3-12-2016

Σήμερα: Λογική

Για κάθε πρόταση $\varphi \in P$ υπάρχει μια τιμή αλήθειας η οποία ορίζεται με τη βοήθεια της εκτίμησης (valuation) $v: P \to \{0,1\}$ που ικανοποιεί τους παρακάτω κανόνες.

$v(\varphi)$	$v(\neg\varphi)$
1	0
0	1

- $v \models \varphi$ — v ικανοποιεί την φ / επαληθεύει την φ / είναι μοντέλο της φ — ανν $v(\varphi)=1$
- $v \models \Sigma$ — v ικανοποιεί το Σ / επαληθεύει το Σ / είναι μοντέλο του Σ — ανν $v(\varphi)=1$ για κάθε $\varphi \in \Sigma$
- Σ ικανοποιήσιμο ανν υπάρχει v ώστε $v \models \Sigma$
- $\Sigma \models \varphi$ — φ είναι λογικό συμπέρασμα του Σ ανν $v \models \Sigma \Rightarrow v \models \varphi$
- $\varphi \models\mid \psi$ ανν $\varphi \models \psi$ και $\psi \models \varphi$ (δηλαδή οι φ, ψ συναληθεύουν για τις ίδιες v)

$\varphi \to \psi \models\mid \neg\varphi \vee \psi \mid \varphi \wedge (\psi \vee \chi) \models\mid (\varphi \wedge \psi) \vee (\varphi \wedge \chi)$ κ.ο.κ.

→

Άσκηση 1

Δίνονται οι προτάσεις $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ όπου

φ_1: $p \wedge q \Leftrightarrow p \vee r$

φ_2: $\neg(p \rightarrow r) \vee (r \Leftrightarrow q)$

φ_3: $((p \rightarrow q) \rightarrow (q \rightarrow r)) \rightarrow (p \rightarrow r)$

α) Να βρεθούν όλα τα μοντέλα του συνόλου των παραπάνω προτάσεων

$\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$: Έχουν εμφανίσεις των ατόμων p, q, r
Υπάρχουν $2^3 = 8$ δυνατές εκτιμήσεις

p	q	r	$p\wedge q$	$p \vee r$	φ_1	$\neg(p\rightarrow r)$	$r \Leftrightarrow q$	φ_2	$p \rightarrow q$	$q \rightarrow r$	$p \rightarrow r$	φ_3
1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1
1	1	0	1	1	1	1	0	1	1	0	0	1
1	0	1	0	1	0	0	0	0	0	1	1	1
1	0	0	0	1	0	1	1	1	0	1	0	0
0	1	1	0	1	0	0	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0	1	1
0	0	1	0	1	0	0	0	1	1	1	1	1
0	0	0	0	0	1	0	1	1	1	1	1	1

Άρα υπάρχουν 3 μοντέλα για το σύνολο $\{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3\}$

1ο: $v(p) = v(q) = v(r) = 1$
2ο: $v(p) = v(q) = 1$ και $v(r) = 0$
3ο: $v(p) = v(q) = v(r) = 0$

$\rightarrow$

β) Είναι καθεμία από τις $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ ταυτολογία;

Καμία δεν είναι ταυτολογία.

γ) Είναι το σύνολο $\{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3\}$ ικανοποιήσιμο;

Ναι είναι διότι η εκτίμηση v με $v(p)=v(q)=v(r)=1$ ικανοποιεί και τις 3 προτάσεις του $\{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3\}$.

δ) Να γραφούν οι $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ σε πλήρη κανονική μορφή CNF ή DNF. (DNF μορφή - διαζεύξεις συζεύξεων)

p	q	r	φ_1	
1	1	1	1	$\to p\wedge q\wedge r$
1	1	0	1	$\to p\wedge q\wedge \neg r$
1	0	1	0	
1	0	0	0	
0	1	1	0	
0	1	0	1	$\to \neg p\wedge q\wedge \neg r$
0	0	1	0	
0	0	0	1	$\to \neg p\wedge \neg q\wedge \neg r$

$\varphi_1 \dashv\vdash (p\wedge q\wedge r)\vee(p\wedge q\wedge\neg r)\vee(\neg p\wedge q\wedge\neg r)\vee(\neg p\wedge\neg q\wedge\neg r)$

