, ορίζει μια συνάρτηση* $F(s)$*, η οποία ονομάζεται* ***μετασχηματισμός* Laplace** *της συνάρτησης* $f/[0,+\infty)$.

Πρόταση

Αν $f \in L_a$*, τότε το γενικευμένο ολοκλήρωμα* $F(s) = \mathcal{L}[f(t)]$ *συγκλίνει απολύτως για κάθε* $s > a$ *και ομοιόμορφα σε κάθε διάστημα* $[b,+\infty)$*, με* $b > a$*, και* $\lim\limits_{s\to+\infty} F(s) = 0$.

Παρατηρήσεις στο συμβολισμό

Στα επόμενα, χρησιμοποιούμε πάντα τις μεταβλητές

- t για την αρχική συνάρτηση f και
- s για το μετασχηματισμό της,

ο οποίος συμβολίζεται με το αντίστοιχο κεφαλαίο γράμμα, δηλαδή με F.
Ωστόσο, αυτό δεν είναι δεσμευτικό.
Για παράδειγμα, αν θέλουμε να συμβολίσουμε με u τη μεταβλητή της F, τότε γράφουμε $F(u)$ ή, πιο επίσημα,

$$\mathcal{L}[f(t)](u)$$

Πρόταση

Αν η δυναμοσειρά

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$$

συγκλίνει για κάθε $t \geq 0$ *και υπάρχουν* $c, a > 0$, *και* $n_0 \in \mathbb{N}$, *τέτοιοι ώστε*

$$n \geq n_0 \Rightarrow |a_n| \leq c\frac{a^n}{n!},$$

τότε

$$\mathcal{L}[f(t)] = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \mathcal{L}[t^n] = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{n!}{s^{n+1}}, \text{ για κάθε } s > a.$$

Μετασχηματισμός Laplace περιοδικής συνάρτησης

Πρόταση

Αν ορίζεται ο μετασχηματισμός Laplace μιας περιοδικής συνάρτησης $f/[0,+\infty)$, *με περίοδο* T, *τότε είναι*

$$\mathcal{L}[f(t)] = \frac{1}{1-e^{-sT}} \int_0^T e^{-st} f(t)dt.$$

Βασικοί μετασχηματισμοί Laplace

B1. $\mathcal{L}[e^{at}] = \dfrac{1}{s-a}$, για $s > a$.

Ειδικά, $\mathcal{L}[1] = \dfrac{1}{s}$, για $s > 0$.

B2. $\mathcal{L}[t^a] = \dfrac{\Gamma(a+1)}{s^{a+1}}$, για $s > 0$ και $a > -1$.

Ειδικά, $\mathcal{L}[t^n] = \dfrac{n!}{s^{n+1}}$, για $s > 0$ και $n \in \mathbb{N}$.

B3. $\mathcal{L}[\cos(at)] = \dfrac{s}{s^2+a^2}$ και $\mathcal{L}[\sin(at)] = \dfrac{a}{s^2+a^2}$, για $s > 0$.

B4. $\mathcal{L}[\cosh(at)] = \dfrac{s}{s^2-a^2}$ και $\mathcal{L}[\sinh(at)] = \dfrac{a}{s^2-a^2}$, για $s > |a|$.

Ιδιότητες (1)

Αν $f, f_1, f_2 \in L_c$, για κάποιο $c > 0$, και $F(s) = \mathcal{L}[f(t)]$, τότε

I1. $\mathcal{L}[c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t)] = c_1 \mathcal{L}[f_1(t)] + c_2 \mathcal{L}[f_2(t)]$ (γραμμικότητα).

I2. $\mathcal{L}[e^{at} f(t)] = F(s-a)$, $s - a > c$.

I3. Αν $g(t) = \begin{cases} f(t-a) & t \geq a \\ 0 & t < a \end{cases}$, τότε $g \in L_c$ και
$\mathcal{L}[g(t)] = e^{-as} \mathcal{L}[f(t)]$, $(a > 0)$.

I4. $\mathcal{L}[f(at)] = \dfrac{1}{a} F\left(\dfrac{s}{a}\right)$, $a > 0$, $s > ca$.

I5. $\mathcal{L}[f'(t)] = sF(s) - f(0)$, $s > c$.

Ιδιότητες (2)

Ι6. $\mathcal{L}[f^{(n)}(t)] = s^n F(s) - s^{n-1} f(0) - s^{n-2} f'(0) - \cdots - f^{(n-1)}(0)$, $s > c$.

Ι7. $\mathcal{L}\left[\int_0^t f(u)du\right] = \frac{1}{s}F(s)$, $s > c$.

Ι8. $\mathcal{L}[t^n f(t)] = (-1)^n F^{(n)}(s)$, $s > c$, $n \in \mathbb{N}^*$.

Ι9. Αν $\lim_{t \to 0^+} \frac{f(t)}{t} \in \mathbb{R}$, τότε $\mathcal{L}\left[\frac{f(t)}{t}\right] = \int_s^{+\infty} F(u)du$, $s > c$.

Συνέλιξη

Ορισμός

Αν $f, g \in L_a$, τότε ορίζεται η συνέλιξή τους ως η συνάρτηση

$$(f * g)(t) = f(t) * g(t) = \int_0^t f(x)g(t-x)dx.$$

Η συνέλιξη ικανοποιεί της ιδιότητες:

$$f * g = g * f, \qquad (f * g) * h = f * (g * h), \qquad f * (g + h) = f * g + f * h.$$

Πρόταση

Αν $f, g \in L_a$, τότε $\mathcal{L}[(f * g)(t)] = \mathcal{L}[f(t)]\mathcal{L}[g(t)]$.

