ΤΜΗΜΑ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ
ΑΝΑΛΥΣΗ II
ΙΟΥΝΙΟΣ 2023
ΝΑ ΑΠΑΝΤΗΘΟΥΝ ΜΟΝΟ 4 ΑΠΟ ΤΑ 5 ΘΕΜΑΤΑ
ΟΜΑΔΑ Α

ΘΕΜΑ 1. Να υπολογισθούν τα γενικευμένα ολοκληρώματα

$$I_1 = \int_0^{+\infty} t^6 e^{-t^2}\ dt, \qquad I_2 = \int_0^3 \frac{\sqrt{3-t}}{\sqrt{t}}\ dt.$$

ΘΕΜΑ 2. Να λυθεί, με τη βοήθεια του μετασχηματισμού Laplace, η διαφορική εξίσωση

$$y''(t) - 2y'(t) + y(t) = e^{2t}, \qquad y(0) = 2, y'(0) = 3.$$

ΘΕΜΑ 3. Να αναπτυχθούν σε σειρές τα ολοκληρώματα

$$\int_0^x \frac{1}{1+t^2}\ dt, \qquad \int_0^x e^{-2t^2}\ dt.$$

ΘΕΜΑ 4. Να ευρεθούν η μέγιστη και η ελάχιστη τιμή της συνάρτησης $f/\mathbb{R}^2$, με

$$f(x,y) = 3x + 4y,$$

όταν $x^2 + y^2 = 25$.

ΘΕΜΑ 5. Να υπολογισθεί η τιμή του διπλού ολοκληρώματος

$$\iint\limits_A x^2y^2\ dxdy, \qquad \text{όπου } A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 4, x \geq 0, y \geq 0\}.$$

ΟΝΟΜΑΤΕΠΩΝΥΜΟ:
ΤΑ ΘΕΜΑΤΑ ΝΑ ΕΠΙΣΤΡΑΦΟΥΝ ΜΑΖΙ ΜΕ ΤΙΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ
ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!

ΤΜΗΜΑ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ
ΑΝΑΛΥΣΗ ΙΙ
ΙΟΥΝΙΟΣ 2023
ΝΑ ΑΠΑΝΤΗΘΟΥΝ ΜΟΝΟ 4 ΑΠΟ ΤΑ 5 ΘΕΜΑΤΑ
ΟΜΑΔΑ Β

ΘΕΜΑ 1. Να υπολογισθούν τα γενικευμένα ολοκληρώματα

$$I_1 = \int_0^{+\infty} t^6 e^{-t^2/2}\, dt, \qquad I_2 = \int_0^4 \frac{\sqrt{4-t}}{\sqrt{t}}\, dt.$$

ΘΕΜΑ 2. Να λυθεί, με τη βοήθεια του μετασχηματισμού Laplace, η διαφορική εξίσωση

$$y''(t) - 2y'(t) + y(t) = e^{2t}, \qquad y(0) = 0, y'(0) = 1.$$

ΘΕΜΑ 3. Να αναπτυχθούν σε σειρές τα ολοκληρώματα

$$\int_0^x \frac{1}{1-t^2}\, dt, \qquad \int_0^x e^{-t^3}\, dt.$$

ΘΕΜΑ 4. Να ευρεθούν η μέγιστη και η ελάχιστη τιμή της συνάρτησης $f/\mathbb{R}^2$, με

$$f(x, y) = 4x + 3y,$$

όταν $x^2 + y^2 = 25$.

ΘΕΜΑ 5. Να υπολογισθεί η τιμή του διπλού ολοκληρώματος

$$\iint_A x^3 y^3\, dxdy, \qquad \text{όπου } A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 4, x \geq 0, y \geq 0\}.$$

ΟΝΟΜΑΤΕΠΩΝΥΜΟ:
ΤΑ ΘΕΜΑΤΑ ΝΑ ΕΠΙΣΤΡΑΦΟΥΝ ΜΑΖΙ ΜΕ ΤΙΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ
ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!

