ΑΝΑΛΥΣΗ ΙΙ

ΚΕΦ.12: Συναρτήσεις δύο μεταβλητών
Σημειώσεις Φροντιστηρίου

Τμήμα Πληροφορικής
Πανεπιστήμιο Πειραιώς

Υποσύνολα του $\mathbb{R}^2$

Έστω $A \subseteq \mathbb{R}^2$. Το **συμπλήρωμα** του A ορίζεται ως το σύνολο $\overline{A} := \mathbb{R}^2 \setminus A$.

- Το σύνολο $\tau_\delta(p) := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x - x_0| < \delta, |y - y_0| < \delta\}$, όπου $p = (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ και $\delta > 0$, ονομάζεται **τετραγωνική περιοχή** του σημείου p (ακτίνας δ).
- Το σύνολο $s_\delta(p) := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 < \delta^2\}$, όπου $p = (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ και $\delta > 0$, ονομάζεται **κυκλική περιοχή** του p (ή ανοικτός δίσκος κέντρου p και ακτίνας δ).
- Επειδή κάθε τετραγωνική περιοχή περιέχεται σε μια κυκλική περιοχή και αντίστροφα, χρησιμοποιούμε τους συμβολισμούς $\pi_\delta(p)$ για μια περιοχή ακτίνας δ, όταν δεν έχει σημασία αν είναι τετραγωνική ή κυκλική, και $\pi(p)$, όταν δεν έχει σημασία ούτε η τιμή του δ.
- Το σημείο $p \in A$ είναι **εσωτερικό σημείο** του A ανν υπάρχει περιοχή $\pi(p) \subseteq A$.
- Το σημείο $p \in \mathbb{R}^2$ είναι **συνοριακό σημείο** του A ανν κάθε περιοχή $\pi(p)$ περιέχει στοιχεία του A και του $\overline{A}$.

- Το σημείο $p \in \mathbb{R}^2$ είναι **οριακό σημείο** (ή σημείο συσσωρεύσεως) του A ανν $\pi(p) \cap A \neq \emptyset$, για κάθε περιοχή $\pi(p)$. Με άλλα λόγια, υπάρχουν ακολουθίες σημείων του A οι οποίες συγκλίνουν στο p.
- Το σύνολο A είναι **ανοικτό** ανν όλα τα σημεία του είναι εσωτερικά.
- Το σύνολο A είναι **κλειστό** ανν το $\overline{A}$ είναι ανοικτό.
  Σημειώνεται ότι τα σύνολα $\emptyset$ και $\mathbb{R}^2$ είναι ανοικτά και κλειστά.
  Επίσης, υπάρχουν σύνολα που δεν είναι ανοικτά, ούτε κλειστά.
- Το σύνολο των εσωτερικών σημείων του A συμβολίζεται ως A^o.
- Το σύνολο A είναι **φραγμένο** ανν περιέχεται σε ένα ορθογώνιο, δηλαδή σύνολο της μορφής $[a, b] \times [c, d]$, όπου $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ με $a < b$ και $c < d$.

Έστω συνάρτηση $f : A \to \mathbb{R}$, όπου $A \subseteq \mathbb{R}^2$, και έστω (ξ, η) οριακό σημείο του A.

Όριο συνάρτησης (διπλό όριο)

$\lim\limits_{(x,y)\to(\xi,\eta)} f(x,y) = \ell \in \mathbb{R}$ αν και μόνο αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$, τέτοιο ώστε για κάθε $(x,y) \in A$ να ισχύει

$$\begin{cases} 0 < |x-\xi| < \delta \\ 0 < |y-\eta| < \delta \end{cases} \Rightarrow |f(x,y) - \ell| < \varepsilon \text{ (τετραγωνική περιοχή)}$$

$$0 < (x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 < \delta \Rightarrow |f(x,y) - \ell| < \varepsilon \text{ (κυκλική περιοχή)}$$

Ακολουθιακός ορισμός ορίου

$\lim\limits_{(x,y)\to(\xi,\eta)} f(x,y) = \ell \in \mathbb{R}$ αν και μόνο αν για κάθε ακολουθία σημείων (x_n, y_n) στο A, με $(x_n, y_n) \to (\xi, \eta)$, είναι $f(x_n, y_n) \to \ell$.

Όριο - συνέχεια συναρτήσεων δύο μεταβλητών

Επαναληπτικά όρια συνάρτησης

$\lim\limits_{x \to \xi} \lim\limits_{y \to \eta} f(x, y)$ και $\lim\limits_{y \to \eta} \lim\limits_{x \to \xi} f(x, y)$.

Αν υπάρχει το διπλό όριο της συνάρτησης, τότε αυτό ταυτίζεται με τα επαναληπτικά όρια αυτής.

Συνέχεια συνάρτησης

Η συνάρτηση δύο μεταβλητών f/A είναι συνεχής στο σημείο $(\xi, \eta) \in A$ αν και μόνο αν $\lim\limits_{(x,y) \to (\xi,\eta)} f(x, y) = f(\xi, \eta)$.

Άσκηση (Λυμένη 10)

Να αποδειχθεί ότι δεν υπάρχει το όριο $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$, *όπου*

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2}{y}, & xy \neq 0, \\ y+2, & x = 0, \\ \dfrac{\sin x}{x}, & y = 0, x \neq 0. \end{cases}$$

Λύση

Επιλέγουμε τις ακολουθίες σημείων $(x_n, y_n) = (1/n, 1/n)$ και $(z_n, w_n) = (0, 1/n)$, για τις οποίες προφανώς είναι

$$(x_n, y_n), (z_n, w_n) \in D(f), \text{ για κάθε } n \in \mathbb{N}^*$$

και

$$\lim_{n\to\infty} (x_n, y_n) = \lim_{n\to\infty} (z_n, w_n) = (0,0).$$

Λύση (συνέχεια)

Επιπλέον, είναι

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n, y_n) = \lim_{n\to\infty} f(1/n, 1/n) = \lim_{n\to\infty} \frac{(1/n)^2}{1/n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$$

και

$$\lim_{n\to\infty} f(z_n, w_n) = \lim_{n\to\infty} f(0, 1/n) = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n} + 2\right) = 2 \neq 0,$$

άρα το όριο $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ δεν υπάρχει.

Άσκηση (Λυμένη 11)

Να εξετασθεί αν υπάρχει το όριο $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2-2y^2}{3x^2+y^2}$.

Λύση

Έστω $f(x,y) = \frac{x^2-2y^2}{3x^2+y^2}$. Αν υπάρχει το εν λόγω όριο, τότε θα πρέπει να είναι ίσο με το $\lim_{x\to 0} f(x,mx)$, ανεξαρτήτως της τιμής του $m \in \mathbb{R}$ (σύγκλιση κατά μήκος της ευθείας $y = mx$). Όμως,

$$\lim_{x\to 0} f(x,mx) = \lim_{x\to 0} \frac{x^2-2(mx)^2}{3x^2+(mx)^2} = \lim_{x\to 0} \frac{1-2m^2}{3+m^2} = \frac{1-2m^2}{3+m^2},$$

η τιμή του οποίου εξαρτάται από το m, άρα το εν λόγω όριο δεν υπάρχει.

