ΑΝΑΛΥΣΗ ΙΙ

ΚΕΦ.13: Διπλό ολοκλήρωμα
Σημειώσεις Φροντιστηρίου

Τμήμα Πληροφορικής
Πανεπιστήμιο Πειραιώς

Διπλό ολοκλήρωμα σε ορθογώνιο

Έστω f/T ολοκληρώσιμη, όπου $T = [a, b] \times [c, d]$ (ορθογώνιο), $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, $a < b$, $c < d$, δηλαδή υπάρχει το διπλό ολοκλήρωμα

$$I = \iint\limits_T f(x, y)dxdy.$$

Τότε, το I υπολογίζεται επαναληπτικά, σύμφωνα με την επόμενη πρόταση:

Πρόταση (4.1)

Αν $f/[a, b] \times [c, d]$ ολοκληρώσιμη και οι συναρτήσεις $g_x(y) = f(x, y)/[c, d]$ είναι ολοκληρώσιμες για κάθε $x \in [a, b]$, τότε και η $h(x) = \int_c^d f(x, y)dy/[a, b]$ είναι ολοκληρώσιμη και ισχύει ότι

$$\iint\limits_T f(x, y)dxdy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x, y)dy \right) dx.$$

Διπλό ολοκλήρωμα σε ορθογώνιο

Παρατηρήσεις:

- Η πρόταση εφαρμόζεται εφόσον γνωρίζουμε ότι η f είναι ολοκληρώσιμη. Δύο μεγάλες κατηγορίες ολοκληρώσιμων συναρτήσεων είναι οι συνεχείς και οι μονότονες.
- Ομοίως προκύπτει ότι, αν $h_y(x) = f(x, y)/[a, b]$ ολοκληρώσιμη για κάθε $y \in [c, d]$, τότε

$$I = \int_c^d \left(\int_a^b f(x, y) dx \right) dy.$$

- Αν επιπλέον η f είναι χωριζομένων μεταβλητών, δηλαδή υπάρχουν ολοκληρώσιμες συναρτήσεις $f_1/[a, b]$ και $f_2/[c, d]$ ώστε $f(x, y) = f_1(x) f_2(y)$, τότε

$$I = \int_c^d \left(\int_a^b f_1(x) f_2(y) dx \right) dy = \int_c^d f_2(y) \left(\int_a^b f_1(x) dx \right) dy$$
$$= \left(\int_a^b f_1(x) dx \right) \left(\int_c^d f_2(y) dy \right)$$

Διπλό ολοκλήρωμα σε φραγμένο σύνολο

Αν το πεδίο ορισμού της f είναι ένα φραγμένο σύνολο $A \subseteq \mathbb{R}^2$, τότε αυτό περιέχεται σε ένα ορθογώνιο T, οπότε επεκτείνουμε την f στο T ορίζοντας $(x, y) \in T \setminus A \Rightarrow f(x, y) = 0$, οπότε

$$I = \iint\limits_A f(x, y)dxdy = \iint\limits_T f(x, y)dxdy$$

και το I υπολογίζεται επαναληπτικά όπως πριν.
Ειδικά, αν το A είναι της μορφής

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b, \phi_1(x) \leq y \leq \phi_2(x)\}$$

όπου ϕ_1, ϕ_2 συνεχείς με $x \in [a, b] \Rightarrow \phi_1(x) \leq \phi_2(x)$, τότε

$$I = \int_a^b \left(\int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} f(x, y)dy \right) dx.$$

Όγκος και εμβαδό ως διπλό ολοκλήρωμα

Έστω f/A συνεχής και μη αρνητική συνάρτηση, όπου A ένα χωρίο του επιπέδου. Τότε ο όγκος V του στερεού

$$\Sigma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in A, 0 \leq z \leq f(x, y)\}$$

ισούται με

$$V = \iint_A f(x, y) \; dxdy.$$

Ειδικά, για το εμβαδό E του χωρίου A ισχύει ότι

$$E = \iint_A 1 \; dxdy.$$

Επιπλέον, αν η f έχει συνεχείς μερικές παραγώγους, τότε το εμβαδό της επιφάνειας $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in A, z = f(x, y)\}$ ισούται με

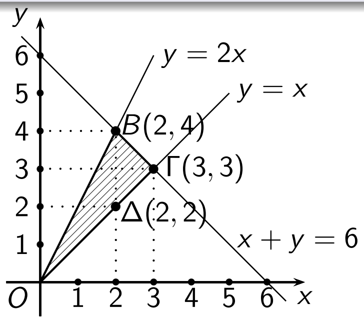
$$\iint_A \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2} \; dxdy.$$

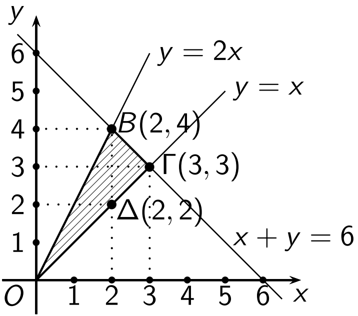
Άσκηση (Λυμένη 10)

Να υπολογισθεί η τιμή του διπλού ολοκληρώματος

$$\iint_A (x^3y + 2x + 5)dxdy,$$

όπου A *το τρίγωνο που σχηματίζεται από τις ευθείες* $y = x$, $y = 2x$ *και* $x + y = 6$.