Λύσεις Ομάδας Α

ΘΕΜΑ 1. Να υπολογισθούν τα γενικευμένα ολοκληρώματα

$$I_1 = \int_0^{+\infty} t^6 e^{-t^2}\, dt, \qquad I_2 = \int_0^3 \frac{\sqrt{3-t}}{\sqrt{t}}\, dt.$$

Λύση. Για το πρώτο ολοκλήρωμα, θέτοντας $x = t^2$, οπότε $t = \sqrt{x}$ και $dx = 2tdt$, προκύπτει ότι

$$I_1 = \int_0^{+\infty} t^6 e^{-t^2} dt \overset{x=t^2}{=} \int_0^{+\infty} x^3 e^{-x} \frac{1}{2x^{1/2}} dx = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} x^{5/2} e^{-x} dx = \frac{1}{2}\Gamma(7/2) = \frac{1}{2}\Gamma(3+1/2)$$
$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2^3}\sqrt{\pi} = \frac{15}{16}\sqrt{\pi}.$$

Για το δεύτερο ολοκλήρωμα, θέτοντας $3x = t$, οπότε $3dx = dt$, προκύπτει ότι

$$I_2 = \int_0^3 t^{-1/2}(3-t)^{1/2} dt \overset{3x=t}{=} \int_0^1 (3x)^{-1/2}(3-3x)^{1/2} 3dx = 3^{-1/2}3^{1/2}3\int_0^1 x^{-1/2}(1-x)^{1/2} dx$$
$$= 3B(1/2, 3/2) = 3\frac{\Gamma(1/2)\Gamma(3/2)}{\Gamma(2)} = 3\Gamma(1/2)\frac{1}{2}\Gamma(1/2) = \frac{3}{2}\pi.$$

□

ΘΕΜΑ 2. Να λυθεί, με τη βοήθεια του μετασχηματισμού Laplace, η διαφορική εξίσωση

$$y''(t) - 2y'(t) + y(t) = e^{2t}, \qquad y(0) = 2, y'(0) = 3.$$

Λύση. Θέτουμε $Y = Y(s) = \mathcal{L}[y(t)]$, οπότε

$$\mathcal{L}[y''(t)] = s^2Y - sy(0) - y'(0) = s^2Y - 2s - 3, \qquad \mathcal{L}[y'(t)] = sY - y(0) = sY - 2$$

και, εφαρμόζοντας μετασχηματισμό Laplace κατά μέλη στη διαφορική εξίσωση, έχουμε ότι

$$\begin{aligned}
&y''(t) - 2y'(t) + y(t) = e^{2t}\\
\Rightarrow &s^2Y - 2s - 3 - 2(sY - 2) + Y = \frac{1}{s-2}\\
\Rightarrow &(s^2 - 2s + 1)Y = 2s - 1 + \frac{1}{s-2} = s - 1 + \frac{s(s-2)+1}{s-2} = s - 1 + \frac{(s-1)^2}{s-2}\\
\Rightarrow &Y = \frac{1}{s-1} + \frac{1}{s-2}\\
\Rightarrow &\mathcal{L}^{-1}[Y] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s-1}\right] + \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s-2}\right]\\
\Rightarrow &y(t) = e^t + e^{2t}.
\end{aligned}$$

□

ΘΕΜΑ 3. Να αναπτυχθούν σε σειρές τα ολοκληρώματα

$$\int_0^x \frac{1}{1+t^2}\,dt, \qquad \int_0^x e^{-2t^2}\,dt.$$

Λύση. Για το πρώτο ολοκλήρωμα, αναπτύσσουμε σε γεωμετρική σειρά με λόγο $-t^2 \in (-1,1) \Leftrightarrow t \in (-1,1)$, λαμβάνοντας

$$\begin{aligned}\int_0^x \frac{1}{1+t^2}dt &= \int_0^x \left(\sum_{n=0}^{\infty}(-t^2)^n\right)dt = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \int_0^x t^{2n}dt = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \left[\frac{t^{2n+1}}{2n+1}\right]_0^x \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1}.\end{aligned}$$

