ΑΝΑΛΥΣΗ ΙΙ
1η Εργασία

Άλυτες Ασκήσεις Κεφαλαίου 9:

1		**4**		**7**		**8**		**9**	
13		**14**		**16**		**19**		**25**	
38		**39**		**40**		**45**		**46**	
47		**48**		**49**					

Άλυτες Ασκήσεις Κεφαλαίου 10:

11		**12**		**13**		**18**		**30**		**32**	
34		**39**		**40**		**43**		**47**		**49**	
50		**52**		**53**		**56**					

Άλυτες Ασκήσεις Κεφαλαίου 11:

1		**4**		**5**		**8**		**9**	
11		**12**		**17**		**18**		**19**	
20		**22**		**23**		**24**		**25**	
26		**28**		**29**		**30**		**31**	
37		**45**		**46**		**51**			

Να λυθούν **25** από τις παραπάνω προτεινόμενες άλυτες ασκήσεις του βιβλίου. Σημειώστε με ☑ στους παραπάνω πίνακες τις ασκήσεις που λύσατε και χρησιμοποιήστε τη σελίδα αυτή ως εξώφυλλο στην εργασία που θα παραδώσετε. Η εργασία μπορεί να παραδοθεί ηλεκτρονικά **μόνο σε μορφή ενός αρχείου pdf μεγέθους το πολύ 5MB** (χρησιμοποιήστε χαμηλή ανάλυση κατά τη σάρωση, ή και ασπρόμαυρη σάρωση, αρκεί το χειρόγραφο να είναι σχετικά ευανάγνωστο), στο email kmanes@unipi.gr. Ονομάστε το αρχείο ως ergasia1analysh2_X.pdf, όπου X ο αριθμός μητρώου σας. Μην παραλείψετε να συμπεριλάβετε τα στοιχεία σας (αριθμός μητρώου και ονοματεπώνυμο).
Η εργασία είναι προαιρετική και βαθμολογείται με άριστα το 0,5.

Ονοματεπώνυμο:

Αριθμός Μητρώου:

Ημερομηνία παράδοσης: 14/05/2024

ΑΛΥΤΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΠΡΩΤΗΣ ΕΡΓΑΣΙΑΣ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 9

ΑΣΚΗΣΗ 1

Να υπολογισθούν τα γενικευμένα ολοκληρώματα:

$$\alpha)\ \int_0^{+\infty}\frac{(\text{arctgx})^2}{1+x^2}dx, \qquad \beta)\ \int_{-\infty}^{0}\frac{dx}{x^2+6x+18}, \qquad \gamma)\ \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{(x^2+1)(x^2+4)}.$$

ΑΣΚΗΣΗ 4

Να υπολογισθεί το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{(x^2+\alpha^2)(x^2+\beta^2)}$, όπου $\alpha,\beta\in\mathbb{R}^*$ με $|\alpha|\neq|\beta|$.

ΑΣΚΗΣΗ 7

Να υπολογισθεί η τιμή του $\lambda\in\mathbb{R}$ ώστε το γενικευμένο ολοκλήρωμα I να υπάρχει, και να υπολογισθεί η τιμή του, όταν:

$$\alpha)\ I=\int_0^{+\infty}\left(\frac{x+1}{3x^2+\lambda}-\frac{\lambda}{2x+1}\right)dx, \qquad \beta)\ \int_0^{+\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{1+4x^2}}-\frac{\lambda}{x+1}\right)dx.$$

ΑΣΚΗΣΗ 8

Να υπολογισθούν οι τιμές των $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$ ώστε $\int_0^{+\infty}\frac{(\lambda+\mu)x+\lambda}{2x^2+\lambda}dx=\pi$.

ΑΣΚΗΣΗ 9

Να υπολογισθεί το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{x^2+2\alpha x+\beta^2}$, όπου $0<\alpha<\beta$.

ΑΣΚΗΣΗ 13

Να αποδειχθεί ότι τα p–ολοκληρώματα $\int_\alpha^\beta\frac{1}{(\beta-x)^p}dx$, $\int_\alpha^\beta\frac{1}{(x-\alpha)^p}dx$, όπου $p\in\mathbb{R}$, συγκλίνουν αν και μόνο αν $p<1$.