Λύση

Αρχικά βρίσκουμε τις τρεις κορυφές O, B, Γ του τριγώνου. Το τρίγωνο $OB\Gamma$ διαμερίζεται στα τρίγωνα $OB\Delta$ και $B\Gamma\Delta$, τα οποία αντιστοιχούν στα χωρία

$$A_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 2, x \leq y \leq 2x\},$$
$$A_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 2 \leq x \leq 3, x \leq y \leq 6 - x\}.$$

Λύση (συνέχεια)

Υπολογίζουμε τα επιμέρους ολοκληρώματα:

$$
\begin{aligned}
I_1 &= \iint\limits_{A_1} (x^3y + 2x + 5)\,dxdy = \int_0^2 \left(\int_x^{2x} (x^3y + 2x + 5)\,dy \right) dx \\
&= \int_0^2 \left[\frac{x^3y^2}{2} + 2xy + 5y \right]_x^{2x} dx \\
&= \int_0^2 \left(\frac{x^3(4x^2 - x^2)}{2} + 2x(2x - x) + 5(2x - x) \right) dx \\
&= \int_0^2 \left(\frac{3x^5}{2} + 2x^2 + 5x \right) dx \\
&= \left[\frac{x^6}{4} + \frac{2x^3}{3} + \frac{5x^2}{2} \right]_0^2 = \frac{2^6}{4} + \frac{2 \cdot 2^3}{3} + \frac{5 \cdot 2^2}{2} = \frac{94}{3}
\end{aligned}
$$

και

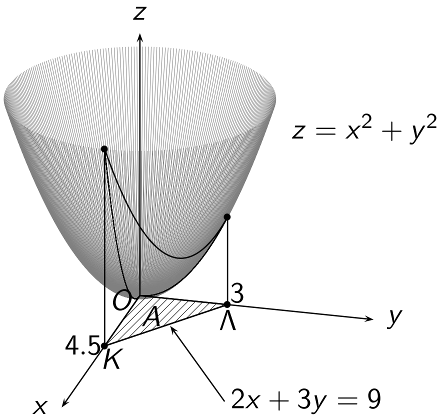
Λύση (συνέχεια)

$$
\begin{aligned}
I_2 &= \iint\limits_{A_2} (x^3y + 2x + 5)dxdy = \int_2^3 \left(\int_x^{6-x} (x^3y + 2x + 5)dy \right) dx \\
&= \int_2^3 \left[\frac{x^3y^2}{2} + 2xy + 5y \right]_x^{6-x} dx \\
&= \int_2^3 \left(\frac{x^3((6-x)^2 - x^2)}{2} + (2x+5)(6-x-x) \right) dx \\
&= \int_2^3 \left(\frac{x^3(36-12x)}{2} - 4x^2 + 2x + 30 \right) dx \\
&= \left[\frac{18x^4}{4} - \frac{6x^5}{5} - \frac{4x^3}{3} + x^2 + 30x \right]_2^3 = \frac{1469}{30}.
\end{aligned}
$$

Επομένως, το ζητούμενο ολοκλήρωμα ισούται με
$I_1 + I_2 = \dfrac{1469}{30} + \dfrac{94}{3} = \dfrac{803}{10}$.

Άσκηση (Λυμένη 28)

Να υπολογισθεί ο όγκος του στερεού που φράσσεται από τα τέσσερα επίπεδα $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ *και* $2x + 3y = 9$, *και την επιφάνεια* $z = x^2 + y^2$



Λύση

Ο ζητούμενος όγκος είναι

$$V = \iint\limits_A (x^2 + y^2)dxdy,$$

όπου A το τρίγωνο $OK\Lambda$ (βλ. σχήμα).
Επομένως, $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq (9 - 3y)/2, 0 \leq y \leq 3\}$ και

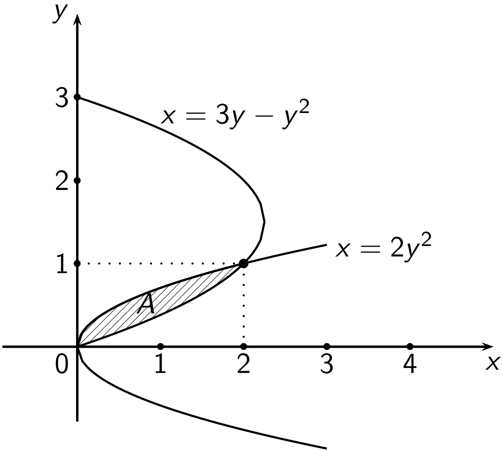
$$V = \int_0^3 \left(\int_0^{(9-3y)/2} (x^2 + y^2)dx \right) dy = \int_0^3 \left[\frac{x^3}{3} + xy^2 \right]_0^{(9-3y)/2} dy$$

$$= \int_0^3 \left(\frac{(9-3y)^3}{24} + \frac{(9-3y)y^2}{2} \right) dy = \int_0^3 \left(\frac{9}{8}(3-y)^3 + \frac{3}{2}(3y^2 - y^3) \right) dy$$

$$= \left[\frac{-9}{32}(3 - y)^4 + \frac{3}{2}(y^3 - \frac{y^4}{4}) \right]_0^3 = \frac{1053}{32}$$

Άσκηση (Λυμένη 32)

Να υπολογισθεί το εμβαδό του χωρίου A που ορίζουν οι καμπύλες $x = 2y^2$ και $x = 3y - y^2$.



Λύση

Το εμβαδό του χωρίου (βλ. σχήμα)

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 2y^2 \leq x \leq 3y - y^2, 0 \leq y \leq 1\}$$

ισούται με

$$E = \iint\limits_A 1dxdy = \int_0^1 \left(\int_{2y^2}^{3y-y^2} 1dx \right) dy = \int_0^1 \left(3y - y^2 - 2y^2\right) dy$$
$$= \int_0^1 \left(3y - 3y^2\right) dy = \left[\frac{3}{2}y^2 - y^3\right]_0^1 = \frac{1}{2}$$

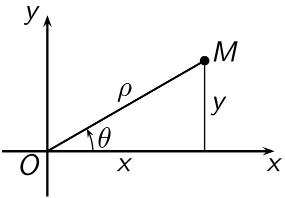
Πρόταση (6.1)