Επιπλέον, αποδεικνύεται ότι $f, g \in L_a \Rightarrow f * g \in L_{a+\varepsilon}$, για κάθε $\varepsilon > 0$.

Αντίστροφος μετασχηματισμός Laplace

Πρόταση

Αν $f, g/[0, +\infty)$ *συνεχείς και* $\mathcal{L}[f(t)] = \mathcal{L}[g(t)]$, *τότε είναι* $f(t) = g(t)$.

Ορισμός

Αν $f/[0, +\infty)$ *και* $F(s) = \mathcal{L}[f(t)]$, *τότε η συνάρτηση* $f(t)$ *ονομάζεται* ***αντίστροφος μετασχηματισμός*** **Laplace** *της συνάρτησης* F *και συμβολίζεται με* $f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)]$.
Βάσει της προηγούμενης πρότασης, αν f *συνεχής, τότε ο αντίστροφος μετασχηματισμός της* $F(s) = \mathcal{L}[f(t)]$ *ορίζεται μονοσήμαντα.*

Βασικοί αντίστροφοι μετασχηματισμοί Laplace

B1′. $\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s-a}\right] = e^{at}$, για $s > a$.

B2′. $\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{\Gamma(a+1)}{s^{a+1}}\right] = t^{a}$, για $s > 0$ και $a > -1$.

B3′. $\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s}{s^2+a^2}\right] = \cos(at)$ και $\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{a}{s^2+a^2}\right] = \sin(at)$, για $s > 0$.

B4′. $\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s}{s^2-a^2}\right] = \cosh(at)$ και $\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{a}{s^2-a^2}\right] = \sinh(at)$, για $s > |a|$.

Ιδιότητες αντίστροφου ML

Αν f συνεχής, $f \in L_c$, για κάποιο $c > 0$, και $\mathcal{L}[f(t)] = F(s)$, τότε

I1′. $\mathcal{L}^{-1}[c_1 F_1(s) + c_2 F_2(s)] = c_1 \mathcal{L}^{-1}[F_1(s)] + c_2 \mathcal{L}^{-1}[F_2(s)]$, $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

I2′. $\mathcal{L}^{-1}[F(s-a)] = e^{at} f(t)$, $s - a > c$.

I3′. $\mathcal{L}^{-1}[e^{-as} F(s)] = \begin{cases} f(t-a) & t \geq a \\ 0 & t < a \end{cases}$.

I4′. $\mathcal{L}^{-1}[F(as)] = \dfrac{1}{a} f\left(\dfrac{t}{a}\right)$, $a > 0$, $s > ca$.

I5′. $\mathcal{L}^{-1}[sF(s))] = f'(t)$, όταν $f(0) = 0$.

I6′. $\mathcal{L}^{-1}[s^n F(s)] = f^{(n)}(t)$, όταν $f(0) = f'(0) = \cdots = f^{(n-1)}(0)$.

I7′. $\mathcal{L}^{-1}\left[\dfrac{1}{s} F(s)\right] = \displaystyle\int_0^t f(u)du$.

I8′. $\mathcal{L}^{-1}[F^{(n)}(s)] = (-1)^n t^n f(t)$, $n \in \mathbb{N}$.

I9′. Αν $\displaystyle\lim_{t \to 0^+} \frac{f(t)}{t} \in \mathbb{R}$, τότε $\mathcal{L}^{-1}\left[\displaystyle\int_s^{+\infty} F(u)du\right] = \dfrac{f(t)}{t}$.

Άσκηση (Λυμένη άσκηση 11)

Να ευρεθούν οι μετασχηματισμοί Laplace των συναρτήσεων $f, g, h/[0, +\infty)$, *με*

i) $f(t) = e^{-2t} t \cos 3t$

ii) $g(t) = \int_0^t u \cosh u du$

iii) $h(t) = \int_0^t \frac{\sinh u}{u} du$

Λύση

$i)$ $f(t) = e^{-2t} t \cos 3t$.

Θέτουμε $f_1(t) = \cos 3t$ και $f_2(t) = tf_1(t)$, οπότε $f(t) = e^{-2t} f_2(t)$. Θα εφαρμόσουμε αλυσιδωτά τις κατάλληλες ιδιότητες του ML ξεκινώντας από την $f_1(t)$. Από τον βασικό τύπο $\mathcal{L}[\cos at] = \dfrac{s}{s^2 + a^2}$, βρίσκουμε $F_1(s) = \dfrac{s}{s^2 + 9}$. Στη συνέχεια, εφαρμόζοντας την ιδιότητα Ι8, έχουμε ότι

$$F_2(s) = \mathcal{L}[tf_1(t)] = -F_1'(s) = -\left(\frac{s}{s^2 + 9}\right)' = \frac{s^2 - 9}{(s^2 + 9)^2}.$$

Τέλος, βάσει της ιδιότητας Ι2, βρίσκουμε ότι

$$F(s) = \mathcal{L}[e^{-2t} f_2(t)] = F_2(s + 2) = \frac{(s + 2)^2 - 9}{((s + 2)^2 + 9)^2}. \quad \text{(Πεδίο ορισμού;)}$$

Λύση (συνέχεια)

ii) $g(t) = \int_0^t u \cosh u du$
Ομοίως, θέτουμε $g_1(t) = \cosh t$ και $g_2(t) = tg_1(t)$, οπότε
$G_1(s) \overset{B4}{=} \dfrac{s}{s^2-1}$ και

$$G_2(s) \overset{I8}{=} -G_1'(s) = -\left(\frac{s}{s^2-1}\right)' = \frac{s^2+1}{(s^2-1)^2}.$$