Παρατήρηση: Αν στην προηγούμενη άσκηση δινόταν
$f(x,y) = \dfrac{x^3 - 2y^3}{3x^2 + y^2}$, τότε θα ήταν

$$\lim_{x\to 0} f(x, mx) = \lim_{x\to 0} x\frac{1-2m^3}{3+m^2} = 0,$$

το οποίο όμως ΔΕΝ εξασφαλίζει ότι $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$. Θα πρέπει να το αποδείξουμε καθολικά (όχι μόνο κατά μήκος της $y = mx$). Είναι λοιπόν

$$|f(x,y)| = \frac{|x^3 - 2y^3|}{3x^2 + y^2} \le \frac{|x|^3 + 2|y|^3}{3x^2 + y^2} \le \frac{x^2|x| + 2y^2|y|}{x^2 + y^2}$$
$$\le \frac{(|x| + 2|y|)(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2} = |x| + 2|y|$$

Το διπλό όριο της τελευταίας παράστασης είναι 0, άρα και της f.

Παρατήρηση: Αν στην προηγούμενη άσκηση δινόταν $f(x,y) = \dfrac{x^2+y^2}{2x}$ (βλ. άλυτη άσκηση 26), τότε η αλλαγή μεταβλητής $y = mx$ δεν θα οδηγούσε σε συμπέρασμα. Μπορούμε όμως να θέσουμε π.χ. $y = m\sqrt{x}$, $x > 0$, (σύγκλιση κατά μήκος μιας καμπύλης που δεν είναι ευθεία). Τότε, έχουμε ότι

$$\lim_{x \to 0^+} f(x, m\sqrt{x}) = \lim_{x \to 0^+} \frac{x^2 + m^2 x}{2x} = \lim_{x \to 0^+} \frac{x + m^2}{2} = \frac{m^2}{2}$$

άρα το αποτέλεσμα εξαρτάται από την τιμή του m και επομένως το διπλό όριο της f δεν υπάρχει.

Άσκηση (Λυμένη 12)

Να υπολογισθούν τα όρια

$$i)\ \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2+1}-1},$$

$$ii)\ \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{y\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2},$$

$$iii)\ \lim_{(x,y)\to(0,0)} (1+x^2y^2)^{-\frac{1}{x^2+y^2}}.$$

Λύση

i)

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2+1}-1} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{(x^2+y^2)(\sqrt{x^2+y^2+1}+1)}{(x^2+y^2+1)-1}$$

$$= \lim_{(x,y)\to(0,0)} (\sqrt{x^2+y^2+1}+1) \overset{z=x^2+y^2}{=} \lim_{z\to 0} (\sqrt{z+1}+1) = 2.$$

ii)

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{y\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2} = \left(\lim_{(x,y)\to(0,0)} y\right) \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2}$$

$$\overset{z=x^2+y^2}{=} \left(\lim_{(x,y)\to(0,0)} y\right) \lim_{z\to 0} \frac{\sin z}{z} = 0 \cdot 1 = 0.$$

Λύση (συνέχεια)

iii) Θέτουμε $f(x,y) = (1+x^2y^2)^{-\frac{1}{x^2+y^2}}$ και

$$g(x,y) = \ln f(x,y) = \frac{-1}{x^2+y^2}\ln(1+x^2y^2) = \frac{-x^2y^2}{x^2+y^2}\frac{\ln(1+x^2y^2)}{x^2y^2}.$$

Θα υπολογίσουμε το όριο

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} g(x,y) = \left(\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{-x^2y^2}{x^2+y^2}\right)\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\ln(1+x^2y^2)}{x^2y^2}$$
$$\overset{z=x^2y^2}{=} \left(\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{-x^2y^2}{x^2+y^2}\right)\lim_{z\to 0} \frac{\ln(1+z)}{z}.$$

Λύση (συνέχεια)

Ως γνωστό, είναι $\lim\limits_{z\to 0}\dfrac{\ln(1+z)}{z}=1$ και επιπλέον, επειδή

$$(a-b)^2\geq 0 \Rightarrow a^2+b^2\geq 2ab \overset{a^2+b^2\neq 0}{\Rightarrow} \frac{2ab}{a^2+b^2}\leq 1, \qquad (*)$$

προκύπτει ότι

$$\frac{x^2y^2}{x^2+y^2}=\frac{|x||y|}{2}\,\frac{2|x||y|}{x^2+y^2}\leq\frac{|x||y|}{2},$$

οπότε

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^2y^2}{x^2+y^2}=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{|x||y|}{2}=0.$$

Επομένως, $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} g(x,y)=0\cdot 1=0$, δηλαδή $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=1$.

Παρατήρηση: Η τελευταία ανισότητα της (*) είναι ιδιαίτερα χρήσιμη σε αποδείξεις ορίων με το κριτήριο παρεμβολής, όπως η προηγούμενη.

Άσκηση (Λυμένη 17)

Να μελετηθούν ως προς τη συνέχεια οι συναρτήσεις

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

$$g(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

Λύση

Οι συναρτήσεις είναι προφανώς συνεχείς στο $\mathbb{R}^2 \setminus (0,0)$, οπότε αρκεί να εξετασθεί αν είναι συνεχείς στο $(0,0)$.
Για την πρώτη, είναι

$$\left|\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}\right| = \frac{\sqrt{|x||y|}}{\sqrt{2}}\frac{\sqrt{2|x||y|}}{\sqrt{x^2+y^2}} \leq \frac{\sqrt{|x||y|}}{\sqrt{2}},$$

άρα $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sqrt{|x||y|}}{\sqrt{2}} = 0$, δηλαδή η f είναι συνεχής.
Για την δεύτερη, είναι

$$\lim_{x\to 0} g(x,mx) = \lim_{x\to 0} \frac{xmx}{x^2+m^2x^2} = \frac{m}{1+m^2}$$

άρα το όριο δεν υπάρχει, δηλαδή η g δεν είναι συνεχής στο $(0,0)$.

Άσκηση (ΦΕΒ 2014.)

Να μελετηθούν ως προς τη συνέχεια οι συναρτήσεις

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^3y^3}{x^6+y^6}, & \text{αν } (x,y)\neq(0,0),\\ 0, & \text{αν } (x,y)=(0,0),\end{cases}$$

$$g(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y^2}{\sqrt{x^4+y^4}}, & \text{αν } (x,y)\neq(0,0),\\ 0, & \text{αν } (x,y)=(0,0).\end{cases}$$

Λύση

Οι συναρτήσεις είναι προφανώς συνεχείς στο $\mathbb{R}^2 \setminus (0,0)$, οπότε αρκεί να εξετασθεί αν είναι συνεχείς στο $(0,0)$.
Για την πρώτη, έχουμε ότι

$$\lim_{x \to 0} f(x, mx) = \lim_{x \to 0} \frac{x^3(mx)^3}{x^6 + (mx)^6} = \lim_{x \to 0} \frac{m^3}{1+m^6} = \frac{m^3}{1+m^6},$$

άρα το όριο $\displaystyle\lim_{(x,y) \to (0,0)} f(x,y)$ δεν υπάρχει, δηλαδή η f δεν είναι συνεχής στο $(0,0)$.
Για την δεύτερη, είναι

$$\left| \frac{x^2y^2}{\sqrt{x^4+y^4}} \right| = \frac{x^2y^2}{x^4+y^4}\sqrt{x^4+y^4} \leq \frac{1}{2}\sqrt{x^4+y^4},$$

άρα $\displaystyle\lim_{(x,y) \to (0,0)} g(x,y) = \lim_{(x,y) \to (0,0)} \frac{\sqrt{x^4+y^4}}{2} = 0$, δηλαδή g συνεχής.