CNF (συζεύξεις διαζεύξεις)

p	q	r	φ_2	
1	1	1	1	
1	1	0	1	
1	0	1	0	$\to \neg p\vee q\vee \neg r$
1	0	0	1	
0	1	1	1	
0	1	0	0	$\to p\vee \neg q\vee r$
0	0	1	0	$\to p\vee q\vee \neg r$
0	0	0	1	

$\varphi_2 \dashv\vdash (\neg p\vee q\vee\neg r)\wedge(p\vee\neg q\vee r)\wedge(p\vee q\vee\neg r)$

CNF (συζεύξεις διαζεύξεων)

p	q	r	φ_3
1	0	0	0

$\rightarrow \neg p \vee q \vee r$

ΑΛΛΕΣ [redacted] ΕΚΤΙΜΗΣΕΙΣ

$\varphi_3 \models \neg p \vee q \vee r$

ε) Να εξετασθεί αν κάποια από τις προτάσεις $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ είναι λογικό συμπέρασμα του συνόλου $\Sigma = \{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3\}$, όπου

$\psi_1: (p \wedge q) \vee \neg r$

$\psi_2: p \Leftrightarrow (q \wedge r)$

$\psi_3: \neg(p \wedge q) \rightarrow r$

Η ψ είναι λογικό συμπέρασμα του Σ αν για κάθε $v \models \Sigma$ ισχύει ότι $v \models \psi$.

Το Σ έχει 3 μοντέλα, άρα θα ασχοληθούμε μόνο με αυτά

<u>Μοντέλα του Σ</u>

p	q	r	ψ_1	ψ_2	ψ_3	$\neg\psi_3$
1	1	1	1	1	1	0
1	1	0	1	0	1	0
0	0	0	1	1	0	1

Άρα, μόνο η ψ_1 είναι λογικό συμπέρασμα του Σ

→

στ) Είναι το σύνολο $\{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \psi_1, \psi_2, \psi_3\}$ ικανοποιήσιμο;

Ναι, η εκτίμηση v με $v(p)=v(q)=v(r)=1$, το επαληθεύει

ζ) Είναι το σύνολο $\{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \psi_1, \psi_2, \neg\psi_3\}$ ικανοποιήσιμο;

Ναι, το ικανοποιεί η $v(p)=v(q)=v(r)=0$

Ασκηση 2

Να βρεθεί μια πρόταση φ που περιέχει τα άτομα p, q, r, s και η οποία είναι αληθής όταν ακριβώς 2 από τα p, q, r, s είναι ψευδή.

Υπάρχουν $2^4=16$ διαφορετικές εκτιμήσεις
Οι εκτιμήσεις που έχουν ακριβώς 2 από τα p, q, r, s ψευδή είναι $\binom{4}{2}=6$.
Η φ είναι αληθής για 6 εκτιμήσεις
Η φ είναι ψευδής για $16-6=10$ εκτιμήσεις
Μας συμφέρει να την εκφράσουμε σε DNF μορφή → διαζεύξεις συζεύξεων

p	q	r	s	φ		
1	1	0	0	1	→ $p \wedge q \wedge \neg r \wedge \neg s$	①
1	0	1	0	1	→ $p \wedge \neg q \wedge r \wedge \neg s$	②
1	0	0	1	1	→ $p \wedge \neg q \wedge \neg r \wedge s$	③
0	1	1	0	1	→ $\neg p \wedge q \wedge r \wedge \neg s$	④
0	1	0	1	1	→ $\neg p \wedge q \wedge \neg r \wedge s$	⑤
0	0	1	1	1	→ $\neg p \wedge \neg q \wedge r \wedge s$	⑥
ΑΛΛΕΣ ΕΚΤΙΜΗΣΕΙΣ				0		

Η ζητούμενη φ είναι

$\varphi \equiv ① \vee ② \vee ③ \vee ④ \vee ⑤ \vee ⑥$

Άσκηση 3

Να εξετασθεί αν καθένα από τα παρακάτω σύνολα είναι ικανοποιήσιμο

α) $\Sigma_1 = \{ p, p \wedge \neg r, \neg r \to q, \neg q \vee \neg p \vee r \}$

Έστω ότι το Σ_1 είναι ικανοποιήσιμο και $v \models \Sigma$.
Τότε

$v(p)=1$

$v(p \wedge \neg r)=1 \Rightarrow v(\neg r)=1$

$v(\neg r \to q)=1 \underset{v(\neg r)=1}{\Rightarrow} v(q)=1$

$v(\neg q \vee \neg p \vee r) \underset{v(r)=0}{\overset{v(p)=v(q)=1}{=\!=\!=}} 0$

Άρα, το Σ_1 δεν είναι ικανοποιήσιμο.