Για το δεύτερο ολοκλήρωμα, αναπτύσσουμε σε εκθετική σειρά, για $-2t^2 \in \mathbb{R} \Leftrightarrow t \in \mathbb{R}$, λαμβάνοντας

$$\begin{aligned}\int_0^x e^{-2t^2}dt &= \int_0^x \left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-2t^2)^n}{n!}\right)dt = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-2)^n}{n!}\int_0^x t^{2n}dt = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n 2^n}{n!}\left[\frac{t^{2n+1}}{2n+1}\right]_0^x \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n 2^n}{n!(2n+1)}x^{2n+1}.\end{aligned}$$

□

ΘΕΜΑ 4. Να ευρεθούν η μέγιστη και η ελάχιστη τιμή της συνάρτησης $f/\mathbb{R}^2$, με

$$f(x,y) = 3x + 4y, \qquad \text{όταν } x^2 + y^2 = 25.$$

Λύση. Θέτουμε $\phi(x,y) = x^2 + y^2 - 25$ και θεωρούμε τη συνάρτηση Lagrange

$$L(x,y) = f(x,y) + \lambda\phi(x,y) = 3x + 4y + \lambda(x^2 + y^2 - 25),$$

οπότε

$$L_x = 3 + 2\lambda x, \quad L_y = 4 + 2\lambda y, \quad L_{xx} = L_{yy} = 2\lambda, \quad L_{xy} = L_{yx} = 0, \quad \phi_x = 2x, \quad \phi_y = 2y.$$

Βρίσκουμε τις λύσεις του συστήματος

$$L_x = 3 + 2\lambda x = 0, \quad L_y = 4 + 2\lambda y = 0, \quad \phi(x,y) = x^2 + y^2 - 25 = 0.$$

Από τις δύο πρώτες εξισώσεις προκύπτει ότι $x = -\dfrac{3}{2\lambda}$ και $y = -\dfrac{4}{2\lambda}$, και, αντικαθιστώντας στην τρίτη, έχουμε ότι

$$\frac{9}{4\lambda^2} + \frac{16}{4\lambda^2} = 25 \Rightarrow \frac{25}{4} = 25\lambda^2 \Rightarrow \lambda = \pm\frac{1}{2},$$

άρα οι λύσεις (x,y,λ) του συστήματος είναι οι $(-3,-4,1/2)$ και $(3,4,-1/2)$.

Στη συνέχεια, θεωρούμε την ορίζουσα

$$D(x,y,\lambda) = \begin{vmatrix} Lxx & Lxy & \phi_x \\ Lxy & Lyy & \phi_y \\ \phi_x & \phi_y & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2\lambda & 0 & 2x \\ 0 & 2\lambda & 2y \\ 2x & 2y & 0 \end{vmatrix} = 2\lambda(0-4y^2) + 2x(0-4x\lambda) = -8\lambda y^2 - 8\lambda x^2$$
$$= -8\lambda(x^2+y^2)$$

Για την πρώτη λύση, έχουμε ότι $D(-3,-4,1/2) < 0$, άρα το $(-3,-4)$ είναι σημείο δεσμευμένου ελαχίστου, ενώ, για την δεύτερη λύση, έχουμε ότι $D(3,4,-1/2) > 0$, άρα το $(3,4)$ είναι σημείο δεσμευμένου μεγίστου.