Μερικές παράγωγοι

Ορισμός

Οι μερικές παράγωγοι της συνάρτησης f/A στο σημείο (ξ,η), ως προς τις μεταβλητές x, y ορίζονται αντίστοιχα από τις σχέσεις:

$$f_x(\xi,\eta) = \frac{\partial f}{\partial x}(\xi,\eta) = \lim_{h\to 0} \frac{f(\xi+h,\eta) - f(\xi,\eta)}{h} = \lim_{x\to\xi} \frac{f(x,\eta) - f(\xi,\eta)}{x-\xi}$$

$$f_y(\xi,\eta) = \frac{\partial f}{\partial y}(\xi,\eta) = \lim_{k\to 0} \frac{f(\xi,\eta+k) - f(\xi,\eta)}{k} = \lim_{y\to\eta} \frac{f(\xi,y) - f(\xi,\eta)}{y-\eta}$$

Μερικές παράγωγοι

Αν οι μερικές παράγωγοι της f ορίζονται για κάθε $(\xi, \eta) \in A^o$, τότε ορίζονται οι συναρτήσεις $f_x = \dfrac{\partial f}{\partial x}/A^o$ και $f_y = \dfrac{\partial f}{\partial y}/A^o$.

Αν οι συναρτήσεις αυτές είναι παραγωγίσιμες, τότε ορίζονται οι μερικές παράγωγοι δεύτερης τάξης:

$$f_{xx} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \quad f_{xy} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, \quad f_{yx} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}, \quad f_{yy} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}.$$

Πρόταση (Schwarz)

Αν οι συναρτήσεις $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ *είναι συνεχείς στο εσωτερικό σημείο* (ξ, η) *του* $D(f)$*, τότε ισχύει*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(\xi, \eta) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(\xi, \eta).$$

Ορισμός (Διαφορισιμότητα)

Η συνάρτηση f/A είναι διαφορίσιμη σε ένα εσωτερικό σημείο (ξ, η) του A αν και μόνο αν υπάρχουν $a, b \in \mathbb{R}$, ώστε

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{|f(\xi+h, \eta+k) - f(\xi, \eta) - ah - bk|}{\sqrt{h^2+k^2}} = 0 \qquad (*)$$

Εξίσωση εφαπτόμενου επιπέδου: Αν η συνάρτηση f/A είναι διαφορίσιμη στο σημείο $(\xi, \eta) \in A^o$, τότε το εφαπτόμενο επίπεδο της επιφάνειας $z = f(x, y)$ στο σημείο αυτό δίνεται από την εξίσωση:

$$z = f(\xi, \eta) + \frac{\partial f}{\partial x}(\xi, \eta)(x - \xi) + \frac{\partial f}{\partial y}(\xi, \eta)(y - \eta).$$

Παρατήρηση: Αν η f/A είναι διαφορίσιμη στο $(\xi, \eta) \in A^o$, τότε άμεσα προκύπτει ότι είναι και παραγωγίσιμη και οι σταθερές a, b στην (*) είναι οι $a = \dfrac{\partial f}{\partial x}(\xi, \eta)$ και $b = \dfrac{\partial f}{\partial y}(\xi, \eta)$.
Επομένως, θέτοντας $x = \xi + h$, $y = \eta + k$, η (*) μετατρέπεται στην

$$\lim_{(x,y)\to(\xi,\eta)} \frac{\left|f(x,y) - \left(f(\xi,\eta) + \frac{\partial f}{\partial x}(\xi,\eta)(x-\xi) + \frac{\partial f}{\partial y}(\xi,\eta)(y-\eta)\right)\right|}{\sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}} = 0$$

δηλαδή όταν η f είναι διαφορίσιμη στο (ξ, η), τότε προσεγγίζεται ικανοποιητικά από τη συνάρτηση του εφαπτόμενου επιπέδου, σε μια περιοχή του (ξ, η).

Πρόταση

Αν η συνάρτηση f/A *είναι διαφορίσιμη στο σημείο* (ξ, η), *τότε είναι συνεχής σε αυτό.*

Πρόταση

Αν υπάρχουν οι μερικές παράγωγοι της συνάρτησης f/A *στο σημείο* (ξ, η) *και μια από αυτές είναι συνεχής σε αυτό, τότε η* f *είναι διαφορίσιμη στο σημείο αυτό.*

Μερικές παράγωγοι

Ορισμός (Διαφορικό)

Το διαφορικό $df(\xi,\eta)$ της διαφορίσιμης συνάρτησης f/A στο εσωτερικό σημείο (ξ,η) ορίζεται από τον τύπο

$$df(\xi,\eta) = \frac{\partial f}{\partial x}(\xi,\eta)dx + \frac{\partial f}{\partial y}(\xi,\eta)dy.$$

Αν η f είναι διαφορίσιμη σε κάθε εσωτερικό σημείο του A, τότε ορίζεται η συνάρτηση διαφορικού

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy.$$

Πρόταση

Η διαφορίσιμη συνάρτηση f/A είναι σταθερή στο A^o αν και μόνο αν $df = 0$.

Προσέγγιση τιμής με τη βοήθεια του διαφορικού: Αν για μια διαφορίσιμη συνάρτηση f/A είναι γνωστή η τιμή $f(\xi,\eta)$ της f στο σημείο $(\xi,\eta)\in A^o$, και ζητείται μια προσέγγιση της τιμής $f(x,y)$ της f σε κάποιο άλλο σημείο $(x,y)\in A$, τότε, θέτοντας

$$\Delta x = x-\xi \qquad \text{και} \qquad \Delta y = y-\eta,$$

μπορεί να χρησιμοποιηθεί ο προσεγγιστικός τύπος

$$\begin{aligned} f(\xi+\Delta x,\eta+\Delta y) &\simeq f(\xi,\eta)+df(\xi,\eta)(\Delta x,\Delta y) \\ &= f(\xi,\eta)+\frac{\partial f}{\partial x}(\xi,\eta)\Delta x+\frac{\partial f}{\partial y}(\xi,\eta)\Delta y, \end{aligned}$$

ή ο ισοδύναμος

$$f(x,y)\simeq f(\xi,\eta)+\frac{\partial f}{\partial x}(\xi,\eta)(x-\xi)+\frac{\partial f}{\partial y}(\xi,\eta)(y-\eta).$$

Το σφάλμα της προσέγγισης αυξάνεται (το πολύ γραμμικώς) ανάλογα με την απόσταση του σημείου (x,y) από το σημείο αναφοράς (ξ,η).

Παραγώγιση σύνθετης συνάρτησης: Αν f/A διαφορίσιμη, $\phi, \sigma/B$ παραγωγίσιμες στο B^o, με $\phi(B) \times \sigma(B) \subseteq A$ και $g(x, y) = f(\phi(x, y), \sigma(x, y))/B$, τότε

$$\frac{\partial g}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial \phi}\frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial \sigma}\frac{\partial \sigma}{\partial x} \qquad \text{και} \qquad \frac{\partial g}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial \phi}\frac{\partial \phi}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial \sigma}\frac{\partial \sigma}{\partial y}$$

Ειδικά, αν $g(t) = f(u(t), v(t))$, τότε

$$\frac{dg}{dt} = \frac{\partial f}{\partial u}\frac{du}{dt} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{dv}{dt}.$$

Ακριβές διαφορικό: Το άθροισμα $u(x,y)dx + v(x,y)dy$, όπου $u, v / A \subseteq \mathbb{R}^2$, ονομάζεται ακριβές διαφορικό αν και μόνο αν υπάρχει διαφορίσιμη συνάρτηση f/A, με $df = u(x,y)dx + v(x,y)dy$. Τότε είναι $u = \frac{\partial f}{\partial x}$ και $v = \frac{\partial f}{\partial y}$.