Τέλος, βάσει της ιδιότητας I7, βρίσκουμε ότι

$$G(s) = \mathcal{L}\left[\int_0^t g_2(u)du\right] = \frac{1}{s}G_2(s) = \frac{s^2+1}{s(s^2-1)^2}.$$

Λύση (συνέχεια)

iii) $h(t) = \int_0^t \frac{\sinh u}{u} du$. Θέτουμε $h_1(t) = \sinh t$ και $h_2(t) = \frac{h_1(t)}{t}$, οπότε $H_1(s) \overset{B4}{=} \frac{1}{s^2-1} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s-1} - \frac{1}{s+1}\right)$, $s > 1$, και, αφού

$$\lim_{t\to 0^+} \frac{h_1(t)}{t} = \lim_{t\to 0^+} \frac{e^t - e^{-t}}{2t} = \lim_{t\to 0^+} \frac{(e^t - e^{-t})'}{(2t)'} = \lim_{t\to 0^+} \frac{e^t + e^{-t}}{2} = 1,$$

μπορούμε να εφαρμόσουμε την ιδιότητα 9, παίρνοντας

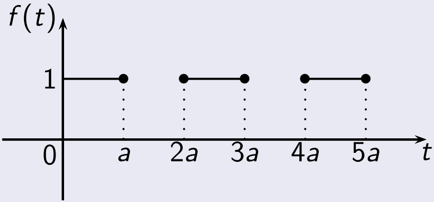
$$H_2(s) \overset{I9}{=} \int_s^{+\infty} H_1(u)du = \frac{1}{2}\int_s^{+\infty} \left(\frac{1}{u-1} - \frac{1}{u+1}\right) du$$
$$\overset{s\geq 1}{=} \frac{1}{2}\left[\ln \frac{u-1}{u+1}\right]_s^{+\infty} = \frac{1}{2}\left(\ln 1 - \ln \frac{s-1}{s+1}\right) = \frac{1}{2}\ln\frac{s+1}{s-1}$$

Τέλος, βάσει της ιδιότητας I7, βρίσκουμε ότι

$$H(s) = \mathcal{L}\left[\int_0^t h_2(u)du\right] = \frac{1}{s}H_2(s) = \frac{1}{2s}\ln\frac{s+1}{s-1}.$$

Άσκηση (Άλυτη άσκηση 17)

Να ευρεθεί ο μετασχηματισμός Laplace της περιοδικής συνάρτησης $f/[0,+\infty)$, *με γραφική παράσταση*



Λύση.

Όπως φαίνεται στο σχήμα, η f έχει περίοδο $2a$, οπότε

$$F(s) = \frac{1}{1-e^{-2as}} \int_0^{2a} f(t)e^{-st}dt = \frac{1}{1-e^{-2as}} \int_0^{a} e^{-st}dt$$

$$= \frac{1}{1-e^{-2as}} \left[\frac{e^{-st}}{-s}\right]_0^a = \frac{1-e^{-as}}{s(1-(e^{-as})^2)} = \frac{1}{s(1+e^{-as})}$$

Άσκηση (Λυμένη άσκηση 12 (ΦΕΒ 2017))

Να αποδειχθεί ότι

$$\mathcal{L}\left[\frac{e^{-bt}-e^{-at}}{t}\right]=\ln\left(\frac{s+a}{s+b}\right), \quad a,b\in\mathbb{R}, s>\max\{-a,-b\}.$$

Στη συνέχεια, να υπολογισθεί το γενικευμένο ολοκλήρωμα

$$\int_0^{+\infty}\frac{e^{-10t}-e^{-16t}}{t}dt.$$

Λύση

Θέτουμε $f(t)=e^{-bt}-e^{-at}$ και $g(t)=f(t)/t$, επομένως

$$F(s)\overset{B1}{=}\frac{1}{s+b}-\frac{1}{s+a}, \qquad s>\max\{-a,-b\}.$$

Λύση (συνέχεια)

Επιπλέον, επειδή

$$\lim_{t\to 0^+} \frac{e^{-bt}-e^{-at}}{t} = \lim_{t\to 0^+} \frac{(e^{-bt}-e^{-at})'}{t'} = \lim_{t\to 0^+} (ae^{-at}-be^{-bt}) = a-b \in \mathbb{R}$$

από την ιδιότητα Ι9 έπεται, για $s > \max\{-a,-b\}$, ότι

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[g(t)] &= \int_s^{+\infty} F(u)du = \int_s^{+\infty} \left(\frac{1}{u+b} - \frac{1}{u+a}\right) du \\ &= [\ln(u+b) - \ln(u+a)]_s^{+\infty} = \left[\ln \frac{u+b}{u+a}\right]_s^{+\infty} \\ &= \ln 1 - \ln \frac{s+b}{s+a} = \ln \frac{s+a}{s+b}\end{aligned}$$

Κατόπιν τούτων, θέτοντας $b = 10$, $a = 16$ και $s = 0$, έχουμε ότι

$$\ln \frac{16}{10} = G(0) = \int_0^{+\infty} g(t)e^{-0t}dt = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-10t}-e^{-16t}}{t}dt.$$

Προσοχή: Στο τελευταίο βήμα, επιλέγουμε a, b, s με $s > \max\{-a,-b\}$.

Άσκηση (Λυμένη άσκηση 31 (ΙΟΥΝ 2014))

Να ευρεθεί ο αντίστροφος μετασχηματισμός Laplace $f(t)$ *της συνάρτησης* $F(s) = \ln\left(\frac{s+a}{s+b}\right)$, $s > \max\{-a, -b\}$, $a, b \in \mathbb{R}$.