Κατόπιν τούτων, η ελάχιστη και μέγιστη τιμή της f με δεσμό την $\phi = 0$ είναι αντίστοιχα οι $f(-3,-4) = -25$ και $f(3,4) = 25$. □

ΘΕΜΑ 5. Να υπολογισθεί η τιμή του διπλού ολοκληρώματος

$$\iint_A x^2y^2\, dxdy, \qquad \text{όπου } A = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \le 4, x \ge 0, y \ge 0\}.$$

Λύση. Εφαρμόζουμε μετασχηματισμό σε πολικές συντεταγμένες $x = \rho\cos\theta$, $y = \rho\sin\theta$, όπου $\rho \ge 0$ και $\theta \in [0,2\pi)$, οπότε

$$(x,y)\in A \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+y^2 \le 4 \\ x \ge 0 \\ y \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \rho^2 \le 4 \\ \cos\theta \ge 0 \\ \sin\theta \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \rho \in [0,2] \\ \theta \in [0,\pi/2] \end{cases}$$

δηλαδή το A μετασχηματίζεται στο ορθογώνιο $A' = [0,2]\times[0,\pi/2]$ του $\rho\theta$-επιπέδου.

Επιπλέον, η Ιακωβιανή ορίζουσα του μετασχηματισμού είναι η

$$J = \begin{vmatrix} \partial x/\partial\rho & \partial x/\partial\theta \\ \partial y/\partial\rho & \partial y/\partial\theta \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -\rho\sin\theta \\ \sin\theta & \rho\cos\theta \end{vmatrix} = \rho\cos^2\theta + \rho\sin^2\theta = \rho.$$

Επομένως,

$$\iint_A x^2y^2dxdy = \iint_{A'} (\rho\cos\theta)^2(\rho\sin\theta)^2|J|d\rho d\theta = \int_0^2 \left(\int_0^{\pi/2} \rho^5\cos^2\theta\sin^2\theta d\theta\right)d\rho$$
$$= \frac{1}{2}B(3/2,3/2)\int_0^2 \rho^5 d\rho = \frac{\Gamma^2(3/2)}{2\Gamma(3)}\left[\frac{\rho^6}{6}\right]_0^2 = \frac{(\sqrt{\pi}/2)^2}{4}\frac{2^6}{6} = \frac{\pi}{2^4}\frac{2^6}{6} = \frac{2\pi}{3}.$$

□

Λύσεις Ομάδας Β

ΘΕΜΑ 1. Να υπολογισθούν τα γενικευμένα ολοκληρώματα

$$I_1 = \int_0^{+\infty} t^6 e^{-t^2/2}\, dt, \qquad I_2 = \int_0^4 \frac{\sqrt{4-t}}{\sqrt{t}}\, dt.$$

Λύση. Για το πρώτο ολοκλήρωμα, θέτοντας $x = t^2/2$, οπότε $t = \sqrt{2x}$ και $2dx = 2tdt$, προκύπτει ότι

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_0^{+\infty} t^6 e^{-t^2/2} dt \overset{x=t^2/2}{=} \int_0^{+\infty} (2x)^3 e^{-x} \frac{1}{(2x)^{1/2}} dx = 2^{5/2} \int_0^{+\infty} x^{5/2} e^{-x} dx = 2^{5/2}\Gamma(7/2) \\ &= 2^{5/2}\Gamma(3+1/2) = 2^{5/2} \cdot \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2^3}\sqrt{\pi} = 15\sqrt{\pi/2}. \end{aligned}$$

Για το δεύτερο ολοκλήρωμα, θέτοντας $4x = t$, οπότε $4dx = dt$, προκύπτει ότι

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_0^4 t^{-1/2}(4-t)^{1/2} dt \overset{4x=t}{=} \int_0^1 (4x)^{-1/2}(4-4x)^{1/2} 4dx = 4^{-1/2}4^{1/2}4 \int_0^1 x^{-1/2}(1-x)^{1/2} dx \\ &= 4B(1/2, 3/2) = 4\frac{\Gamma(1/2)\Gamma(3/2)}{\Gamma(2)} = 4\Gamma(1/2)\frac{1}{2}\Gamma(1/2) = 2\pi. \end{aligned}$$