ΑΣΚΗΣΗ 14

Να υπολογισθεί το εμβαδό του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}/(0,+\infty)$, τον άξονα των τετμημένων και τις ευθείες $x=0$ και $x=e^2$.

ΑΣΚΗΣΗ 16

Να μελετηθούν ως προς τη σύγκλιση τα γενικευμένα ολοκληρώματα:

α) $\int_1^{+\infty}\frac{\sin(x+2)}{x^2}dx$, β) $\int_0^{+\infty}\frac{e^{-2x}}{x^2+1}dx$,

γ) $\int_0^{+\infty}\frac{2x+3}{\sqrt{x^3+2x+5}}dx$, δ) $\int_2^{+\infty}\frac{\sqrt{3x^2+5x+1}}{x^3+4x^2+5x+2}dx$,

ε) $\int_1^{2}\frac{3\cos(2x+1)}{(x-1)^{\frac{2}{3}}}dx$, στ) $\int_2^{3}\frac{2x^2+3x+1}{(3-x)^4}dx$.

ΑΣΚΗΣΗ 19

Να μελετηθούν ως προς τη σύγκλιση τα γενικευμένα ολοκληρώματα:

α) $\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg}\beta x - \operatorname{arctg}\alpha x}{x} dx$, όπου $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, β) $\int_1^{+\infty} \frac{\sqrt{2x^2+4x-5}}{x^2+3x+1} dx$,

γ) $\int_2^{+\infty} \frac{(\ln x)^p}{x^3} dx$, όπου $p \in \mathbb{R}$, δ) $\int_\pi^{2\pi} \frac{\cos x}{\sqrt{(x-\pi)(2\pi - x)}} dx$,

ε) $\int_1^3 \frac{\sqrt{x}}{\ln x} dx$, στ)[1] $\int_1^{+\infty} \frac{\ln(p(x))}{x^q} dx$,

όπου $p(x)$ είναι ένα πολυώνυμο με $p(x) > 0$ για κάθε $x \geq 1$, και $q \in (1, +\infty)$.

ΑΣΚΗΣΗ 25

Να μελετηθούν ως προς τη σύγκλιση τα γενικευμένα ολοκληρώματα:

α) $\int_1^{+\infty} \left(\frac{3x^2+4x+3}{6x^2+3x+5} \right)^x dx$, β) $\int_2^{+\infty} \left(\frac{3x^2+5x+8}{2x^2+4x+11} \right)^x dx$.

ΑΣΚΗΣΗ 38

Να υπολογισθούν, με τη βοήθεια της συνάρτησης γάμμα, οι τιμές των γενικευμένων ολοκληρωμάτων:

α) $\int_0^{+\infty} t^{12} e^{-4t} dt$, β) $\int_0^{+\infty} e^{-3t^2} dt$, γ) $\int_0^{+\infty} t^3 e^{-3t^2} dt$.

ΑΣΚΗΣΗ 39

Να αποδειχθούν οι σχέσεις

$\sqrt{\pi}\Gamma(2n+1) = 2^{2n} \Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) \Gamma(n+1)$ και $\sqrt{\pi}\Gamma(2n) = 2^{2n-1} \Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) \Gamma(n)$, για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$.

ΑΣΚΗΣΗ[2] 40

Να αποδειχθούν οι σχέσεις:

(i) $\Gamma(x) = 2\int_0^{+\infty} e^{-u^2} u^{2x-1} du$, (ii) $\Gamma(x) = \int_0^1 \left[\ln\left(\frac{1}{u}\right) \right]^{x-1} du$, (iii) $\Gamma(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{xu} e^{-e^u} du$, για κάθε $x > 0$.

ΑΣΚΗΣΗ 45

Να υπολογισθεί, με τη βοήθεια της συνάρτησης βήτα, η τιμή των ολοκληρωμάτων:

α) $\int_0^1 x^6 (1-x)^4 dx$, β) $\int_0^3 x^{\frac{3}{2}} (3-x)^{\frac{5}{2}} dx$, γ) $\int_0^2 x^4 \sqrt{4-x^2} dx$.

ΑΣΚΗΣΗ 46

Να υπολογισθεί, με τη βοήθεια της συνάρτησης βήτα, η τιμή των ολοκληρωμάτων:

α) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^5\theta \cos^8\theta d\theta$, β) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^7\theta d\theta$, γ) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^6\theta d\theta$.