Λύση

Θα χρησιμοποιηθεί η ιδιότητα Ι8΄: $-tf(t) = \mathcal{L}^{-1}[F'(s)]$. Η παραγώγιση της F γίνεται απλούστερη αν γράψουμε την F στη μορφή

$$F(s) = \ln\left(\frac{s+a}{s+b}\right) = \ln(s+a) - \ln(s+b).$$

Είναι λοιπόν

$$-tf(t) = \mathcal{L}^{-1}[F'(s)] = \mathcal{L}^{-1}[\frac{1}{s+a} - \frac{1}{s+b}] = e^{-at} - e^{-bt},$$

άρα $f(t) = (e^{-bt} - e^{-at})/t$.

Παρατήρηση: Η αντίστοιχη ιδιότητα Ι8 του ML είναι η

$$\mathcal{L}[tf(t)] = -F'(s)$$

και θα μπορούσε να χρησιμοποιηθεί αντί της Ι8′ για τη λύση της άσκησης, δηλαδή

$$\mathcal{L}[-tf(t)] = F'(s) = \frac{1}{s+a} - \frac{1}{s+b} = \mathcal{L}[e^{-at} - e^{-bt}] = \mathcal{L}[-t\frac{e^{-bt} - e^{-at}}{t}],$$

άρα $f(t) = (e^{-bt} - e^{-at})/t$.

Όπως φαίνεται από την παραπάνω παρατήρηση, μπορούμε να χρησιμοποιούμε μόνο τις 9 ιδιότητες του ML αντί των αντίστοιχων 9 του αντίστροφου ML, για τον προσδιορισμό ενός αντίστροφου ML.

Ομοίως λύνεται και η επόμενη άσκηση. Εναλλακτικά, θα λυθεί με χρήση των γνωστών δυναμοσειρών

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n, x \in (-1, 1], \quad \cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}, x \in \mathbb{R}.$$

Άσκηση (Λυμένη άσκηση 32)

Να ευρεθεί ο αντίστροφος μετασχηματισμός Laplace $f(t)$ της συνάρτησης $F(s) = \ln\left(1 + \frac{1}{s^2}\right)$.

Λύση

Για $s \geq 1$, εφαρμόζοντας τον τύπο της λογαριθμικής σειράς για $x = 1/s^2 \in (0,1]$, καθώς και τον τύπο B2′: $\mathcal{L}^{-1}[\frac{1}{s^{2n}}] = \frac{t^{2n-1}}{\Gamma(2n)} = \frac{t^{2n-1}}{(2n-1)!}$, έχουμε ότι

$$\mathcal{L}^{-1}[\ln\left(1+\frac{1}{s^2}\right)] = \mathcal{L}^{-1}[\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\frac{1}{s^{2n}}] = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\mathcal{L}^{-1}[\frac{1}{s^{2n}}]$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\frac{t^{2n-1}}{(2n-1)!} = \frac{-2}{t}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}t^{2n}$$
$$= \frac{-2}{t}(\cos t - 1) = \frac{2}{t}(1-\cos t).$$

Παρατήρηση: Το παραπάνω αποτέλεσμα ισχύει για κάθε $s > 0$, παρόλο που η λογαριθμική σειρά συγκλίνει μόνο για $s \geq 1$.

Άσκηση (Λυμένη άσκηση 38 (ΙΟΥΝ 2013))

Να ευρεθεί ο αντίστροφος μετασχηματισμός Laplace $f(t)$ *της συνάρτησης* $F(s) = \dfrac{1}{s^2(s^2+9)}$

α) *με ανάλυση σε απλά κλάσματα,*

β) *με τη βοήθεια της συνέλιξης,*

γ) *με τη βοήθεια της ιδιότητας 7:* $\mathcal{L}^{-1}[\frac{1}{s}G(s)] = \int_0^t g(u)du$.

Λύση

α) Για απλοποίηση των πράξεων, κάνουμε ανάλυση σε απλά κλάσματα ως προς τη μεταβλητή s^2 (αντί για την s), βρίσκοντας ότι

$$\begin{aligned}
f(t) &= \mathcal{L}^{-1}[F(s)] = \mathcal{L}^{-1}[\frac{1}{s^2(s^2+9)}] = \mathcal{L}^{-1}[\frac{1}{9}\left(\frac{1}{s^2} - \frac{1}{s^2+9}\right)] \\
&= \frac{1}{9}\mathcal{L}^{-1}[\frac{1}{s^2}] - \frac{1}{27}\mathcal{L}^{-1}[\frac{3}{s^2+9}] \\
&= \frac{1}{9}t - \frac{1}{27}\sin 3t \\
&= \frac{3t - \sin 3t}{27}.
\end{aligned}$$

Λύση (συνέχεια)

β) Υπενθυμίζεται ότι $f(t) * g(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)G(s)]$. Επομένως,

$$3f(t) = \mathcal{L}^{-1}[3F(s)] = \mathcal{L}^{-1}[\frac{1}{s^2} \cdot \frac{3}{s^2+9}] = t * \sin 3t$$
$$= \int_0^t (t-z)\sin 3z dz = \frac{3t - \sin 3t}{9}.$$

(Το ολοκλήρωμα λύνεται με παραγοντική ολοκλήρωση.)