□

ΘΕΜΑ 2. Να λυθεί, με τη βοήθεια του μετασχηματισμού Laplace, η διαφορική εξίσωση

$$y''(t) - 2y'(t) + y(t) = e^{2t}, \qquad y(0) = 0, y'(0) = 1.$$

Λύση. Θέτουμε $Y = Y(s) = \mathcal{L}[y(t)]$, οπότε

$$\mathcal{L}[y''(t)] = s^2Y - sy(0) - y'(0) = s^2Y - 1, \qquad \mathcal{L}[y'(t)] = sY - y(0) = sY$$

και, εφαρμόζοντας μετασχηματισμό Laplace κατά μέλη στη διαφορική εξίσωση, προκύπτει ότι

$$\begin{aligned} &y''(t) - 2y'(t) + y(t) = e^{2t} \\ \Rightarrow &s^2Y - 1 - 2sY + Y = \frac{1}{s-2} \\ \Rightarrow &(s^2 - 2s + 1)Y = 1 + \frac{1}{s-2} = \frac{s-1}{s-2} \\ \Rightarrow &Y = \frac{1}{(s-1)(s-2)} = \frac{1}{s-2} - \frac{1}{s-1} \\ \Rightarrow &\mathcal{L}^{-1}[Y] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s-2}\right] - \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s-1}\right] \\ \Rightarrow &y(t) = e^{2t} - e^t. \end{aligned}$$

□

ΘΕΜΑ 3. Να αναπτυχθούν σε σειρές τα ολοκληρώματα

$$\int_0^x \frac{1}{1-t^2}\,dt, \qquad \int_0^x e^{-t^3}\,dt.$$

Λύση. Για το πρώτο ολοκλήρωμα, αναπτύσσουμε σε γεωμετρική σειρά με λόγο $t^2 \in (-1,1) \Leftrightarrow t \in (-1,1)$, λαμβάνοντας

$$\begin{aligned}\int_0^x \frac{1}{1-t^2}dt &= \int_0^x \left(\sum_{n=0}^{\infty}(t^2)^n\right)dt = \sum_{n=0}^{\infty}\int_0^x t^{2n}dt = \sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{t^{2n+1}}{2n+1}\right]_0^x \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2n+1}x^{2n+1}.\end{aligned}$$

Για το δεύτερο ολοκλήρωμα, αναπτύσσουμε σε εκθετική σειρά, για $-t^3 \in \mathbb{R} \Leftrightarrow t \in \mathbb{R}$, λαμβάνοντας

$$\begin{aligned}\int_0^x e^{-t^3}dt &= \int_0^x \left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-t^3)^n}{n!}\right)dt = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}\int_0^x t^{3n}dt = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}\left[\frac{t^{3n+1}}{3n+1}\right]_0^x \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!(3n+1)}x^{3n+1}.\end{aligned}$$

□

ΘΕΜΑ 4. Να ευρεθούν η μέγιστη και η ελάχιστη τιμή της συνάρτησης $f/\mathbb{R}^2$, με

$$f(x,y) = 4x + 3y, \qquad \text{όταν } x^2 + y^2 = 25.$$

Λύση. Θέτουμε $\phi(x,y) = x^2 + y^2 - 25$ και θεωρούμε τη συνάρτηση Lagrange

$$L(x,y) = f(x,y) + \lambda\phi(x,y) = 4x + 3y + \lambda(x^2 + y^2 - 25),$$

οπότε

$$L_x = 4 + 2\lambda x, \quad L_y = 3 + 2\lambda y, \quad L_{xx} = L_{yy} = 2\lambda, \quad L_{xy} = L_{yx} = 0, \quad \phi_x = 2x, \quad \phi_y = 2y.$$

Βρίσκουμε τις λύσεις του συστήματος

$$L_x = 4 + 2\lambda x = 0, \quad L_y = 3 + 2\lambda y = 0, \quad \phi(x,y) = x^2 + y^2 - 25 = 0.$$