---

[1] Βλ. λυμένη άσκηση 12 β).

[2] Να χρησιμοποιηθούν οι αντικαταστάσεις $t = u^2$, $t = -\ln u$ και $t = e^u$.

ΑΣΚΗΣΗ 47

Να αποδειχθούν οι σχέσεις:

α) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n-1}\theta d\theta = \dfrac{2^{n-1}(n-1)!}{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}$, β) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n}\theta d\theta = \dfrac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2^{n+1}n!}\cdot\pi$

για κάθε $n\in\mathbb{N}^*$.

ΑΣΚΗΣΗ 48

Να αποδειχθεί η σχέση

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^n}} = \frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)}{n\Gamma\left(\frac{n+2}{2n}\right)}, \qquad \text{για κάθε } n\in\mathbb{N}^*.$$

ΑΣΚΗΣΗ 49

Να αποδειχθεί η σχέση

$$\int_0^1 \frac{x^{2\alpha}}{\sqrt{1-x^2}}dx = \sqrt{\pi}\,\frac{\Gamma\left(\alpha+\frac{1}{2}\right)}{2\Gamma(\alpha+1)}, \qquad \text{για κάθε } \alpha>-\frac{1}{2}.$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 10

ΑΣΚΗΣΗ 11

Να ευρεθούν οι μετασχηματισμοί Laplace των συναρτήσεων:

α) $f(t)=e^{-3t}t^2\sin 4t/[0,+\infty)$, β) $g(t)=\int_0^t u\sinh 3u\,du/[0,+\infty)$, γ) $h(t)=\int_0^t \frac{1-\cos u}{u}du/[0,+\infty)$

ΑΣΚΗΣΗ 12

Να ευρεθούν οι μετασχηματισμοί Laplace των συναρτήσεων:

α) $f(t)=e^{-2t}t^3\sinh t/[0,+\infty)$, β) $g(t)=\dfrac{\cos\alpha t-\cos\beta t}{t}/[0,+\infty)$, $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$,

γ) $h(t)=\int_0^t\left(u^3-2u^2+e^{-u}\right)du/[0,+\infty)$.

ΑΣΚΗΣΗ 13

Να αποδειχθούν οι τύποι:

$\mathcal{L}\left[\dfrac{1-e^{-t}}{t}\right]=\ln\left(1+\dfrac{1}{s}\right)$, για κάθε $s>0$, $\mathcal{L}\left[\dfrac{1-\cosh\alpha t}{t}\right]=\dfrac{1}{2}\ln\left(1-\dfrac{\alpha^2}{s^2}\right)$, για κάθε $s>|\alpha|$,

α) με τη βοήθεια της ένατης ιδιότητας του μετασχηματισμού Laplace,
β) με τη βοήθεια του μετασχηματισμου Laplace μιας δυναμοσειράς.

ΑΣΚΗΣΗ 18

Να παρασταθεί γραφικά και να ευρεθεί ο μετασχηματισμός Laplace της συνάρτησης $f/[0,+\infty)$, όταν $f(t)=|\sin\alpha t|$ για κάθε $t\in\left[0,\dfrac{\pi}{\alpha}\right]$ και $f(t)=f\left(t+\dfrac{\pi}{\alpha}\right)$ για κάθε $t\in[0,+\infty)$, όπου $\alpha>0$.

ΑΣΚΗΣΗ 30

Να ευρεθούν οι μετασχηματισμοί: β) $\mathcal{L}^{-1}\left[\dfrac{3s+2}{4s^2+12s+29}e^{-2s}\right]$, γ) $\mathcal{L}^{-1}\left[\dfrac{1}{\sqrt{2s+3}}+\dfrac{s}{s^2-1}-\dfrac{3}{s^2+4}\right]$.

ΑΣΚΗΣΗ 32

Να ευρεθεί ο μετασχηματισμός $\mathcal{L}^{-1}\left[\ln\left(\dfrac{s+4}{s+2}\right)\right]$, και στη συνέχεια να αποδειχθεί ότι $\mathcal{L}^{-1}\left[\dfrac{1}{s}\ln\left(\dfrac{s+4}{s+2}\right)\right]=\int_0^t\dfrac{e^{-2u}-e^{-4u}}{u}du$.