Έστω f/A ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Αν οι συναρτήσεις $x = \phi(u, v)$ και $y = \sigma(u, v)$ έχουν συνεχείς μερικές παραγώγους, ορίζουν μια αμφιμονοσήμαντη απεικόνιση μεταξύ των χωρίων A και $A' = \{(u, v) : (\phi(u, v), \sigma(u, v)) \in A\}$ και η Ιακωβιανή ορίζουσα

$$J(u, v) := \begin{vmatrix} \frac{\partial \phi}{\partial u} & \frac{\partial \phi}{\partial v} \\ \frac{\partial \sigma}{\partial u} & \frac{\partial \sigma}{\partial v} \end{vmatrix}$$

διατηρεί σταθερό πρόσημο, τότε και η $g(u, v) = f(\phi(u, v), \sigma(u, v))/A'$ είναι ολοκληρώσιμη, με

$$\iint\limits_{A} f(x, y)dxdy = \iint\limits_{A'} g(u, v)|J(u, v)|dudv.$$



Η αλλαγή μεταβλητών $\begin{cases} x &= \rho\cos\theta \\ y &= \rho\sin\theta \end{cases}$

μετατρέπει αμφιμονοσήμαντα κάθε ζεύγος $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ σε ένα ζεύγος $(\rho, \theta) \in (0, +\infty) \times [0, 2\pi)$. Ειδικά το $(x, y) = (0, 0)$ απεικονίζεται στο ζεύγος με $\rho = \theta = 0$.

Τότε ισχύουν οι τύποι $x^2 + y^2 = \rho^2$ και $\theta = \mathrm{arctg}(y/x)$.

Η Ιακωβιανή ορίζουσα του μετασχηματισμού είναι η

$$J(\rho, \theta) = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial \rho} & \dfrac{\partial x}{\partial \theta} \\ \dfrac{\partial y}{\partial \rho} & \dfrac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -\rho\sin\theta \\ \sin\theta & \rho\cos\theta \end{vmatrix} = \rho\cos^2\theta + \rho\sin^2\theta = \rho.$$

Αντί του διαστήματος $[0, 2\pi)$ μπορεί να χρησιμοποιηθεί οποιοδήποτε διάστημα μήκους 2π, οπότε η μετατροπή είναι αμφιμονοσήμαντη.

Γραμμικός μετασχηματισμός

Η αλλαγή μεταβλητών

$$\begin{cases} x & = au + bv \\ y & = cu + dv \end{cases}$$

όπου $a, b, c, d \in \mathbb{R}^2$, με $ad \neq bc$, μετατρέπει αμφιμονοσήμαντα κάθε ζεύγος $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ σε ένα ζεύγος $(u, v) \in \mathbb{R}^2$.
Η Ιακωβιανή ορίζουσα του μετασχηματισμού είναι η

$$J(u, v) = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc.$$

Άσκηση (Λυμένη 16)

Να υπολογισθεί η τιμή του διπλού ολοκληρώματος $\iint\limits_A e^{x^2+y^2}dxdy$*, όπου* $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \leq 1, -x \leq y \leq x\}$.

Λύση

Θα χρησιμοποιηθεί ο μετασχηματισμός σε πολικές συντεταγμένες

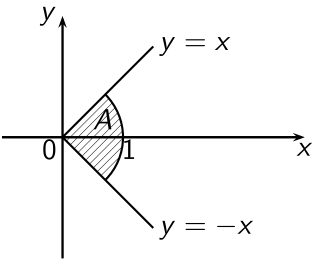
$$x = \rho\cos\theta, \quad y = \rho\sin\theta, \qquad \rho > 0, \quad \theta \in [-\pi,\pi),$$

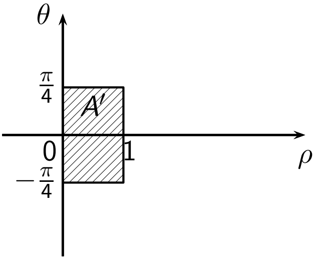
ο οποίος μετατρέπει το χωρίο A στο $A' = [0,1] \times [-\pi/4, \pi/4]$.
Πράγματι, για κάθε σημείο $(x,y) \in A \setminus \{(0,0)\}$, έχουμε ότι

$$0 < x^2+y^2 \leq 1 \Leftrightarrow 0 < \rho^2 \leq 1 \Leftrightarrow \rho \in (0,1]$$

και

$$\begin{cases} x > 0, \\ |y| \leq x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0, \\ |y|/|x| \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \theta \in [-\pi/2, \pi/2], \\ |\mathrm{tg}\ \theta| \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \theta \in [-\pi/4, \pi/4].$$





Λύση (συνέχεια)

Η Ιακωβιανή ορίζουσα είναι η $J(\rho,\theta)=\rho$, επομένως,

$$\iint\limits_{A} e^{x^2+y^2}dxdy = \iint\limits_{A'} e^{\rho^2}\rho d\rho d\theta = \int_{-\pi/4}^{\pi/4}\left(\int_0^1 e^{\rho^2}\rho d\rho\right)d\theta$$

$$= \left(\int_{-\pi/4}^{\pi/4} d\theta\right)\left(\int_0^1 e^{\rho^2}\rho d\rho\right) = \frac{\pi}{2}\left[\frac{e^{\rho^2}}{2}\right]_0^1 = \frac{\pi(e-1)}{4}.$$

Ασκήσεις

Παρατήρηση: Στην προηγούμενη άσκηση επιλέχθηκε για τη γωνία θ του μετασχηματισμού το διάστημα $[-\pi, \pi)$ αντί του $[0, 2\pi)$, επειδή οδηγεί σε απλούστερες πράξεις.