Πρόταση

Αν $u, v / A \subseteq \mathbb{R}^2$ συναρτήσεις με συνεχείς μερικές παραγώγους, τότε το άθροισμα $u(x,y)dx + v(x,y)dy$ είναι ακριβές διαφορικό αν και μόνο αν

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial x}.$$

Ακριβής διαφορική εξίσωση: Αν το άθροισμα $u(x,y)dx + v(x,y)dy$, όπου $u, v/A \subseteq \mathbb{R}^2$, είναι ακριβές, τότε η διαφορική εξίσωση

$$u(x,y)+v(x,y)y'(x) = 0, \qquad \text{ή συμβολικά} \qquad u(x,y)dx+v(x,y)dy = 0$$

ονομάζεται ακριβής. Στην περίπτωση αυτή, υπάρχει διαφορίσιμη συνάρτηση f/A, με $df = u(x,y)dx + v(x,y)dy$, δηλαδή με

$$u = \frac{\partial f}{\partial x} \qquad \text{και} \qquad v = \frac{\partial f}{\partial y}, \tag{*}$$

και η γενική λύση της διαφορικής εξίσωσης δίνεται σε πεπλεγμένη μορφή από την εξίσωση

$$f(x, y(x)) = c, \qquad c \in \mathbb{R}.$$

Η f προσδιορίζεται ολοκληρώνοντας μια εκ των σχέσεων της (*).

Άσκηση (Λυμένη 32)

Να υπολογισθεί με τη βοήθεια του διαφορικού μια προσέγγιση του αριθμού $\sqrt{(3.98)^2 + (3.01)^2}$.

Λύση

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}/A$, όπου $A = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$, η οποία έχει συνεχείς μερικές παραγώγους

$$f_x = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \qquad \text{και} \qquad f_y = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}},$$

(άρα είναι διαφορίσιμη στο A) καθώς και το σημείο $(\xi, \eta) = (4, 3) \in A$. Θέτοντας $\Delta x = -0.02$ και $\Delta y = 0.01$, έχουμε ότι

$$\begin{aligned}
\sqrt{(3.98)^2 + (3.01)^2} &= f(\xi + \Delta x, \eta + \Delta y) \\
&\simeq f(\xi, \eta) + f_x(\xi, \eta)\Delta x + f_y(\xi, \eta)\Delta y \\
&= 5 + \frac{4}{5}(-0.02) + \frac{3}{5}0.01 = 5 - 0.016 + 0.006 = 4.99.
\end{aligned}$$

Άσκηση (Λυμένη 30)

Να ευρεθεί η εξίσωση του εφαπτόμενου επιπέδου στον κώνο με εξίσωση $8x^2 + 9y^2 - 6z^2 = 0$ *στο σημείο* $A(3, 4, -6)$.

Λύση

Επειδή το A έχει αρνητική κατηγμένη, θα ανήκει στην επιφάνεια της συνάρτησης $f(x, y) = -\sqrt{\dfrac{8x^2 + 9y^2}{6}}$, για την οποία βρίσκουμε $f(3, 4) = -\sqrt{\dfrac{8 \cdot 9 + 9 \cdot 16}{6}} = -\sqrt{\dfrac{9 \cdot 24}{6}} = -6$ και

$$f_x = -\frac{1}{2}\left(\frac{8x^2 + 9y^2}{6}\right)^{-1/2} \frac{16x}{6} = \frac{4x}{3f(x, y)},$$

$$f_y = -\frac{1}{2}\left(\frac{8x^2 + 9y^2}{6}\right)^{-1/2} \frac{18y}{6} = \frac{3y}{2f(x, y)}.$$

Λύση (συνέχεια)

Επομένως, $f_x(3,4) = \dfrac{4 \cdot 3}{3(-6)} = -\dfrac{2}{3}$ και $f_y(3,4) = -\dfrac{3 \cdot 4}{2(-6)} = -1$.
Η εξίσωση του εφαπτόμενου επιπέδου είναι λοιπόν η

$$z = f(3,4) + f_x(3,4)(x-3) + f_y(3,4)(y-4) = -6 - \frac{2}{3}(x-3) - (y-4),$$

ή, πιο απλά, $2x + 3y + 3z = 0$.

Άσκηση (Λυμένη 34)

Να αποδειχθεί η σχέση $x\dfrac{\partial g}{\partial y} + y\dfrac{\partial g}{\partial x} = 0$, *όταν*
$g(x,y) = f(x^2 - y^2, y^2 - x^2)$ *και* $f/\mathbb{R}^2$ *μια διαφορίσιμη συνάρτηση.*

Λύση

Θέτοντας $u(x,y) = x^2 - y^2$ και $v(x,y) = y^2 - x^2$ και εφαρμόζοντας τον κανόνα της αλυσίδας, έχουμε ότι

$$\frac{\partial g}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} = 2x\frac{\partial f}{\partial u} - 2x\frac{\partial f}{\partial v},$$

$$\frac{\partial g}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y} = -2y\frac{\partial f}{\partial u} + 2y\frac{\partial f}{\partial v},$$

Επομένως, $x\dfrac{\partial g}{\partial y} + y\dfrac{\partial g}{\partial x} = 2xy\left(\dfrac{\partial f}{\partial v} - \dfrac{\partial f}{\partial u}\right) + 2xy\left(\dfrac{\partial f}{\partial u} - \dfrac{\partial f}{\partial v}\right) = 0.$

Άσκηση (ΙΟΥΝ 2013.)

Να λυθεί η διαφορική εξίσωση

$$(x\cos x - \sin x)dy = xy\sin x dx, \qquad \mu\varepsilon\ y\left(\frac{\pi}{2}\right) = -2.$$

Λύση

Η ΔΕ γράφεται ως $xy\sin x dx + (\sin x - x\cos x)dy = 0$.
Θέτοντας $u(x,y) = xy\sin x$ και $v(x,y) = \sin x - x\cos x$, έχουμε ότι

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \cos x - \cos x + x(\sin x) = x\sin x = \frac{\partial u}{\partial y}$$

και επιπλέον οι μερικές παράγωγοι είναι συνεχείς, επομένως η ΔΕ είναι ακριβής. Ως εκ τούτου, υπάρχει διαφορίσιμη συνάρτηση f με

$$\frac{\partial f}{\partial x} = u \qquad \text{και} \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = v \tag{*}$$

Λύση (συνέχεια)

και η γενική λύση της ΔΕ δίνεται σε πεπλεγμένη μορφή από την εξίσωση $f(x, y) = c$, $c \in \mathbb{R}$.
Ολοκληρώνοντας ως προς y, βρίσκουμε ότι

$$\begin{aligned} f(x, y) &= \int \frac{\partial f}{\partial y} dy = \int v(x, y) dy = \int (\sin x - x\cos x) dy \\ &= y(\sin x - x\cos x) + c(x). \end{aligned}$$

Παραγωγίζοντας ως προς x, έχουμε ότι

$$xy\sin x = u = \frac{\partial f}{\partial x} = y\frac{d}{dx}(\sin x - x\cos x) + c'(x) = y(x\sin x) + c'(x)$$

Άρα $c'(x) = 0$, δηλαδή $c(x) = k$, $k \in \mathbb{R}$, και τελικά η γενική λύση της ΔΕ είναι η

$$y(\sin x - x\cos x) = c, \qquad c \in \mathbb{R}.$$

Λύση (συνέχεια)

Τέλος, θέτοντας $x = \pi/2$ στην παραπάνω, βρίσκουμε την ειδική λύση της ΔΕ, δηλαδή την τιμή της σταθεράς c:

$$y\left(\frac{\pi}{2}\right) = -2 \Rightarrow c = y\left(\frac{\pi}{2}\right)\left(\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) - \frac{\pi}{2}\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)\right) = -2(1-0) = -2.$$

Ασκήσεις

Άσκηση (ΙΟΥΝ 2014.)