ΑΣΚΗΣΗ 34

Να αποδειχθεί η σχέση $\mathcal{L}^{-1}\left[\ln\left(1+\dfrac{1}{s}\right)\right]=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{t^n}{(n+1)!}$.

ΑΣΚΗΣΗ 39

Να ευρεθεί ο μετασχηματισμός $\mathcal{L}^{-1}\left[\dfrac{1}{s^2(s^2-1)}\right]$

α) με ανάλυση σε απλά κλάσματα, του κλάσματος $\dfrac{1}{s^2(s^2-1)}$,

β) με τη βοήθεια της συνέλιξης,
γ) με τη βοήθεια της έβδομης ιδιότητας του αντίστροφου μετασχηματισμού Laplace.

ΑΣΚΗΣΗ 40

Να ευρεθούν με τη βοήθεια της συνέλιξης οι μετασχηματισμοί:

α) $\mathcal{L}^{-1}\left[\dfrac{1}{s(s^2-9)}\right]$, β) $\mathcal{L}^{-1}\left[\dfrac{1}{s^2(s^2+4)}\right]$.

ΑΣΚΗΣΗ 43

Να λυθούν, με τη βοήθεια του μετασχηματισμού Laplace, οι διαφορικές εξισώσεις:

α) $y''+y'-2y=0$, όταν $y(0)=1$ και $y'(0)=-2$,

β) $y''+4y'=8\sin t$, όταν $y(0)=0$ και $y'(0)=2$.

ΑΣΚΗΣΗ 47

Να λυθούν, με τη βοήθεια του μετασχηματισμού Laplace, οι διαφορικές εξισώσεις:

α) $ty''+(2+t)y'+y=e^{-t}$, όταν $y(0)=1$ και $y'(0)=-1$,

β) $y''+ty'-2y=2$, όταν $y(0)=y'(0)=0$.

ΑΣΚΗΣΗ 49

Να λυθούν, με τη βοήθεια του μετασχηματισμού Laplace, τα παρακάτω συστήματα:

α) $\begin{cases} x''(t)-y''(t)+y'(t)-x(t)=e^t-2 \\ 2x''(t)-y''(t)-2x'(t)+y(t)=-t \end{cases}$, όταν $x(0)=y(0)=x'(0)=y'(0)=0$,

β) $\begin{cases} y''(t)-y'(t)-2x'(t)=0 \\ y''(t)-x''(t)-3x'(t)=(t^2-3)e^t \end{cases}$, όταν $x(0)=y(0)=y'(0)=0$ και $x'(0)=1$.

ΑΣΚΗΣΗ 50

Να λυθούν, με τη βοήθεια του μετασχηματισμού Laplace, οι παρακάτω ολοκληρωτικές εξισώσεις:

α) $y(t)=3t+\int_0^t \sin(t-z)y(z)dz$, β) $y(t)=t+\dfrac{1}{6}\int_0^t (t-z)^3 y(z)dz$.

ΑΣΚΗΣΗ 52

Να λυθούν, με τη βοήθεια του μετασχηματισμού Laplace, οι παρακάτω ολοκληρωτικές εξισώσεις:

α) $\int_0^t \dfrac{y(z)}{(t-z)^{\frac{1}{3}}}dz=t(1-t)$, β) $\int_0^t \dfrac{y(z)}{(t-z)^{\alpha}}dz=t$, όπου $\alpha\in(0,1)$.

ΑΣΚΗΣΗ 53

Να λυθούν, με τη βοήθεια του μετασχηματισμού Laplace, οι παρακάτω ολοκληρωτικές εξισώσεις:

α) $y(t)=t^2+\int_0^t \sin z\cdot y(t-z)dz$, β) $te^{-t}=\int_0^t y(z)y(t-z)dz$.

ΑΣΚΗΣΗ 56

Να λυθούν, με τη βοήθεια του μετασχηματισμου Laplace, οι παρακάτω εξισώσεις διαφορών:

α) $y(t)+2y(t-1)-3y(t-2)=4$, με $y(t)=0$ για κάθε $t<0$,

β) $3y(t)-4y(t-1)+y(t-2)=t$, με $y(t)=0$ για κάθε $t<0$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 11

ΑΣΚΗΣΗ 1

Να ευρεθεί το όριο της ακολουθίας (f_n) με $f_n(x)=\dfrac{x}{n}/[0,1]$, και να εξετασθεί αν συγκλίνει ομοιόμορφα.