Συγκεκριμένα, με το πρώτο διάστημα, ο μετασχηματισμός μετατρέπει το A στο $A' = [0,1] \times [-\pi/4, \pi/4]$, ενώ με το δεύτερο διάστημα, το A μετατρέπεται στο $A_1 \cup A_2$, όπου

$$A_1 = [0,1] \times [0, \pi/4] \qquad \text{και} \qquad A_2 = [0,1] \times [7\pi/4, 2\pi),$$

οπότε

$$\begin{aligned}\iint\limits_{A} e^{x^2+y^2} dxdy &= \iint\limits_{A_1} e^{\rho^2} \rho d\rho d\theta + \iint\limits_{A_2} e^{\rho^2} \rho d\rho d\theta \\ &= \int_0^{\pi/4} \left(\int_0^1 e^{\rho^2} \rho d\rho \right) d\theta + \int_{7\pi/4}^{2\pi} \left(\int_0^1 e^{\rho^2} \rho d\rho \right) d\theta\end{aligned}$$

και στη συνέχεια επιλύονται ξεχωριστά τα δύο επιμέρους ολοκληρώματα.

Άσκηση (Λυμένη 19)

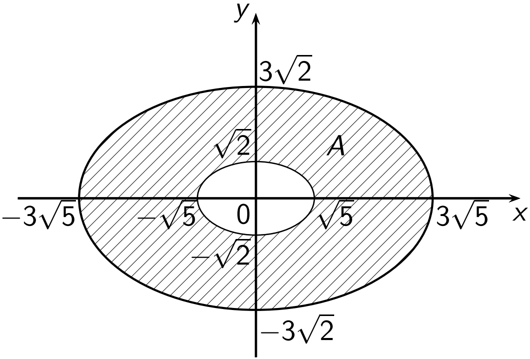
Να υπολογισθεί η τιμή του διπλού ολοκληρώματος

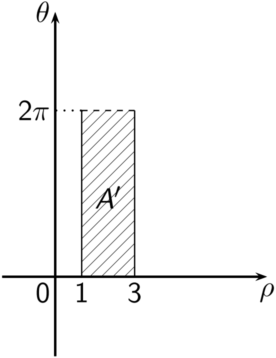
$$\iint_A \sqrt{9 - \frac{x^2}{5} - \frac{y^2}{2}}\,dxdy,$$

όπου A ο ελλειπτικός δακτύλιος που ορίζεται από τις ελλείψεις $\frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{2} = 1$ *και* $\frac{x^2}{45} + \frac{y^2}{18} = 1$.

Λύση

Οι εξισώσεις των ελλείψεων γράφονται ισοδύναμα ως $\frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{2} = 1$ και $\frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{2} = 9$, οπότε $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq \frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{2} \leq 9\}$.





Λύση (συνέχεια)

Θα χρησιμοποιηθεί ο μετασχηματισμός

$$x = \rho\sqrt{5}\cos\theta, \quad y = \rho\sqrt{2}\sin\theta, \qquad \rho > 0, \quad \theta \in [0, 2\pi),$$

ο οποίος μετατρέπει το A στο $A' = [1, 3] \times [0, 2\pi)$.

Λύση (συνέχεια)

Η Ιακωβιανή ορίζουσα του μετασχηματισμού είναι η

$$J(\rho,\theta)=\begin{vmatrix}\partial x/\partial\rho & \partial x/\partial\theta\\ \partial y/\partial\rho & \partial y/\partial\theta\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\sqrt{5}\cos\theta & -\rho\sqrt{5}\sin\theta\\ \sqrt{2}\sin\theta & \rho\sqrt{2}\cos\theta\end{vmatrix}$$
$$=\rho\sqrt{10}(\cos^2\theta+\sin^2\theta)=\rho\sqrt{10}.$$

Επομένως,

$$\iint_A \sqrt{9-\frac{x^2}{5}-\frac{y^2}{2}}dxdy=\iint_{A'}\sqrt{9-\rho^2}\rho\sqrt{10}d\rho d\theta$$
$$=\int_0^{2\pi}\left(\int_1^3\sqrt{9-\rho^2}\rho\sqrt{10}d\rho\right)d\theta=2\pi\sqrt{10}\int_1^3\sqrt{9-\rho^2}\rho d\rho$$
$$=2\pi\sqrt{10}\left[\frac{-1}{3}(9-\rho^2)^{3/2}\right]_1^3=2\pi\sqrt{10}\frac{8^{3/2}}{3}=\frac{64\pi\sqrt{5}}{3}$$

Άσκηση (ΙΟΥΝ 2017.)

Να υπολογισθεί η τιμή του διπλού ολοκληρώματος

$$\iint_A x\sqrt{1-x^2-y^2}\,dxdy,$$

όπου $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1, x \geq 0, y \leq 0\}$.

Λύση

Θέτοντας $x = \rho\cos\theta$, $y = \rho\sin\theta$, το χωρίο A μετασχηματίζεται στο $A' = [0,1] \times [3\pi/2, 2\pi]$ και

Ασκήσεις

Λύση (συνέχεια)

$$\iint_A x\sqrt{1-x^2-y^2}dxdy = \iint_{A'} \rho\cos\theta\sqrt{1-\rho^2}\rho d\rho d\theta$$

$$= \int_{3\pi/2}^{2\pi} \cos\theta \left(\int_0^1 \rho\sqrt{1-\rho^2}\rho d\rho\right) d\theta$$

$$= \left(\int_0^1 \rho\sqrt{1-\rho^2}\rho d\rho\right)\left(\int_{3\pi/2}^{2\pi} \cos\theta d\theta\right)$$

$$\overset{\rho^2=t}{=} \left(\int_0^1 t^{1/2}(1-t)^{1/2}\frac{1}{2}dt\right)[\sin\theta]_{3\pi/2}^{2\pi}$$

$$= \frac{1}{2}B(3/2,3/2) = \frac{\Gamma(3/2)\Gamma(3/2)}{2\Gamma(3)} = \frac{(\sqrt{\pi}/2)^2}{4} = \frac{\pi}{16}.$$

Άσκηση (ΦΕΒ 2016.)

Να υπολογισθεί η τιμή του διπλού ολοκληρώματος

$$\iint_A (x^2 + 4y^2 + y)dxdy$$

όπου $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 4, x \geq 0, y \geq 0\}$.