Δίδεται η διαφορική εξίσωση

$$xy' + y(1 - xy) = 0.$$

i) *Να αποδειχθεί ότι η εξίσωση αυτή δεν είναι ακριβής.*

ii) *Να αναχθεί η δοσμένη διαφορική εξίσωση σε ακριβή, με τη βοήθεια του ολοκληρωτικού παράγοντα* $I(x, y) = x^{-2}y^{-2}$.

iii) *Να ευρεθεί η γενική λύση της δοσμένης διαφορικής εξίσωσης.*

Λύση

Η ΔΕ γράφεται στη μορφή

$$y(1-xy)dx + xdy = 0. \qquad (*)$$

Θέτοντας $u(x,y) = y(1-xy)$ και $v(x,y) = x$, παρατηρούμε ότι $\frac{\partial u}{\partial y} = 1 - 2xy \neq 1 = \frac{\partial v}{\partial x}$, άρα η ΔΕ δεν είναι ακριβής.
Πολλαπλασιάζοντας κατά μέλη με $I(x,y) = x^{-2}y^{-2}$ (για $y \neq 0$), προκύπτει η ισοδύναμη εξίσωση

$$\frac{1-xy}{x^2y}dx + \frac{1}{xy^2}dy = 0. \qquad (**)$$

Θέτοντας $u(x,y) = \dfrac{1-xy}{x^2y}$ και $v(x,y) = \dfrac{1}{xy^2}$, έχουμε ότι

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{-1}{x^2y^2} = \frac{\partial u}{\partial y}$$

Λύση (συνέχεια)

και οι παράγωγοι είναι συνεχείς, άρα η (**) είναι ακριβής, δηλαδή υπάρχει διαφορίσιμη συνάρτηση f, με

$$\frac{\partial f}{\partial x} = u \qquad \text{και} \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = v \tag{***}$$

και η γενική λύση της ΔΕ δίνεται σε πεπλεγμένη μορφή από την εξίσωση $f(x, y) = c$, $c \in \mathbb{R}$.
Ολοκληρώνοντας τη δεύτερη σχέση ως προς y, προκύπτει ότι

$$f(x, y) = \int \frac{\partial f}{\partial y} dy = \int \frac{1}{xy^2} dy = \frac{-1}{xy} + c(x).$$

Παραγωγίζοντας ως προς x, έχουμε ότι

$$\frac{1 - xy}{x^2 y} = \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \frac{-1}{xy} + c'(x) = \frac{1}{x^2 y} + c'(x).$$

Λύση (συνέχεια)

Επομένως, $c'(x) = -1/x$, δηλαδή $c(x) = -\ln|x| + k$ και η γενική λύση της (**), άρα και της (*), είναι η

$$y = 0 \qquad \text{ή} \qquad \frac{1}{xy} + \ln|x| = c, \qquad c \in \mathbb{R}.$$

(Η $y = 0$, που αρχικά εξαιρέθηκε, είναι επίσης λύση, αφού επαληθεύει την (*)).
Λύνοντας ως προς y, βρίσκουμε ότι

$$y = 0 \qquad \text{ή} \qquad y = \frac{1}{x(c - \ln|x|)}, c \in \mathbb{R}.$$

Ακρότατα - Σαγματικά

Έστω συνάρτηση $f/A \subseteq \mathbb{R}^2$.

- Το σημείο $(\xi, \eta) \in A$ είναι σημείο τοπικού μεγίστου (αντ. ελαχίστου) της f ανν υπάρχει περιοχή $\pi(\xi, \eta)$ ώστε για κάθε $(x, y) \in \pi(\xi, \eta) \cap A$ να ισχύει $f(x, y) \leq f(\xi, \eta)$ (αντ. $f(x, y) \geq f(\xi, \eta)$).
- Το σημείο $(\xi, \eta) \in A^o$ ονομάζεται **στάσιμο σημείο** της συνάρτησης $f/A \subseteq \mathbb{R}^2$ αν και μόνο αν υπάρχουν οι μερικές παράγωγοι $f_x(\xi, \eta)$ και $f_y(\xi, \eta)$ και είναι ίσες με 0.

Πρόταση (επέκταση του Θεωρήματος Fermat)

Έστω (ξ, η) εσωτερικό σημείο του πεδίου ορισμού της $f/A \subseteq \mathbb{R}^2$, στο οποίο υπάρχουν οι μερικές παράγωγοι της f. Αν το (ξ, η) είναι σημείο τοπικού ακροτάτου, τότε είναι στάσιμο σημείο.

Αν το (ξ, η) είναι στάσιμο αλλά όχι τοπικό ακρότατο, τότε ονομάζεται **σαγματικό** σημείο της f.

Ακρότατα - Σαγματικά

Πρόταση

Έστω η διαφορίσιμη συνάρτηση $f/A \subseteq \mathbb{R}^2$ και (ξ, η) εσωτερικό σημείο του A, το οποίο είναι στάσιμο και στο οποίο οι μερικές παράγωγοι της f είναι διαφορίσιμες και έστω

$$D(x,y) = \begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{vmatrix} = f_{xx}f_{yy} - f_{xy}f_{yx}$$

- *Αν $D(\xi, \eta) > 0$ και $f_{xx}(\xi, \eta), f_{yy}(\xi, \eta) < 0$, τότε το (ξ, η) είναι σημείο τοπικού μεγίστου.*
- *Αν $D(\xi, \eta) > 0$ και $f_{xx}(\xi, \eta), f_{yy}(\xi, \eta) > 0$, τότε το (ξ, η) είναι σημείο τοπικού ελαχίστου.*
- *Αν $D(\xi, \eta) < 0$, τότε το (ξ, η) είναι σαγματικό σημείο.*

Παρατήρηση: Αν $f_{xy}(\xi, \eta) = f_{yx}(\xi, \eta)$ και $D(\xi, \eta) > 0$, τότε $f_{xx}(\xi, \eta), f_{yy}(\xi, \eta)$ ομόσημες.