ΑΣΚΗΣΗ 4

Να αποδειχθεί ότι η ακολουθία (f_n) με $f_n(x)=(\sin x)^{\frac{1}{n}}/[0,\pi]$ συγκλίνει ομοιόμορφα σε κάθε υποδιάστημα $[\alpha,\beta]$ με $0<\alpha<\beta<\pi$, ενώ δεν συγκλίνει ομοιόμορφα στο $[0,\pi]$.

ΑΣΚΗΣΗ 5

Να ευρεθεί το όριο της ακολουθίας (f_n) με $f_n(x)=(1-x^2)x^n/[-1,1]$, και να εξετασθεί αν συγκλίνει ομοιόμορφα.

ΑΣΚΗΣΗ 8

Να αποδειχθεί ότι οι σειρές:

α) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(2n^2x+4nx^2)}{n^{\frac{5}{2}}}$, β) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(3nx+7)}{2^n+1}$, γ) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cos nx^2}{n^3x^2+4^n}$,

συγκλίνουν ομοιόμορφα στο $\mathbb{R}$.

ΑΣΚΗΣΗ 9

Να αποδειχθεί ότι οι σειρές:

α) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{-n^2x^2}}{n^3}$, β) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2(1+n^2x^2)}$, γ) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x}{n(1+nx^2)}$,

συγκλίνουν ομοιόμορφα στο $\mathbb{R}$.

ΑΣΚΗΣΗ 11

Να αποδειχθεί ότι οι σειρές $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^x}$ και $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{n^x}$ συγκλίνουν ομοιόμορφα σε κάθε διάστημα της μορφής $[\alpha,+\infty)$, με $\alpha>1$.

ΑΣΚΗΣΗ 12

Να αποδειχθεί ότι η σειρά $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n-1}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^{2n-1}$ συγκλίνει ομοιόμορφα σε κάθε διάστημα της μορφής $[\alpha,\beta]$, όπου $\alpha>0$.

ΑΣΚΗΣΗ 17

Να ευρεθεί το άθροισμα της σειράς

$$x+\frac{x^5}{5}+\cdots+\frac{x^{4n-3}}{4n-3}+\cdots,$$

με $x\in(-1,1)$.

ΑΣΚΗΣΗ 18

Να ευρεθεί το άθροισμα της σειράς $\frac{x^2}{1\cdot 2}-\frac{x^3}{2\cdot 3}+\cdots+(-1)^{n+1}\frac{x^{n+1}}{n(n+1)}+\cdots$ με $x\in(-1,1)$.

ΑΣΚΗΣΗ 19

Να αποδειχθεί ότι η συνάρτηση $f/\left(-\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)$ με $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty} n3^{n-1}x^{n-1}$ είναι συνεχής.

Επιπλέον, να υπολογισθεί το ορισμένο ολοκλήρωμα $\int_0^{0.125} f(x)dx$.

ΑΣΚΗΣΗ 20

α) Να αποδειχθεί ότι οι σειρές $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n^3}$, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^2}$ συγκλίνουν ομοιόμορφα στο $\mathbb{R}$.

β) Αν $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n^3}/\mathbb{R}$ και $g(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^2}/\mathbb{R}$, να αποδειχθεί ότι η συνάρτηση $f/\mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη, και μάλιστα ισχύει ότι $f'(x)=g(x)$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

ΑΣΚΗΣΗ 22

Να ευρεθεί η ακτίνα και το διάστημα σύγκλισης των δυναμοσειρών:

α) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1\cdot 3\cdots(2n+1)}{2\cdot 4\cdots(2n+2)}x^n$, β) $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n^2+n-1}\frac{(n+3)!}{n!(n+2)!}x^n$, γ) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n!}{(n+2)^n}x^n$.

ΑΣΚΗΣΗ 23

Να ευρεθεί η ακτίνα και το διάστημα σύγκλισης των δυναμοσειρών:

α) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n!)^2}{(n+1)^{n+1}}x^n$, β) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{(n+1)!}{3^n n}x^n$, γ) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(mn)!}{(n!)^\alpha}x^n$.