Λύση

Θέτοντας $x = \rho\cos\theta$, $y = \rho\sin\theta$, το χωρίο A μετασχηματίζεται στο $A' = [0, 2] \times [0, \pi/2]$ και

Ασκήσεις

Λύση (συνέχεια)

$$\iint\limits_{A}(x^2+4y^2+y)dxdy=\iint\limits_{A'}(\rho^2+3\rho^2\sin^2\theta+\rho\sin\theta)\rho d\rho d\theta$$

$$=\int_0^{\pi/2}\left[\frac{\rho^4}{4}+\frac{3\rho^4}{4}\sin^2\theta+\frac{\rho^3}{3}\sin\theta\right]_0^2 d\theta$$

$$=\int_0^{\pi/2}\left(4+6(1-\cos 2\theta)+\frac{8}{3}\sin\theta\right)d\theta$$

$$=\left[10\theta-3\sin 2\theta-\frac{8}{3}\cos\theta\right]_0^{\pi/2}$$

$$=10(\pi/2-0)-\frac{8}{3}(0-1)=5\pi+\frac{8}{3}$$

Άσκηση (ΙΟΥΝ 2013.)

Να υπολογισθεί η τιμή του διπλού ολοκληρώματος

$$\iint_A (2x+y)^3 (x-y)^4 \, dxdy,$$

όπου A είναι το παραλληλόγραμμο που ορίζεται από τις ευθείες:

$$2x+y=-3, \quad 2x+y=5, \quad x-y=1, \quad x-y=4.$$

Λύση

Είναι $A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : -3\le 2x+y\le 5, 1\le x-y\le 4\}$ και, θέτοντας $u=2x+y$ και $v=x-y$, το χωρίο A μετασχηματίζεται στο $A'=[-3,5]\times[1,4]$ και

$$\begin{cases} u=2x+y \\ v=x-y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\dfrac{u+v}{3} \\ y=\dfrac{u-2v}{3} \end{cases}$$

Λύση (συνέχεια)

Η Ιακωβιανή ορίζουσα του μετασχηματισμού είναι η

$$J(u,v) = \begin{vmatrix} \partial x/\partial u & \partial x/\partial v \\ \partial y/\partial u & \partial y/\partial v \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & -2/3 \end{vmatrix} = \frac{-2}{9} - \frac{1}{9} = \frac{-1}{3}.$$

Επομένως,

$$\iint\limits_{A} (2x+y)^3(x-y)^4 dxdy = \iint\limits_{A'} \frac{1}{3} u^3 v^4 dudv$$

$$= \frac{1}{3} \int_1^4 \left(\int_{-3}^5 u^3 v^4 du \right) dv$$

$$= \frac{1}{3} \left(\int_1^4 v^4 dv \right) \left(\int_{-3}^5 u^3 du \right) = \frac{1}{3} \left[\frac{v^5}{5} \right]_1^4 \left[\frac{u^4}{4} \right]_{-3}^5$$

$$= \frac{1}{3 \cdot 4 \cdot 5} (4^5 - 1)(5^4 - 3^4) = \frac{46376}{5}$$

Ασκήσεις

Άσκηση (ΣΕΠ 2013.)

Να υπολογισθεί η τιμή του διπλού ολοκληρώματος

$$\iint_A \cos^2(x-y)e^{x+y}\,dxdy,$$

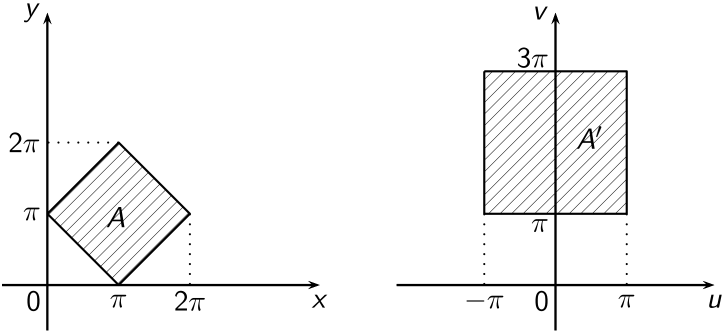
όπου A *είναι το παραλληλόγραμμο με κορυφές τα σημεία* $(\pi, 0), (2\pi, \pi), (\pi, 2\pi)$ *και* $(0, \pi)$.

Λύση

Το παραλληλόγραμμο A ορίζεται από τις ευθείες

$$x+y=\pi, \qquad x+y=3\pi, \qquad x-y=-\pi, \qquad x-y=\pi,$$

όπως φαίνεται στο επόμενο σχήμα.



Λύση (συνέχεια)

Επομένως, ο μετασχηματισμός $u = x - y$, $v = x + y$, με

$$\begin{cases} u = x - y \\ v = x + y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{u+v}{2} \\ y = \dfrac{v-u}{2} \end{cases}$$

μετασχηματίζει το A στο $A' = [-\pi, \pi] \times [\pi, 3\pi]$.

Λύση (συνέχεια)

Η Ιακωβιανή ορίζουσα του μετασχηματισμού είναι η

$$J(u,v) = \begin{vmatrix} \partial x/\partial u & \partial x/\partial v \\ \partial y/\partial u & \partial y/\partial v \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1/2 & 1/2 \\ -1/2 & 1/2 \end{vmatrix} = \frac{1}{4} - \frac{-1}{4} = \frac{1}{2}.$$

Επομένως,

$$\iint\limits_{A} \cos^2(x-y)e^{x+y}\,dxdy = \frac{1}{2}\iint\limits_{A'} \cos^2 u e^{v}\,dudv$$

$$= \frac{1}{2}\int_{\pi}^{3\pi}\left(\int_{-\pi}^{\pi} e^{v}\cos^2 u du\right) dv$$

$$= \frac{1}{2}\left(\int_{\pi}^{3\pi} e^{v} dv\right)\left(\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1+\cos 2u}{2} du\right) = \frac{1}{4}\left[e^{v}\right]_{\pi}^{3\pi}\left[u + \frac{\sin 2u}{2}\right]_{-\pi}^{\pi}$$

$$= \frac{1}{4}(e^{3\pi} - e^{\pi})(\pi - (-\pi)) = \frac{\pi}{2}(e^{3\pi} - e^{\pi})$$