Δεσμευμένα ακρότατα - Πολλαπλασιαστές Lagrange: Για την εύρεση των ακρότατων της συνάρτησης $f/A \subseteq \mathbb{R}^2$, με δεσμό την εξίσωση $\phi(x,y)=0$, θεωρούμε τη συνάρτηση του Lagrange

$$L(x,y)=f(x,y)+\lambda\phi(x,y)/A, \qquad \lambda\in\mathbb{R}.$$

Ο αριθμός λ ονομάζεται πολλαπλασιαστής Lagrange.
Αποδεικνύεται ότι για κάθε σημείο δεσμευμένου ακροτάτου $(\xi,\eta)\in A^o$, υπάρχει $\lambda\in\mathbb{R}$ ώστε η τριάδα (ξ,η,λ) να αποτελεί λύση του συστήματος:

$$L_x=0, \qquad L_y=0, \qquad \phi=0.$$

Κατόπιν τούτων, τα δεσμευμένα ακρότατα της f αναζητούνται στα σημεία που προκύπτουν ως λύσεις του ανωτέρω συστήματος.
Ο προσδιορισμός της φύσης τους επιτυγχάνεται με τη βοήθεια της επόμενης πρότασης.

Πρόταση

Αν οι $f, \phi / A \subseteq \mathbb{R}^2$ *έχουν συνεχείς πρώτες και δεύτερες μερικές παραγώγους και* (ξ, η) *ένα εσωτερικό σημείο του* A*, για το οποίο είναι*

$$L_x(\xi,\eta) = L_y(\xi,\eta) = \phi(\xi,\eta) = 0, \quad \phi_x(\xi,\eta) \neq 0 \text{ ή } \phi_y(\xi,\eta) \neq 0,$$

τότε

- *αν* $D(\xi,\eta) > 0$*, η* f *παρουσιάζει δεσμευμένο τοπικό μέγιστο στο* (ξ,η)*,*
- *αν* $D(\xi,\eta) < 0$*, η* f *παρουσιάζει δεσμευμένο τοπικό ελάχιστο στο* (ξ,η)*,*

όπου

$$D(x,y) = \begin{vmatrix} L_{xx} & L_{xy} & \phi_x \\ L_{yx} & L_{yy} & \phi_y \\ \phi_x & \phi_y & 0 \end{vmatrix}.$$

Ασκήσεις

Άσκηση (ΦΕΒ 2016.)

Να ευρεθούν τα στάσιμα σημεία της συνάρτησης

$$f(x, y) = -x^3 - y^3 + 3xy/\mathbb{R}^2$$

και στη συνέχεια να προσδιορισθεί η φύση τους.

Λύση

Αρχικά, υπολογίζουμε τις μερικές παραγώγους:

$$f_x = -3x^2 + 3y,\ f_y = -3y^2 + 3x,\ f_{xx} = -6x,\ f_{yy} = -6y,\ f_{xy} = 3 = f_{yx}.$$

Στη συνέχεια λύνουμε το σύστημα εξισώσεων:

$$\begin{cases} f_x = 0 \\ f_y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y - x^2 = 0 \\ x - y^2 = 0 \end{cases} \Rightarrow y - x + y^2 - x^2 = 0 \Rightarrow (y - x)(y + x + 1) = 0$$

Λύση (συνέχεια)

Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:

- $x = y$: Τότε, αντικαθιστώντας στην πρώτη, προκύπτει ότι $x - x^2 = 0$, δηλαδή $x(1-x) = 0$, οπότε τα σημεία $(0,0)$ και $(1,1)$ είναι στάσιμα.
- $y = -x - 1$: Τότε, αντικαθιστώντας στην πρώτη, προκύπτει ότι $x^2 + x + 1 = 0$. Η εξίσωση αυτή δεν έχει πραγματικές λύσεις, άρα δεν υπάρχουν άλλα στάσιμα σημεία.

Για τον προσδιορισμό της φύσης τους, εξετάζουμε την ορίζουσα

$$D(x,y) = \begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{vmatrix} = f_{xx}f_{yy} - f_{xy}f_{yx} = 36xy - 9 = 9(4xy - 1)$$

Είναι $D(0,0) = -9 < 0$, άρα το $(0,0)$ είναι σημείο σαγματικού, και $D(1,1) = 27 > 0$, άρα το $(1,1)$ είναι σημείο τοπικού ακροτάτου. Επειδή $f_{xx}(1,1), f_{yy}(1,1) < 0$, έπεται ότι είναι σημείο τοπικού μεγίστου.

Άσκηση (ΦΕΒ 2017.)

Να ευρεθούν τα στάσιμα σημεία της συνάρτησης

$$f(x,y) = x^3 + y^2 - 6xy - 39x + 18y + 20/\mathbb{R}^2$$

και στη συνέχεια να προσδιορισθεί η φύση τους.

Λύση

Αρχικά, υπολογίζουμε τις μερικές παραγώγους:

$f_x = 3x^2 - 6y - 39$, $f_y = 2y - 6x + 18$, $f_{xx} = 6x$, $f_{yy} = 2$, $f_{xy} = -6 = f_{yx}$.

Στη συνέχεια λύνουμε το σύστημα εξισώσεων:

$$\begin{cases} f_x = 0 \\ f_y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 - 2y - 13 = 0 \\ 2y - 6x + 18 = 0 \end{cases} \Rightarrow x^2 - 6x + 5 = 0 \Rightarrow (x-1)(x-5) = 0$$

Αν $x = 1$, τότε, αντικαθιστώντας στην δεύτερη, προκύπτει ότι $y = -6$.
Αν $x = 5$, τότε, αντικαθιστώντας στην δεύτερη, προκύπτει ότι $y = 6$.

Λύση (συνέχεια)

Άρα, τα στάσιμα σημεία είναι τα $(1, -6)$ και $(5, 6)$.
Για τον προσδιορισμό της φύσης τους, εξετάζουμε την ορίζουσα

$$D(x, y) = \begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{vmatrix} = f_{xx}f_{yy} - f_{xy}f_{yx} = 12x - 36 = 12(x - 3)$$

Είναι $D(1, -6) = -24 < 0$, άρα το $(1, -6)$ είναι σαγματικό σημείο, και $D(5, 6) = 24 > 0$, άρα το $(5, 6)$ είναι σημείο τοπικού ακροτάτου. Επειδή $f_{xx}(5, 6), f_{yy}(5, 6) > 0$, έπεται ότι το $(5, 6)$ είναι σημείο τοπικού ελαχίστου. Μάλιστα το ελάχιστο αυτό είναι ολικό, καθώς δεν υπάρχουν άλλα υποψήφια σημεία, αφού η f είναι παντού παραγωγίσιμη και κάθε σημείο του πεδίου ορισμού της είναι εσωτερικό.

Άσκηση (ΣΕΠ 2015.)