ΑΣΚΗΣΗ 24

Να ευρεθεί η ακτίνα σύγκλισης της δυναμοσειράς $\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n x^n$ όταν

$$\alpha_n=\begin{cases}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n^2}, & \text{αν n περιττός}\\ n+1, & \text{αν n άρτιος.}\end{cases}$$

ΑΣΚΗΣΗ 25

Να ευρεθεί η ακτίνα σύγκλισης της δυναμοσειράς $\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n x^n$ όταν

$$\alpha_n=\begin{cases}\frac{1}{2^n}+\frac{1}{3^n}+\frac{1}{4^n}, & \text{αν } n=3\rho,\ \rho\in\mathbb{N}^*\\ (-1)^n\frac{n^3}{3^n}, & \text{αν } n=3\rho+1,\ \rho\in\mathbb{N}\\ \left(\frac{3n+2}{4}\right)^n, & \text{αν } n=3\rho+2,\ \rho\in\mathbb{N}.\end{cases}$$

ΑΣΚΗΣΗ 26

Να ευρεθεί το σύνολο όλων των σημείων $x \in \mathbb{R}$ για τα οποία συγκλίνει η δυναμοσειρά

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{(n^2+1)2^n}(x+3)^n .$$

ΑΣΚΗΣΗ 28

Να αναπτυχθούν σε σειρές οι συναρτήσεις:

$$f(x) = \sqrt{1+x^2} \,/\, (-1,1), \qquad g(x) = x\ln(1+x) \,/\, (-1,1), \qquad h(x) = \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} \,/\, (-1,1).$$

ΑΣΚΗΣΗ 29

Να αναπτυχθούν σε σειρές, οι συναρτήσεις:

$$f(x) = \sqrt[3]{8-x^3} \,/\, (-2,2), \qquad g(x) = \frac{\sin x}{x} \,/\, (0,+\infty), \qquad h(x) = \frac{e^{-x}}{1+x} \,/\, (-1,1)$$

ΑΣΚΗΣΗ 30

Να αναπτυχθεί σε σειρά η συνάρτηση $f(x) = (1+x)e^{-x} - (1-x)e^{x} \,/\, \mathbb{R}$,

και στη συνέχεια να υπολογισθεί το άθροισμα της σειράς $\frac{1}{3!} + \frac{2}{5!} + \cdots + \frac{n}{(2n+1)!} + \cdots$

ΑΣΚΗΣΗ 31

Να αποδειχθεί η σχέση $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (n+1)x^n = \frac{1}{(1+x)^2}$ για κάθε $x \in (-1,1)$, και στη συνέχεια να υπολογισθεί το άθροισμα της σειράς $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{n+1}{2^n}$.

ΑΣΚΗΣΗ 37

Να αναπτυχθεί σε σειρά η παράγωγος της συνάρτησης $f(x) = \frac{e^x - 1}{x}$ όπου $x > 0$, και στη συνέχεια να υπολογισθεί το άθροισμα της σειράς $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+1)!}$.

ΑΣΚΗΣΗ 45

Να αναπτυχθούν σε σειρές τα ολοκληρώματα:

α) $\int_0^x \sqrt{1+t^3}\,dt$, β) $\int_0^x \frac{1}{1-t^7}\,dt$, γ) $\int_0^x \left(e^{t^2} t + t^2 \cos t\right) dt$.

ΑΣΚΗΣΗ 46

Να υπολογισθεί, κατά προσέγγιση, η τιμή του ορισμένου ολοκληρώματος $\int_0^{\frac{1}{4}} e^{-x^2}\,dx$,

εκφράζοντας αυτό σε σειρά και χρησιμοποιώντας 3 όρους αυτής. Ποιο είναι το σφάλμα της προσέγγισης;

ΑΣΚΗΣΗ 51

α) Να αναπτυχθεί σε δυναμοσειρά του x το ολοκλήρωμα $\int_0^x \operatorname{arctg} t\,dt$.

β) Να αποδειχθεί, με τη βοήθεια του α), η σχέση $1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \cdots = \frac{\pi}{4} - \ln\sqrt{2}$.