Γενικευμένο διπλό ολοκλήρωμα πρώτου είδους

Έστω συνεχής συνάρτηση f/A, όπου $A \subseteq \mathbb{R}^2$ **μη φραγμένο**. Αν το όριο $\lim\limits_{n\to\infty} \iint\limits_{A_n} f(x,y)dxdy$ είναι ίσο με $I \in \mathbb{R}$ για κάθε επιλογή ακολουθίας $(A_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ **κλειστών και φραγμένων** υποσυνόλων του A με τις ιδιότητες

- *i)* $A_n \subseteq A_{n+1}$, για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$,
- *ii)* $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = A$,
- *iii)* Υπάρχει $n \in \mathbb{N}^*$, τέτοιος ώστε $B \subseteq A_n$, για κάθε B κλειστό και φραγμένο υποσύνολο του A,

τότε και μόνο τότε είναι $\iint\limits_{A} f(x,y)dxdy = I$.

Επομένως, αν γνωρίζουμε ότι υπάρχει (στο $\mathbb{R}$) το $\iint\limits_{A} f(x,y)dxdy$, τότε η επιλογή της ακολουθίας (A_n) για τον υπολογισμό του είναι αδιάφορη.
Ειδικά, αν η $f(x,y)$ είναι **μη αρνητική**, τότε το $\iint\limits_{A} f(x,y)dxdy$ υπάρχει στο $\overline{\mathbb{R}}$ και το το όριο $\lim\limits_{n\to\infty} \iint\limits_{A_n} f(x,y)dxdy$ συγκλίνει σε αυτό για κάθε ακολουθία (A_n) με τις παραπάνω ιδιότητες.

Γενικευμένο διπλό ολοκλήρωμα δεύτερου είδους

Έστω συνεχής συνάρτηση $f/A \setminus \{(x_0, y_0)\}$, όπου $A \subseteq \mathbb{R}^2$ **φραγμένο**, (x_0, y_0) οριακό σημείο του A και $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = \pm\infty$. Αν το όριο $\lim\limits_{n\to\infty} \iint\limits_{A_n} f(x,y)dxdy$ είναι ίσο με $I \in \mathbb{R}$, για κάθε επιλογή ακολουθίας $(A_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ **κλειστών** υποσυνόλων του $A \setminus \{(x_0, y_0)\}$ με τις ιδιότητες

i) $A_n \subseteq A_{n+1}$, για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$,

ii) $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = A \setminus \{(x_0, y_0)\}$,

iii) Υπάρχει $n \in \mathbb{N}^*$, τέτοιος ώστε $B \subseteq A_n$, για κάθε B κλειστό υποσύνολο του $A \setminus \{(x_0, y_0)\}$,

τότε και μόνο τότε είναι $\iint\limits_{A} f(x,y)dxdy = I$.

Ειδικά, αν η $f(x,y)$ είναι **μη αρνητική**, τότε το $\iint\limits_{A} f(x,y)dxdy$ υπάρχει στο $\overline{\mathbb{R}}$ και το το όριο $\lim\limits_{n\to\infty} \iint\limits_{A_n} f(x,y)dxdy$ συγκλίνει σε αυτό για κάθε ακολουθία (A_n) με τις παραπάνω ιδιότητες.

Άσκηση (ΣΕΠ 2017)

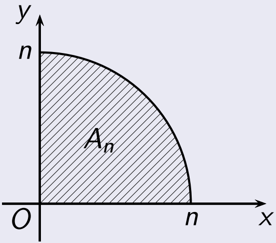
Να υπολογισθεί η τιμή του διπλού ολοκληρώματος $\displaystyle\iint_A \frac{dxdy}{(x^2+y^2+1)^2}$,

όταν $A = [0,+\infty) \times [0,+\infty)$.

Λύση

Θεωρούμε την ακολουθία συνόλων (A_n), με

$$A_n = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq n^2, x \geq 0, y \geq 0\}, \qquad n \in \mathbb{N}^*.$$



Λύση (συνέχεια)

Χρησιμοποιώντας μετασχηματισμό σε πολικές συντεταγμένες, έχουμε ότι

$$I_n = \iint\limits_{A_n} \frac{dxdy}{(x^2+y^2+1)^2} = \int_0^{\pi/2} \int_0^n \frac{\rho d\rho d\theta}{(\rho^2+1)^2}$$

$$= \frac{\pi}{2}\left[\frac{-1}{2(\rho^2+1)}\right]_0^n = \frac{\pi}{4}\left(1-\frac{1}{n^2+1}\right)$$

Επειδή η ακολουθία (A_n) ικανοποιεί τις ιδιότητες $(i)-(iii)$ και επιπλέον η συνάρτηση $f(x,y) = (x^2+y^2+1)^{-2}/A$ είναι μη αρνητική, έπεται το εν λόγω γενικευμένο διπλό ολοκλήρωμα συγκλίνει και

$$\iint\limits_{A} \frac{dxdy}{(x^2+y^2+1)^2} = \lim_{n\to\infty} I_n = \frac{\pi}{4}.$$

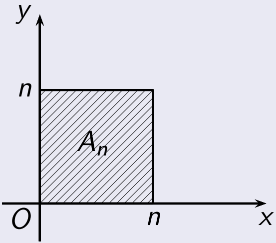
Άσκηση (Λυμένη 37)