Λύση (συνέχεια)

γ) Εφαρμόζοντας διαδοχικά την ιδιότητα Ι7′: $\mathcal{L}^{-1}[\frac{1}{s}G(s)] = \int_0^t g(u)du$, ξεκινώντας από τη συνάρτηση $g(t) = \sin 3t$, με $G(s) = \frac{3}{s^2+9}$, έχουμε ότι

$$
\begin{aligned}
&\mathcal{L}^{-1}[\frac{3}{s^2+9}] = \sin 3t \\
\Rightarrow &\mathcal{L}^{-1}[\frac{3}{s(s^2+9)}] = \int_0^t \sin 3u du = \left[\frac{-\cos 3u}{3}\right]_0^t = \frac{1-\cos 3t}{3} \\
\Rightarrow &3f(t) = \mathcal{L}^{-1}[\frac{3}{s^2(s^2+9)}] = \int_0^t \frac{1-\cos 3u}{3} du = \left[\frac{3u - \sin 3u}{9}\right]_0^t \\
&= \frac{3t - \sin 3t}{9}.
\end{aligned}
$$

Η επόμενη άσκηση λύνεται μόνο με τη βοήθεια της συνέλιξης, καθώς η παράσταση δεν απλοποιείται με ανάλυση σε απλά κλάσματα.

Άσκηση (Λυμένη άσκηση 39 (ΣΕΠ 2014))

Να ευρεθεί, με τη βοήθεια της συνέλιξης, ο αντίστροφος μετασχηματισμός Laplace $f(t)$ της συνάρτησης $F(s) = \frac{1}{(s^2+1)^2}$.

Λύση

Θα χρησιμοποιηθεί η ταυτότητα

$$2 \sin a \sin b = \cos(a - b) - \cos(a + b)$$

η οποία προκύπτει με αφαίρεση κατά μέλη από τις ταυτότητες

$$\cos(a - b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$$

$$\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$$

Λύση (συνέχεια)

Αφού $F(s) = \mathcal{L}[\sin t]\mathcal{L}[\sin t]$, βάσει των ιδιοτήτων της συνέλιξης, έπεται ότι $f(t) = \sin t * \sin t$, οπότε

$$\begin{aligned} 2f(t) &= 2\int_0^t \sin z \sin(t-z)dz = \int_0^t (\cos(2z-t) - \cos t)dz \\ &= \left[\frac{\sin(2z-t)}{2}\right]_0^t - \cos t \int_0^t dz = \frac{\sin(t) - \sin(-t)}{2} - t\cos t \\ &= \sin t - t\cos t \end{aligned}$$

Άρα, $f(t) = \dfrac{\sin t - t\cos t}{2}$.

Άσκηση (Άλυτη άσκηση 41β)

Να ευρεθεί, με τη βοήθεια της συνέλιξης, ο αντίστροφος μετασχηματισμός Laplace $f(t)$ της συνάρτησης $F(s) = \dfrac{s}{(s^2+1)^3}$.

Λύση

Θεωρούμε τις συναρτήσεις $F_1(s) = \dfrac{s}{(s^2+1)^2}$ και $F_2(s) = \dfrac{1}{s^2+1}$, οπότε $F(s) = F_1(s)F_2(s)$.
Είναι

$$f_2(t) = \mathcal{L}^{-1}[F_2(s)] = \sin t$$

και, επειδή $F_1(s) = \dfrac{-1}{2}F_2'(s)$, έπεται ότι

$$f_1(t) = \mathcal{L}^{-1}[F_2(t)] = \frac{-1}{2}\mathcal{L}^{-1}[F_2'(s)] \overset{I8'}{=} \frac{-1}{2}(-1)t\mathcal{L}^{-1}[F_2(s)] = \frac{t\sin t}{2}.$$

Λύση (συνέχεια)

Επομένως, είναι

$$
\begin{aligned}
f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F_1(s)F_2(s)] &= \frac{t\sin t}{2} * \sin t \\
&= \frac{1}{2}\int_0^t z\sin z \ \sin(t-z) \ dz \\
&= \frac{1}{4}\int_0^t z(\cos(2z-t)-\cos t)dz \\
&= \frac{1}{4}\int_0^t z\cos(2z-t)dz - \frac{\cos t}{4}\int_0^t zdz
\end{aligned}
$$

Λύση (συνέχεια)

Το πρώτο ολοκλήρωμα λύνεται με παραγοντική ολοκλήρωση:

$$\int_0^t z\cos(2z-t)dz = \int_0^t z\left(\frac{\sin(2z-t)}{2}\right)' dz$$
$$= \left[z\frac{\sin(2z-t)}{2}\right]_0^t - \int_0^t \frac{\sin(2z-t)}{2}dz = \frac{t\sin t}{2} + \left[\frac{\cos(2z-t)}{4}\right]_0^t$$
$$= \frac{t\sin t}{2} + \frac{\cos t - \cos(-t)}{4} = \frac{t\sin t}{2},$$

ενώ το δεύτερο ολοκλήρωμα είναι το

$$\int_0^t z dz = \left[\frac{z^2}{2}\right]_0^t = \frac{t^2}{2}.$$

Επομένως, τελικά προκύπτει ότι $f(t) = \frac{t}{8}(\sin t - t\cos t)$.

Άσκηση (ΙΟΥΝ 2015 (βλ. λυμένη άσκηση 41))

Να λυθεί, με τη βοήθεια του μετασχηματισμού Laplace η διαφορική εξίσωση

$$y''(t) - 6y'(t) + 13y(t) = 0, \qquad y(0) = 1, y'(0) = 3.$$

Λύση.