β) $\Sigma_2 = \{ \neg (p \to q), p \vee \neg r, \neg r \Leftrightarrow (q \vee \neg p) \}$

Έστω Σ_2 ικανοποιήσιμο και $v \models \Sigma_2$
Τότε

$v(\neg(p \to q))=1 \Leftrightarrow v(p \to q)=0 \Leftrightarrow \boxed{\begin{array}{l} v(p)=1 \\ v(q)=0 \end{array}}$

$v(p \vee \neg r) \underset{v(p)=1}{=\!=\!=} 1$ ισχύει

$v(\neg r \Leftrightarrow (q \vee \neg p))=1 \underset{v(q \vee \neg p)=0}{=\!=\!=} v(\neg r)=0 \Leftrightarrow v(r)=1$

Άρα, το Σ_2 είναι ικανοποιήσιμο, και μια εκτίμηση που το ικανοποιεί είναι η v με $v(p)=v(r)=1$ και $v(q)=0$

Άσκηση 4

α) Να δειχθεί ότι αν το Σ είναι ικανοποιήσιμο και φ οποιαδήποτε πρόταση, τότε τουλάχιστον ένα από τα σύνολα $\Sigma \cup \{\varphi\}$; $\Sigma \cup \{\neg\varphi\}$ είναι ικανοποιήσιμο.

Αφού Σ ικανοποιήσιμο, έχει τουλάχιστον ένα μοντέλο v.
Αν $v(\varphi)=1$, τότε $\Sigma \cup \{\varphi\}$ έχει μοντέλο την v.
Αν $v(\varphi)=0$, τότε $v(\neg\varphi)=1$ οπότε $\Sigma \cup \{\neg\varphi\}$ έχει μοντέλο την v.

β) Δίνεται μια ακολουθία από προτάσεις $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_k$ που δεν είναι εξ αρχής γνωστές. Κάθε φορά έχουμε το δικαίωμα να δεχτούμε τη φ_i ή την $\neg\varphi_i$. Κερδίζουμε αν το σύνολο των προτάσεων που δεχτήκαμε είναι ικανοποιήσιμο. Πως μπορούμε να κερδίζουμε πάντα; (Obligato)

- Διαλέγουμε ένα μοντέλο v που επαληθεύει την φ_1 ή την άρνηση της φ_1.

Αν $v(\varphi_1)=1$ δέχομαι την φ_1
Αν $v(\varphi_1)=0$ δέχομαι την $\neg\varphi_1$
Το σύνολο των αποδεκτών προτάσεων είναι ικανοποιήσιμο από την v.

Για $i \geq 2 \rightarrow$ Αν $v(\varphi_i)=1$ δέχομαι την φ_i.
Αν $v(\varphi_i)=0$ δέχομαι την $\neg\varphi_i$.

$\rightarrow$

Άσκηση 5

Έστω ο διμελής λογικός σύνδεσμος ↓ (NOR) με πίνακα αλήθειας.

p	q	$p \downarrow q$
1	1	0
1	0	0
0	1	0
0	0	1

Να δειχθεί ότι καθένας από τους συνδέσμους $\neg$, $\wedge$, $\vee$ (και κατ' επέκταση και οι $\rightarrow$, $\leftrightarrow$) μπορεί να εκφραστεί μόνο με το σύνδεσμο ↓.