Να υπολογισθεί η τιμή του διπλού ολοκληρώματος

$$\iint_A (x+y)e^{-x-y}\,dxdy, \qquad \text{όπου } A=[0,+\infty)^2.$$

Λύση

Το ολοκλήρωμα συγκλίνει στο $\overline{\mathbb{R}}$, διότι η συνάρτηση $f(x,y)=(x+y)e^{-x-y}/A$ είναι μη αρνητική. Θεωρούμε την ακολουθία συνόλων (A_n), με $A_n=[0,n]^2$,



Λύση (συνέχεια)

και το ολοκλήρωμα

$$I_n = \iint\limits_{A_n} (x+y)e^{-x-y}\,dxdy = \int_0^n \left(\int_0^n (x+y)e^{-x-y}\,dx \right) dy.$$

Επειδή

$$\begin{aligned} &\int (x+a)e^{-x-b}dx = \int (x+a)(-e^{-x-b})'dx \\ =&(x+a)(-e^{-x-b}) + \int e^{-x-b}dx \\ =& -(x+a)e^{-x-b} - e^{-x-b} + c = -(x+a+1)e^{-x-b} + c, \end{aligned}$$

έπεται ότι

Λύση (συνέχεια)

$$
\begin{aligned}
I_n &= \int_0^n \left[-(x+y+1)e^{-x-y}\right]_0^n dy \\
&= \int_0^n \left((y+1)e^{-y} - (n+y+1)e^{-n-y}\right) dy \\
&= \left[-(y+2)e^{-y} + (n+y+2)e^{-n-y}\right]_0^n \\
&= -(n+2)e^{-n} + 2(n+1)e^{-2n} + 2 - (n+2)e^{-n}
\end{aligned}
$$

Επομένως,

$$
\iint_A (x+y)e^{-x-y}\,dxdy = \lim_{n\to\infty} I_n = 2.
$$

Άσκηση (ΣΕΠ 2015.)

Να υπολογισθεί η τιμή του διπλού ολοκληρώματος $\displaystyle\iint\limits_A \frac{\ln(x^2+y^2)}{\sqrt{x^2+y^2}}dxdy$,

όπου $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x^2+y^2 \leq e^2\}$.

Λύση

Έστω η συνάρτηση $f(x,y) = \dfrac{\ln(x^2+y^2)}{\sqrt{x^2+y^2}}/A$. Είναι

$$\iint\limits_A f(x,y)dxdy = \iint\limits_{B_1} f(x,y)dxdy + \iint\limits_{B_2} f(x,y)dxdy,$$

όπου

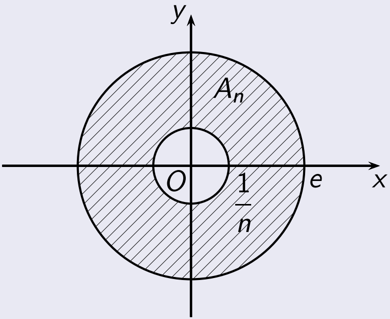
$$B_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x^2+y^2 \leq 1\},$$
$$B_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x^2+y^2 \leq e^2\}.$$

Λύση (συνέχεια)

Αφενός, το ολοκλήρωμα της f στο B_1 συγκλίνει στο $\overline{\mathbb{R}}$, ως γενικευμένο δευτέρου είδους μιας μη θετικής συνάρτησης. Αφετέρου, το ολοκλήρωμα της f στο B_2 ισούται με κάποιον πραγματικό αριθμό. Επομένως, συγκλίνει στο $\overline{\mathbb{R}}$ και το ολοκλήρωμα της f στο A.

Για τον υπολογισμό του, θεωρούμε την ακολουθία συνόλων (A_n), με

$$A_n = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1/n^2 \leq x^2 + y^2 \leq e^2\}.$$



Λύση (συνέχεια)

Εφαρμόζοντας μετασχηματισμό σε πολικές συντεταγμένες, έχουμε ότι

$$I_n = \iint\limits_{A_n} \frac{\ln(x^2+y^2)}{\sqrt{x^2+y^2}} dxdy = \int_0^{2\pi} \int_{1/n}^{e} \frac{\ln \rho^2}{\rho} \rho \; d\rho d\theta = 2\pi \int_{1/n}^{e} 2 \ln \rho \; d\rho$$

$$= 4\pi \int_{1/n}^{e} \rho' \ln \rho \; d\rho = 4\pi \left([\rho \ln \rho]_{1/n}^{e} - \int_{1/n}^{e} \rho (\ln \rho)' d\rho \right)$$

$$= 4\pi \left(e - \frac{\ln(1/n)}{n} - (e - 1/n) \right)$$

$$= 4\pi \frac{1 + \ln n}{n}$$

Επομένως, το εν λόγω ολοκλήρωμα συγκλίνει στο $\lim I_n = 0$.

Άσκηση (Λυμένη άσκηση 44)

Να υπολογισθεί η τιμή του γενικευμένου διπλού ολοκληρώματος

$$\iint\limits_A \frac{dxdy}{\sqrt{1-y}},$$

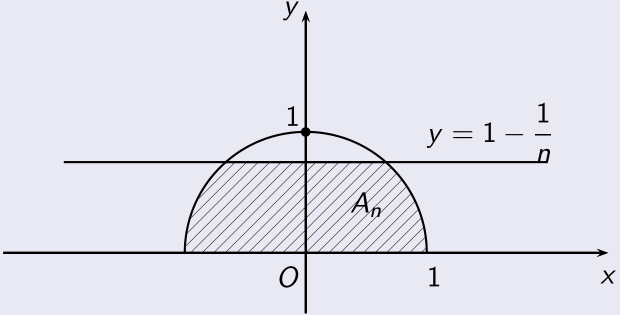
όπου $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1, y \geq 0\}$.