Θέτουμε $Y(s) = \mathcal{L}[y(t)]$, οπότε βάσει των ιδιοτήτων
$\mathcal{L}[y'(t)] = sY(s) - y(0), \qquad \mathcal{L}[y''(t)] = s^2 Y(s) - sy(0) - y'(0),$
παίρνουμε διαδοχικά τις σχέσεις

$$\begin{aligned}
&s^2 Y(s) - sy(0) - y'(0) - 6(sY(s) - y(0)) + 13Y(s) = 0 \\
&(s^2 - 6s + 13)Y(s) - s + 3 = 0 \\
&Y(s) = \frac{s-3}{s^2 - 6s + 13} = \frac{s-3}{(s-3)^2 + 4} = \mathcal{L}[\cos 2t](s-3) \\
&y(t) = e^{3t} \cos 2t \quad (\text{I2': } \mathcal{L}^{-1}[F(s-a)] = e^{at} f(t))
\end{aligned}$$

Παρατηρήσεις

1. Σε μια ΔΕ τάξης k δίνονται k αρχικές τιμές $y(0), y'(0), \ldots,$ προκειμένου να βρεθεί η λύση της. Αν δεν δίνονται αρχικές τιμές, τότε τις θεωρούμε σταθερές και βρίσκουμε τη γενική λύση της ΔΕ, συναρτήσει αυτών των σταθερών.
2. Η προηγούμενη ΔΕ ήταν γραμμική με σταθερούς συντελεστές. Σε αυτή την περίπτωση, η εξίσωση της $Y(s)$ που προκύπτει είναι αλγεβρική και μπορεί να λυθεί εύκολα.
   Αν οι συντελεστές είναι πολυώνυμα του t, τότε η εξίσωση που προκύπτει θα είναι γραμμική ΔΕ πρώτης τάξης, όπως στην επόμενη άσκηση.

Άσκηση (Άλυτη άσκηση 47β)

Να λυθεί, με τη βοήθεια του μετασχηματισμού Laplace η διαφορική εξίσωση

$$y''(t) + ty'(t) - 2y(t) = 2, \qquad y(0) = y'(0) = 0.$$

Λύση.

Θέτουμε $Y(s) = \mathcal{L}[y(t)]$, οπότε βάσει των ιδιοτήτων
$\mathcal{L}[y'(t)] = sY(s) - y(0), \qquad \mathcal{L}[y''(t)] = s^2Y(s) - sy(0) - y'(0),$
και $\mathcal{L}[t^n y(t)] = (-1)^n Y^{(n)}(s)$, οπότε $\mathcal{L}[ty'(t)] = -\frac{d}{ds}\mathcal{L}[y'(t)]$,
παίρνουμε διαδοχικά τις σχέσεις

$$s^2Y(s) - sy(0) - y'(0) - (sY(s) - y(0))' - 2Y(s) = \frac{2}{s}$$

$$(s^2 - 3)Y(s) - sY'(s) = \frac{2}{s}$$

$$Y'(s) + \left(\frac{3}{s} - s\right) Y(s) = \frac{-2}{s^2}$$

Λύση (συνέχεια).

Για την επίλυση της ΓΔΕ $Y'(s) + \left(\frac{3}{s} - s\right) Y(s) = \frac{-2}{s^2}$, θέτουμε $\phi(s) = \frac{3}{s} - s$, υπολογίζουμε το αόριστο ολοκλήρωμα

$$\int \phi(s) ds = 3 \ln s - \frac{s^2}{2} + k, \qquad k \in \mathbb{R}$$

και θέτουμε $I(s) = e^{3 \ln s - s^2/2} = s^3 e^{-s^2/2}$. Πολλαπλασιάζοντας κατά μέλη τη ΓΔΕ με $I(s)$, παίρνουμε
$(I(s)Y(s))' = \frac{-2}{s^2} I(s) = -2se^{-s^2/2} = (2e^{-s^2/2})'$, οπότε
$I(s)Y(s) = c + 2e^{-s^2/2}$ και άρα $Y(s) = c\frac{e^{s^2/2}}{s^3} + \frac{2}{s^3}$.
Επειδή $\lim_{s \to +\infty} Y(s) = 0$, έπεται ότι $c = 0$ και άρα $y(t) = t^2$.

Άσκηση (Άλυτη άσκηση 45)

Να ευρεθεί, με τη βοήθεια του μετασχηματισμού Laplace, η γενική λύση της διαφορικής εξίσωσης

$$y''(t) - 2y'(t) + 2y(t) = t(\sin t - 2\cos t) + 2(\cos t - \sin t)$$

και στη συνέχεια να ευρεθεί η μερική λύση με $y(0) = y'(0) = 1$.

Λύση

Αρχικά, θέτουμε

$$f(t) = t(\sin t - 2\cos t) + 2(\cos t - \sin t)$$

το δεύτερο μέλος της ΔΕ και υπολογίζουμε τον ML του:

Λύση (συνέχεια)

$$
\begin{aligned}
f(t) &= t(\sin t - 2\cos t) + 2(\cos t - \sin t) \\
\Rightarrow \mathcal{L}[f(t)] &= \mathcal{L}[t(\sin t - 2\cos t)] + 2\mathcal{L}[\cos t - \sin t] \\
&= -\frac{d}{ds}\mathcal{L}[\sin t - 2\cos t](s) + 2\mathcal{L}[\cos t - \sin t] \\
&= -\left(\frac{1-2s}{s^2+1}\right)' + \frac{2(s-1)}{s^2+1} \\
&= \frac{(2s-1)'(s^2+1) - (2s-1)(s^2+1)'}{(s^2+1)^2} + \frac{2(s-1)}{s^2+1} \\
&= \frac{2(s^2+1) - (2s-1)2s + 2(s-1)(s^2+1)}{(s^2+1)^2} \\
&= \frac{2s(s^2+1) + (1-2s)2s}{(s^2+1)^2} = \frac{2s(s^2-2s+2)}{(s^2+1)^2}
\end{aligned}
$$

Λύση (συνέχεια)

Θέτουμε $Y(s) = \mathcal{L}[y(t)]$, οπότε βάσει των ιδιοτήτων

$$\mathcal{L}[y'(t)] = sY(s) - y(0), \quad \mathcal{L}[y''(t)] = s^2Y(s) - sy(0) - y'(0)$$