Να ευρεθούν οι ακρότατες τιμές της συνάρτησης

$$f(x,y) = xye^{-(2x+3y)}/[0,+\infty) \times [0,+\infty).$$

Λύση

Για να απλοποιήσουμε τις πράξεις, θεωρούμε τη συνάρτηση $g/(0,+\infty)^2$, με

$$g(x,y) = \ln f(x,y) = \ln(xy) + \ln e^{-(2x+3y)} = \ln x + \ln y - 2x - 3y.$$

Προφανώς ένα ακρότατο της f σε εσωτερικό σημείο είναι και ακρότατο της g (διότι η ln είναι γνησίως αύξουσα). Στα συνοριακά σημεία ($x = 0$ ή $y = 0$) η f προφανώς παρουσιάζει ολικό ελάχιστο ίσο με 0. Οι μερικές παράγωγοι της g είναι οι

$$g_x = \frac{1}{x} - 2, \quad g_y = \frac{1}{y} - 3, \quad g_{xx} = \frac{-1}{x^2}, \quad g_{yy} = \frac{-1}{y^2}, \quad g_{xy} = g_{yx} = 0.$$

Λύση (συνέχεια)

Επομένως $g_x = g_y = 0 \Leftrightarrow x = 1/2, y = 1/3$, δηλαδή υπάρχει μόνο ένα στάσιμο σημείο, το $(1/2, 1/3)$. Επιπλέον, είναι

$$D(x,y) = \begin{vmatrix} g_{xx} & g_{xy} \\ g_{yx} & g_{yy} \end{vmatrix} = g_{xx}g_{yy} - g_{xy}^2 = \frac{1}{x^2y^2} > 0$$

και $g_{xx}, g_{yy} < 0$, δηλαδή το $(1/2, 1/3)$ είναι σημείο τοπικού μεγίστου, με $f(1/2, 1/3) = \dfrac{1}{6e^2}$. Μάλιστα το μέγιστο αυτό είναι ολικό, αφού δεν υπάρχουν άλλα υποψήφια σημεία (η f είναι παντού παραγωγίσιμη και στα συνοριακά σημεία παρουσιάζει ολικό ελάχιστο 0).

Συνοψίζοντας, οι ακρότατες τιμές της f είναι 0 (ελάχιστο) και $\dfrac{1}{6e^2}$ (μέγιστο).

Άσκηση (ΣΕΠ 2013.)

Να προσδιορισθεί η μέγιστη και η ελάχιστη απόσταση της αρχής των αξόνων από τα σημεία της καμπύλης με εξίσωση $3x^2 + 4xy + 3y^2 = 10$. *(Απάντηση.)*

Λύση

Έστω (x, y) ένα σημείο πάνω στην καμπύλη. Ως γνωστό, η απόστασή του από την αρχή των αξόνων ισούται με $d(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$. Κατόπιν τούτου, θα θεωρήσουμε τη συνάρτηση $f/\mathbb{R}^2$, με

$$f(x, y) = x^2 + y^2,$$

η οποία παίρνει μέγιστη και ελάχιστη τιμή ακριβώς στα ίδια σημεία με την d. Επιπλέον, αφού το σημείο (x, y) πρέπει να ανήκει στην δοσμένη καμπύλη, θα θεωρήσουμε το δεσμό $\phi(x, y) = 0$, όπου

$$\phi(x, y) = 3x^2 + 4xy + 3y^2 - 10.$$

Λύση (συνέχεια)

Η συνάρτηση Lagrange για το δοσμένο πρόβλημα είναι η

$$\begin{aligned} L(x,y) &= f(x,y) + \lambda\phi(x,y) = x^2 + y^2 + \lambda(3x^2 + 4xy + 3y^2 - 10) \\ &= (3\lambda+1)x^2 + (3\lambda+1)y^2 + \lambda(4xy - 10) \end{aligned}$$

και οι μερικές παράγωγοί της είναι οι

$$L_x = (6\lambda+2)x + 4\lambda y,\ \ L_y = (6\lambda+2)y + 4\lambda x,\ \ L_{xx} = 6\lambda + 2 = L_{yy}$$

και $L_{xy} = 4\lambda = L_{yx}$, ενώ για την ϕ είναι $\phi_x = 6x + 4y$ και $\phi_y = 6y + 4x$. Στη συνέχεια λύνουμε το σύστημα εξισώσεων:

$$\begin{cases} L_x = 0 \\ L_y = 0 \\ \phi = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (6\lambda+2)x + 4\lambda y = 0 \\ (6\lambda+2)y + 4\lambda x = 0 \\ 3x^2 + 4xy + 3y^2 - 10 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow (6\lambda+2)(x-y) + 4\lambda(y-x) = 0 \Rightarrow 2(\lambda+1)(x-y) = 0$$

Λύση (συνέχεια)

Διακρίνουμε περιπτώσεις:

- Αν $\lambda = -1$, τότε, από την πρώτη εξίσωση παίρνουμε ότι $y = -x$ και στη συνέχεια από την τρίτη εξίσωση παίρνουμε $3x^2 - 4x^2 + 3x^2 = 10$, δηλαδή $x^2 = 5$. Επομένως, δύο λύσεις (x, y, λ) του συστήματος είναι οι $(\sqrt{5}, -\sqrt{5}, -1)$ και $(-\sqrt{5}, \sqrt{5}, -1)$.
- Αν $x = y$, τότε από την τρίτη εξίσωση παίρνουμε $3x^2 + 4x^2 + 3x^2 = 10$, δηλαδή $x^2 = 1$. Από την πρώτη εξίσωση παίρνουμε ότι $(10\lambda + 2)x = 0$, δηλαδή $\lambda = -1/5$. Επομένως, οι υπόλοιπες λύσεις (x, y, λ) του συστήματος είναι οι $(1, 1, -1/5)$ και $(-1, -1, -1/5)$.

Λύση (συνέχεια)

Στη συνέχεια, εξετάζουμε την ορίζουσα

$$D(x,y,\lambda) = \begin{vmatrix} L_{xx} & L_{xy} & \phi_x \\ L_{yx} & L_{yy} & \phi_y \\ \phi_x & \phi_y & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6\lambda+2 & 4\lambda & 6x+4y \\ 4\lambda & 6\lambda+2 & 6y+4x \\ 6x+4y & 6y+4x & 0 \end{vmatrix}$$

Τα $(1,1)$, $(-1,-1)$ είναι σημεία δεσμευμένου ελαχίστου, διότι $D(x,x,-1/5) < 0$. Πράγματι,

$$D(x,x,\lambda) = \begin{vmatrix} 6\lambda+2 & 4\lambda & 10x \\ 4\lambda & 6\lambda+2 & 10x \\ 10x & 10x & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2\lambda+2 & 4\lambda & 10x \\ -2\lambda-2 & 6\lambda+2 & 10x \\ 0 & 10x & 0 \end{vmatrix}$$

$$= -10x \begin{vmatrix} 2\lambda+2 & 10x \\ -2\lambda-2 & 10x \end{vmatrix} = -100x^2(4\lambda+4)$$

Λύση (συνέχεια)

Τα $(\sqrt{5}, -\sqrt{5})$, $(-\sqrt{5}, \sqrt{5})$ είναι σημεία δεσμευμένου μεγίστου, διότι $D(x, -x, -1) > 0$:

$$D(x, -x, \lambda) = \begin{vmatrix} 6\lambda + 2 & 4\lambda & 2x \\ 4\lambda & 6\lambda + 2 & -2x \\ 2x & -2x & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 10\lambda + 2 & 4\lambda & 2x \\ 10\lambda + 2 & 6\lambda + 2 & -2x \\ 0 & -2x & 0 \end{vmatrix}$$

$$= 2x \begin{vmatrix} 10\lambda + 2 & 2x \\ 10\lambda + 2 & -2x \end{vmatrix} = -4x^2(20\lambda + 4)$$

Άσκηση (ΙΟΥΝ 2015.)