Λύση

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x, y) = (1-y)^{-1/2}/A'$, όπου $A' = A \setminus \{(0, 1)\}$. Το ολοκλήρωμα συγκλίνει στο $\overline{\mathbb{R}}$, διότι η f είναι μη αρνητική. Αν και η μορφή του χωρίου A υποδεικνύει μετασχηματισμό σε πολικές συνεταγμένες, εντούτοις δεν οδηγεί σε απλό ολοκλήρωμα. Για την προσέγγιση του A, θα χρησιμοποιηθεί η ακολουθία συνόλων

Λύση (συνέχεια)

$$A_n = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -\sqrt{1-y^2} \leq x \leq \sqrt{1-y^2}, 0 \leq y \leq 1 - 1/n\},$$



η οποία ικανοποιεί τις ιδιότητες $(i) - (iii)$.

Λύση (συνέχεια)

Είναι

$$I_n = \iint\limits_{A_n} \frac{dxdy}{\sqrt{1-y}} = \int_0^{1-1/n} \left(\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} \frac{dx}{\sqrt{1-y}} \right) dy$$

$$= \int_0^{1-1/n} \frac{1}{\sqrt{1-y}} \left(\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} dx \right) dy = \int_0^{1-1/n} \frac{2\sqrt{1-y^2}}{\sqrt{1-y}} dy$$

$$= 2\int_0^{1-1/n} \sqrt{1+y}\, dy = \frac{4}{3}\left[(1+y)^{3/2}\right]_0^{1-1/n} = \frac{4}{3}\left((2-1/n)^{3/2}-1\right)$$

Επομένως,

$$\iint\limits_{A} \frac{dxdy}{\sqrt{1-y}} = \lim_{n\to\infty} I_n = \frac{4}{3}\left(2\sqrt{2}-1\right).$$

Άσκηση (ΙΟΥΝ 2015)

Να αποδειχθεί η σχέση

$$\iint_A e^{-(x^2+y^2)}\,dxdy = \frac{\pi}{4},$$

όπου $A = [0, +\infty) \times [0, +\infty)$, *και στη συνέχεια να αποδειχθεί ότι*

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Λύση

Το ολοκλήρωμα $I = \iint_A e^{-(x^2+y^2)}\,dxdy$ συγκλίνει στο $\overline{\mathbb{R}}$, αφού $e^{-(x^2+y^2)} > 0$. Επιπλέον, οι ακολουθίες (A_n) και (B_n), με $A_n = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq n^2, x \geq 0, y \geq 0\}$ και $B_n = [0, n]^2$ ικανοποιούν τις ιδιότητες $(i) - (iii)$ και

Λύση (συνέχεια)

$$I_n = \iint\limits_{A_n} e^{-(x^2+y^2)} dxdy = \int_0^{\pi/2} \int_0^n e^{-\rho^2} \rho d\rho d\theta = \frac{\pi}{2} \left[\frac{-e^{-\rho^2}}{2} \right]_0^n$$
$$= \frac{\pi}{4} \left(1 - e^{-n^2} \right),$$

$$J_n = \iint\limits_{B_n} e^{-(x^2+y^2)} dxdy = \int_0^n e^{-x^2} dx \int_0^n e^{-y^2} dy = \left(\int_0^n e^{-x^2} dx \right)^2$$

Επομένως, $I = \lim I_n = \pi/4$. Κατόπιν τούτων, είναι

$$\left(\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx \right)^2 = \left(\lim \int_0^n e^{-x^2} dx \right)^2 = \lim J_n = \lim I_n = I = \frac{\pi}{4},$$

οπότε $\displaystyle \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$

Άσκηση (ΙΟΥΝ 2015)

Να αποδειχθεί ο τύπος

$$B(m, n) = \frac{\Gamma(m)\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)}, \qquad m, n > 0$$

με τη βοήθεια της σχέσης

$$\Gamma(n) = 2\int_0^{+\infty} u^{2n-1} e^{-u^2} du, \qquad n > 0.$$

Λύση

Θεωρούμε την μη αρνητική συνάρτηση $f(x, y) = x^{2n-1} y^{2m-1} e^{-x^2-y^2}/A$, όπου $A = [0, +\infty)^2$ και τις ακολουθίες (A_k), (B_k) με

$$A_k = [0, k]^2 \qquad \text{και} \qquad B_k = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq k^2, x, y \geq 0\},$$

οι οποίες ικανοποιούν τις ιδιότητες $(i) - (iii)$.

Λύση (συνέχεια)

Για την πρώτη, έχουμε,

$$
\begin{aligned}
I_k &= \iint\limits_{A_k} f(x,y)dxdy = \int_0^k \int_0^k x^{2n-1}e^{-x^2}y^{2m-1}e^{-y^2}dxdy \\
&= \left(\int_0^k x^{2n-1}e^{-x^2}dx\right)\left(\int_0^k y^{2m-1}e^{-y^2}dy\right),
\end{aligned}
$$

ενώ για τη δεύτερη, με μετασχηματισμό σε πολικές συντεταγμένες,

$$
\begin{aligned}
J_k &= \iint\limits_{B_k} f(x,y)dxdy = \int_0^{\pi/2}\int_0^k (\rho\cos\theta)^{2n-1}e^{-\rho^2}(\rho\sin\theta)^{2m-1}\rho d\rho d\theta \\
&= \left(\int_0^{\pi/2}(\cos\theta)^{2n-1}(\sin\theta)^{2m-1}d\theta\right)\int_0^k \rho^{2(n+m)-1}e^{-\rho^2}d\rho \\
&= \frac{1}{2}B(m,n)\int_0^k \rho^{2(n+m)-1}e^{-\rho^2}d\rho.
\end{aligned}
$$

Λύση (συνέχεια)

Παίρνοντας όρια για $k \to \infty$ και δεδομένου ότι το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\iint\limits_A f(x,y)dxdy$ συγκλίνει στο $\overline{\mathbb{R}}$, έχουμε ότι

$$\frac{1}{4}\Gamma(n)\Gamma(m) = \lim_{k\to\infty} I_k = \lim_{k\to\infty} J_k = \frac{1}{2}B(m,n)\frac{1}{2}\Gamma(m+n),$$

οπότε προκύπτει το ζητούμενο.