και $\mathcal{L}[t^n y(t)] = (-1)^n Y^{(n)}(s)$, παίρνουμε διαδοχικά τις σχέσεις

$$s^2Y(s) - sy(0) - y'(0) - 2(sY(s) - y(0)) + 2Y(s) = \frac{2s(s^2-2s+2)}{(s^2+1)^2}$$

$$(s^2-2s+2)Y(s) - sy(0) - y'(0) + 2y(0) = \frac{2s(s^2-2s+2)}{(s^2+1)^2}$$

$$Y(s) = \frac{2s}{(s^2+1)^2} + \frac{sy(0)+y'(0)-2y(0)}{s^2-2s+2}$$

$$Y(s) = \left(\frac{-1}{s^2+1}\right)' + \frac{y(0)(s-1)}{(s-1)^2+1} + \frac{y'(0)-y(0)}{(s-1)^2+1}$$

Λύση (συνέχεια)

Επομένως, η γενική λύση της ΔΕ είναι η

$$\begin{aligned}
&y(t) = \mathcal{L}^{-1}[Y(s)] \\
=&\mathcal{L}^{-1}[\left(\frac{-1}{s^2+1}\right)'] + y(0)\mathcal{L}^{-1}[\frac{s-1}{(s-1)^2+1}] + (y'(0)-y(0))\mathcal{L}^{-1}[\frac{1}{(s-1)^2+1}] \\
=&t\sin t + y(0)e^t\cos t + (y'(0) - y(0))e^t \sin t
\end{aligned}$$

και, θέτοντας $y(0) = y'(0) = 1$, βρίσκουμε ότι

$$y(t) = t\sin t + e^t \cos t.$$

Ασκήσεις - Επίλυση Διαφορικών Εξισώσεων

Άσκηση (Άλυτη άσκηση 48)

Να λυθεί, με τη βοήθεια του μετασχηματισμού Laplace, το σύστημα

$$\begin{cases} x'(t) + y(t) = 3e^{2t}, \\ y'(t) + x(t) = 0, \end{cases} \qquad \textit{όταν } x(0) = 2, y(0) = 0.$$

Λύση

Θέτοντας $X(s) = \mathcal{L}[x(t)]$ και $Y(s) = \mathcal{L}[y(t)]$ και εφαρμόζοντας ML κατά μέλη στις εξισώσεις του συστήματος, προκύπτει το σύστημα

$$\begin{cases} sX - x(0) + Y = \dfrac{3}{s-2} \\ sY - y(0) + X = 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} sX + Y = \dfrac{3}{s-2} - 2 \\ sY + X = 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} sX + Y = \dfrac{7-2s}{s-2} \\ X = -sY, \end{cases}$$

Αντικαθιστώντας την δεύτερη στην πρώτη, έχουμε ότι

$$-s^2 Y + Y = \frac{7-2s}{s-2}$$

Λύση (συνέχεια)

οπότε

$$Y = \frac{2s-7}{(s-2)(s^2-1)} \qquad \text{και} \qquad X = \frac{-s(2s-7)}{(s-2)(s^2-1)}$$

Με ανάλυση σε απλά κλάσματα, βρίσκουμε ότι

$$Y = -\frac{1}{s-2} + \frac{5/2}{s-1} - \frac{3/2}{s+1} \qquad \text{και} \qquad X = \frac{2}{s-2} - \frac{5/2}{s-1} - \frac{3/2}{1+s}$$

Επομένως,

$$y(t) = -e^{2t} + \frac{5}{2}e^{t} - \frac{3}{2}e^{-t} \qquad \text{και} \qquad x(t) = 2e^{2t} - \frac{5}{2}e^{t} - \frac{3}{2}e^{-t}.$$

Άσκηση (Λυμένη άσκηση 45 (ΣΕΠ 2015))

Να λυθούν, με τη βοήθεια του μετασχηματισμού Laplace, οι εξισώσεις

α) $y(t) = -\sinh t + \int_0^t \sin(t-z)y(z)dz$,

β) $\int_0^t \frac{y(z)}{(t-z)^{1-a}}dz = t^a$, *όπου* $0 < a < 1$,

γ) $\int_0^t y'(z)y(t-z)dz = 24t^3$, *όπου* $y(0) = 0$.

Λύση

α) $y(t) = -\sinh t + \int_0^t \sin(t-z)y(z)dz.$

Η δοσμένη εξίσωση γράφεται ισοδύναμα στη μορφή

$$y(t) = -\sinh t + y(t) * \sin t$$

Θέτοντας $Y(s) = \mathcal{L}[y(t)]$ και εφαρμόζοντας κατά μέλη Μ.L. στην εξίσωση, προκύπτει

$$Y(s) = -\frac{1}{s^2-1} + \frac{1}{s^2+1}Y(s)$$

οπότε

$$Y(s) = -\frac{s^2+1}{s^2(s^2-1)} = \frac{1}{s^2} - \frac{2}{s^2-1}.$$

Επομένως,

$$y(t) = t - 2\sinh t.$$

Λύση (συνέχεια)

β) $\int_0^t \frac{y(z)}{(t-z)^{1-a}} dz = t^a.$

Η δοσμένη εξίσωση γράφεται ισοδύναμα στη μορφή

$$y(t) * t^{a-1} = t^a.$$

Θέτοντας $Y(s) = \mathcal{L}[y(t)]$ και εφαρμόζοντας κατά μέλη ML στην εξίσωση, προκύπτει

$$Y(s)\frac{\Gamma(a)}{s^a} = \frac{\Gamma(a+1)}{s^{a+1}}$$

Επομένως, $Y(s) = \frac{\Gamma(a+1)}{\Gamma(a)s} = \frac{a}{s}$ και άρα $y(t) = a.$

Λύση (συνέχεια)

γ) $\int_0^t y'(z)y(t-z)dz = 24t^3$.