Από τις δύο πρώτες εξισώσεις προκύπτει ότι $x = -\dfrac{4}{2\lambda}$ και $y = -\dfrac{3}{2\lambda}$, και, αντικαθιστώντας στην τρίτη, έχουμε ότι

$$\frac{16}{4\lambda^2} + \frac{9}{4\lambda^2} = 25 \Rightarrow \frac{25}{4} = 25\lambda^2 \Rightarrow \lambda = \pm\frac{1}{2},$$

άρα οι λύσεις (x,y,λ) του συστήματος είναι οι $(-4,-3,1/2)$ και $(4,3,-1/2)$.

Στη συνέχεια, θεωρούμε την ορίζουσα

$$D(x,y,\lambda) = \begin{vmatrix} Lxx & Lxy & \phi_x \\ Lxy & Lyy & \phi_y \\ \phi_x & \phi_y & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2\lambda & 0 & 2x \\ 0 & 2\lambda & 2y \\ 2x & 2y & 0 \end{vmatrix} = 2\lambda(0-4y^2) + 2x(0-4x\lambda) = -8\lambda y^2 - 8\lambda x^2$$
$$= -8\lambda(x^2+y^2)$$

Για την πρώτη λύση, έχουμε ότι $D(-4,-3,1/2) < 0$, άρα το $(-4,-3)$ είναι σημείο δεσμευμένου ελαχίστου, ενώ, για την δεύτερη λύση, έχουμε ότι $D(4,3,-1/2) > 0$, άρα το $(4,3)$ είναι σημείο δεσμευμένου μεγίστου.

Κατόπιν τούτων, η ελάχιστη και μέγιστη τιμή της f με δεσμό την $\phi = 0$ είναι αντίστοιχα οι $f(-4,-3) = -25$ και $f(4,3) = 25$. □

ΘΕΜΑ 5. Να υπολογισθεί η τιμή του διπλού ολοκληρώματος

$$\iint_A x^3y^3\ dxdy, \qquad \text{όπου } A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \le 4, x \ge 0, y \ge 0\}.$$

Λύση. Εφαρμόζουμε μετασχηματισμό σε πολικές συντεταγμένες $x = \rho\cos\theta$, $y = \rho\sin\theta$, όπου $\rho \ge 0$ και $\theta \in [0,2\pi)$, οπότε

$$(x,y) \in A \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+y^2 \le 4 \\ x \ge 0 \\ y \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \rho^2 \le 4 \\ \cos\theta \ge 0 \\ \sin\theta \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \rho \in [0,2] \\ \theta \in [0,\pi/2] \end{cases}$$

δηλαδή το A μετασχηματίζεται στο ορθογώνιο $A' = [0,2] \times [0,\pi/2]$ του $\rho\theta$-επιπέδου.

Επιπλέον, η Ιακωβιανή ορίζουσα του μετασχηματισμού είναι η

$$J = \begin{vmatrix} \partial x/\partial\rho & \partial x/\partial\theta \\ \partial y/\partial\rho & \partial y/\partial\theta \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -\rho\sin\theta \\ \sin\theta & \rho\cos\theta \end{vmatrix} = \rho\cos^2\theta + \rho\sin^2\theta = \rho.$$

Επομένως,

$$\iint_A x^3y^3 dxdy = \iint_{A'} (\rho\cos\theta)^3(\rho\sin\theta)^3|J|d\rho d\theta = \int_0^2 \left(\int_0^{\pi/2} \rho^7\cos^3\theta\sin^3\theta d\theta\right)d\rho$$
$$= \frac{1}{2}B(2,2)\int_0^2 \rho^7 d\rho = \frac{\Gamma^2(2)}{2\Gamma(4)}\left[\frac{\rho^8}{8}\right]_0^2 = \frac{1}{12}\frac{2^8}{8} = \frac{8}{3}.$$

□