Να ευρεθούν οι ακρότατες τιμές της συνάρτησης

$$f(x,y) = x^4 + y^4/[0,+\infty) \times [0,+\infty),$$

όταν $x + y = 6$. *(Απάντηση.)*

Λύση

Ο δεσμός είναι $\phi(x,y) = 0$, όπου $\phi(x,y) = x + y - 6$, και η συνάρτηση Lagrange είναι η

$$L(x,y) = f(x,y) + \lambda\phi(x,y) = x^4 + y^4 + \lambda(x + y - 6),$$

με μερικές παραγώγους

$$L_x = 4x^3 + \lambda,\; L_y = 4y^3 + \lambda,\; L_{xx} = 12x^2,\; L_{yy} = 12y^2,\; L_{xy} = L_{yx} = 0.$$

Λύνοντας το σύστημα $L_x = L_y = 0$, βρίσκουμε ότι $x^3 = y^3 = -\lambda/4$.

Λύση (συνέχεια)

Επομένως, είναι $x = y$ και από την $\phi(x, y) = 0$ προκύπτει ότι $x = y = 3$, οπότε και $\lambda = -4 \cdot 3^3 = -108$.

$$D(x,y,\lambda) = \begin{vmatrix} L_{xx} & L_{xy} & \phi_x \\ L_{yx} & L_{yy} & \phi_y \\ \phi_x & \phi_y & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 12x^2 & 0 & 1 \\ 0 & 12y^2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 12x^2 & -12x^2 & 1 \\ 0 & 12y^2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$
$$= \begin{vmatrix} -12x^2 & 1 \\ 12y^2 & 1 \end{vmatrix} = -12(x^2 + y^2) < 0$$

Επομένως, το $(3, 3)$ είναι σημείο δεσμευμένου τοπικού ελαχίστου, με $f(3, 3) = 3^4 + 3^4 = 162$.
Η f προφανώς παρουσιάζει ολικό ελάχιστο 0 όταν $x = y = 0$.

Παρατήρηση: Επειδή ο δεσμός $x + y = 6$ εκφράζει μια συνάρτηση $y = y(x) = 6 - x$, η άσκηση μπορεί να λυθεί και με τη βοήθεια μιας συνάρτησης μιας μεταβλητής

$$g(x) = f(x, 6 - x) = x^4 + (6 - x)^4, \qquad x \geq 0.$$

Η παράγωγός της ισούται με

$$\begin{aligned} g'(x) &= 4x^3 - 4(6 - x)^3 = 4(x - (6 - x))(x^2 + x(6 - x) + (6 - x)^2) \\ &= 8(x - 3)(x^2 - 6x + 36) = 0 \Leftrightarrow x = 3 \end{aligned}$$

Εύκολα διαπιστώνουμε ότι το $x = 3$ είναι σημείο τοπικού ελαχίστου της g, άρα αντιστοιχεί σε σημείο δεσμευμένου ελαχίστου της f.

Άσκηση (ΦΕΒ 2014.)

Να ευρεθεί η μικρότερη απόσταση της ευθείας $x + y = 1$ *και της περιφέρειας* $4(x^2 + y^2) = 1$. *Υπενθυμίζεται ότι η απόσταση* d *ενός σημείου* (ξ, η) *από την ευθεία με εξίσωση* $\alpha x + \beta y + \gamma = 0$ *δίδεται από τον τύπο* $d(\xi, \eta) = \dfrac{|\alpha\xi + \beta\eta + \gamma|}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}$.

Λύση

Ο δεσμός είναι $\phi(x, y) = 0$, όπου $\phi(x, y) = 4x^2 + 4y^2 - 1$ και η απόσταση από την δοσμένη ευθεία του τυχαίου σημείου (x, y) δίνεται από την συνάρτηση $d(x, y) = \dfrac{|x + y - 1|}{\sqrt{1^2 + 1^2}}$. Ισοδύναμα, αντί της d, θα ελαχιστοποιήσουμε τη συνάρτηση $f(x, y) = (x + y - 1)^2$.
Η συνάρτηση Lagrange είναι η

$$L(x, y) = (x + y - 1)^2 + \lambda(4x^2 + 4y^2 - 1),$$

Λύση (συνέχεια)

με μερικές παραγώγους

$$L_x = 2(x+y-1) + 8\lambda x,\ L_y = 2(x+y-1) + 8\lambda y,\ L_{xx} = L_{yy} = 2 + 8\lambda$$

και $L_{xy} = L_{yx} = 2$. Αναζητούμε τις λύσεις του συστήματος

$$\begin{cases} L_x = 0 \\ L_y = 0 \\ \phi = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2(x+y-1) + 8\lambda x = 0 \\ 2(x+y-1) + 8\lambda y = 0 \\ 4x^2 + 4y^2 - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda(x-y) = 0 \\ 4x^2 + 4y^2 - 1 = 0 \end{cases}$$

Η περίπτωση $\lambda = 0$ απορρίπτεται, διότι τότε η πρώτη εξίσωση δίνει $x + y - 1 = 0$ και η τρίτη δίνει $4x^2 + 4(1-x)^2 - 1 = 8x^2 - 8x + 3 = 0$, η οποία είναι αδύνατη (έχει αρνητική διακρίνουσα). Επομένως, είναι $x = y$ και, αντικαθιστώντας στην $\phi = 0$, βρίσκουμε ότι $x = y = \dfrac{\pm 1}{2\sqrt{2}}$.

Θέτοντας $y = x$ στην $L_x = 0$, βρίσκουμε ότι
$\lambda = \dfrac{1-2x}{4x} = \dfrac{1}{4x} - \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{4}\left(\dfrac{1}{x} - 2\right)$.

Λύση (συνέχεια)

Επομένως, οι λύσεις (x, y, λ) του συστήματος $L_x = L_y = \phi = 0$ είναι οι τριάδες

$$\left(\frac{1}{a}, \frac{1}{a}, \frac{a-2}{4}\right) \qquad \text{και} \qquad \left(\frac{-1}{a}, \frac{-1}{a}, \frac{-a-2}{4}\right), \qquad \text{όπου } a = 2\sqrt{2}.$$

$$\begin{aligned} D(x, y, \lambda) &= \begin{vmatrix} L_{xx} & L_{xy} & \phi_x \\ L_{yx} & L_{yy} & \phi_y \\ \phi_x & \phi_y & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2+8\lambda & 2 & 8x \\ 2 & 2+8\lambda & 8y \\ 8x & 8y & 0 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} 2+8\lambda & -8\lambda & 8x \\ 2 & 8\lambda & 8y \\ 8x & 8(y-x) & 0 \end{vmatrix} \end{aligned}$$

Λύση (συνέχεια)

Θέτοντας $y = x$, έχουμε ότι

$$D(x, x, \lambda) = \begin{vmatrix} 2+8\lambda & -8\lambda & 8x \\ 2 & +8\lambda & 8x \\ 8x & 0 & 0 \end{vmatrix} = 8x \begin{vmatrix} -8\lambda & 8x \\ +8\lambda & 8x \end{vmatrix}$$
$$= -8^3 x(\lambda x + \lambda x) = -8^3 2x^2 \lambda$$

Το πρόσημο της παράστασης εξαρτάται αποκλειστικά από το λ, επομένως $D\left(\frac{1}{a}, \frac{1}{a}, \frac{a-2}{4}\right) < 0$ και $D\left(\frac{-1}{a}, \frac{-1}{a}, \frac{-a-2}{4}\right) > 0$, δηλαδή το σημείο $\left(\frac{1}{a}, \frac{1}{a}\right)$ της περιφέρειας έχει την ελάχιστη απόσταση από την ευθεία και το $\left(\frac{-1}{a}, \frac{-1}{a}\right)$ έχει τη μέγιστη.