Η δοσμένη εξίσωση γράφεται ισοδύναμα στη μορφή

$$y'(t) * y(t) = 24t^3.$$

Θέτοντας $Y(s) = \mathcal{L}[y(t)]$ και εφαρμόζοντας κατά μέλη ML στην εξίσωση, προκύπτει

$$(sY(s) - y(0))Y(s) = \frac{24\Gamma(4)}{s^4} = \frac{24 \cdot 6}{s^4}$$

Επομένως, $sY^2(s) = \frac{24 \cdot 6}{s^4}$, δηλαδή $Y(s) = \pm\frac{12}{s^{5/2}}$ και άρα $y(t) = \pm\frac{12}{\Gamma(5/2)}t^{3/2}$.

Υπενθύμιση (γεωμετρική σειρά): $|x| < 1 \Rightarrow \dfrac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$

Άσκηση (Λυμένη άσκηση 46)

Να λυθεί, με τη βοήθεια του μετασχηματισμού Laplace, η εξίσωση $y(t) - 3y(t-1) + 2y(t-2) = 1$, *όταν* $t < 0 \Rightarrow y(t) = 0$.

Λύση.

Θέτοντας $Y(s) = \mathcal{L}[y(t)]$, από την ιδιότητα 3 προκύπτει ότι $\mathcal{L}[y(t-a)] = e^{-as}Y(s)$, για κάθε $a > 0$. Επομένως, $Y(s) - 3e^{-s}Y(s) + 2e^{-2s}Y(s) = 1/s$, οπότε

$$Y(s) = \frac{1}{s(1-3e^{-s}+2e^{-2s})} = \frac{1}{s(1-e^{-s})(1-2e^{-s})}$$

$$= \frac{1}{s}\left(\frac{2}{1-2e^{-s}} - \frac{1}{1-e^{-s}}\right) \stackrel{*}{=} 2\sum_{n=0}^{\infty} 2^n \frac{e^{-ns}}{s} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-ns}}{s}$$

* Αναπτύσσουμε για $s > \ln 2$, οπότε $0 < e^{-s} < 2e^{-s} < 1$.

Λύση (συνέχεια)

Εφαρμόζοντας την ιδιότητα Ι3′, για τη συνάρτηση $f(t) = 1$ με $F(s) = 1/s$, προκύπτει ότι

$$\mathcal{L}^{-1}[\frac{e^{-ns}}{s}] = \mathcal{L}^{-1}[e^{-ns}F(s)] = \begin{cases} f(t-n), & t \geq n, \\ 0, & t < n, \end{cases} = \begin{cases} 1, & t \geq n, \\ 0, & t < n, \end{cases}$$

άρα

$$\begin{aligned} y(t) &= \mathcal{L}^{-1}\left[\sum_{n=0}^{\infty}(2^{n+1}-1)\frac{e^{-ns}}{s}\right] = \sum_{n=0}^{\infty}(2^{n+1}-1)\mathcal{L}^{-1}[\frac{e^{-ns}}{s}] \\ &= \sum_{n=0}^{\lfloor t \rfloor}(2 \cdot 2^n - 1) = 2\sum_{n=0}^{\lfloor t \rfloor}2^n - \sum_{n=0}^{\lfloor t \rfloor}1 \\ &\overset{*}{=} 2(2^{\lfloor t \rfloor+1}-1) - (\lfloor t \rfloor + 1) = 2^{\lfloor t \rfloor+2} - \lfloor t \rfloor - 3. \end{aligned}$$

* Χρησιμοποιήθηκε ο γνωστός τύπος $x \neq 1 \Rightarrow \sum_{n=0}^{k} x^n = \dfrac{x^{k+1}-1}{x-1}$.

Άσκηση (Λυμένη άσκηση 40)

Να αποδειχθεί, με τη βοήθεια του μετασχηματισμού Laplace της συνέλιξης, ο τύπος $B(m,n)=\frac{\Gamma(m)\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)}$, $m,n>0$.

Λύση.

Λαμβάνοντας υπόψη τον τύπο $t^a=\mathcal{L}^{-1}[\frac{\Gamma(a+1)}{s^{a+1}}]$, $a>-1$, καθώς και την ιδιότητα $f(t)*g(t)=\mathcal{L}^{-1}[F(s)G(s)]$, προκύπτει, για $s>0$, ότι

$$B(m,n)\Gamma(m+n)=\Gamma(m)\Gamma(n)\Leftrightarrow B(m,n)\frac{\Gamma(m+n)}{s^{m+n}}=\frac{\Gamma(m)}{s^m}\frac{\Gamma(n)}{s^n}$$

$$\Leftrightarrow B(m,n)\mathcal{L}^{-1}[\frac{\Gamma(m+n)}{s^{m+n}}]=\mathcal{L}^{-1}[\frac{\Gamma(m)}{s^m}\frac{\Gamma(n)}{s^n}]\Leftrightarrow B(m,n)t^{m+n-1}=t^{m-1}*t^{n-1}$$

και η τελευταία ισότητα ισχύει, αφού

$$t^{m-1}*t^{n-1}=\int_0^t z^{m-1}(t-z)^{n-1}dz\overset{z=ut}{=}\int_0^1(ut)^{m-1}(t-tu)^{n-1}tdu$$

$$=t^{m+n-1}\int_0^1u^{m-1}(1-u)^{n-1}du=t^{m+n-1}B(m,n).$$