-

p	$\neg p$	$p \downarrow p$
1	0	0
0	1	1

$\neg\varphi \dashv\vdash \varphi \downarrow \varphi$

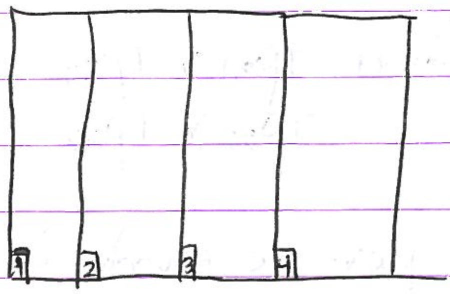
-

p	q	$p \wedge q$ (AND)	$p \vee q$ (OR)	$p \downarrow p$	$q \downarrow q$	$p \downarrow q$	$(p \downarrow p) \downarrow (q \downarrow q)$ (AND)	$(p \downarrow q) \downarrow (p \downarrow q)$ (OR)
1	1	1	1	0	0	0	1	1
1	0	0	1	0	1	0	0	1
0	1	0	1	1	0	0	0	1
0	0	0	0	1	1	1	0	0

$(p \downarrow p) \downarrow (p \downarrow q)$
1
1
0
0

$\leftarrow p$

Άσκηση 6



Να τοποθετηθούν στις περιοχές $\boxed{1}$, $\boxed{2}$, $\boxed{3}$ και $\boxed{4}$ οι αριθμοί 1 ή 2 έτσι ώστε αν δύο περιοχές είναι γειτονικές να έχουν διαφορετικό αριθμό.

- Θεωρούμε τις προτάσεις:

p_{11}: Η περιοχή $\boxed{1}$ έχει τον αριθμό 1
p_{12}: Η περιοχή $\boxed{1}$ έχει τον αριθμό 2
p_{21}: Η περιοχή $\boxed{2}$ έχει τον αριθμό 1
p_{22}: Η περιοχή $\boxed{2}$ έχει τον αριθμό 2
p_{31}: Η περιοχή $\boxed{3}$ έχει τον αριθμό 1
p_{32}: Η περιοχή $\boxed{3}$ έχει τον αριθμό 2
p_{41}: Η περιοχή $\boxed{4}$ έχει τον αριθμό 1
p_{42}: Η περιοχή $\boxed{4}$ έχει τον αριθμό 2

Με βάση τα 8 άτομα θα μεταφέρουμε το πρόβλημα που μας δίνεται σε πρόβλημα ικανοποιησιμότητας ως εξής:

Η περιοχή $\boxed{1}$ έχει τουλάχιστον ένα από τα 1,2: $p_{11} \vee p_{12}$
Η περιοχή $\boxed{2}$ έχει τουλάχιστον ένα από τα 1,2: $p_{21} \vee p_{22}$
Η περιοχή $\boxed{3}$ έχει τουλάχιστον ένα από τα 1,2: $p_{31} \vee p_{32}$
Η περιοχή $\boxed{4}$ έχει τουλάχιστον ένα από τα 1,2: $p_{41} \vee p_{42}$

Αφού οι περιοχές $\boxed{1}$, $\boxed{2}$ είναι γειτονικές, πρέπει: $\neg p_{11} \vee \neg p_{21}$
(← Είναι ψευδής μόνο όταν στις $\boxed{1}$ και $\boxed{2}$ έχουμε το 2) $\Rightarrow$ $\neg p_{12} \vee \neg p_{22}$

Αφού οι περιοχές $\boxed{2}$, $\boxed{3}$ είναι γειτονικές, πρέπει: $\neg p_{21} \vee \neg p_{31}$
$\neg p_{22} \vee \neg p_{32}$

→

Αφού οι περιοχές $\boxed{3}$, $\boxed{4}$ είναι γειτονικές πρέπει $\neg p_{31} \vee \neg p_{41}$
$\neg p_{32} \vee \neg p_{42}$

Επομένως, το πρόβλημα έχει λύση αν και μόνο το σύνολο Σ είναι ικανοποιήσιμο, όπου

$$\Sigma = \{ p_{11} \vee p_{12},\ p_{21} \vee p_{22},\ p_{31} \vee p_{32},\ p_{41} \vee p_{42},\ \neg p_{11} \vee \neg p_{21},\ \neg p_{12} \vee \neg p_{22},$$
$$\neg p_{21} \vee \neg p_{31},\ \neg p_{22} \vee \neg p_{32},\ \neg p_{31} \vee \neg p_{41},\ \neg p_{32} \vee \neg p_{42} \}$$

και κάθε μοντέλο του Σ είναι μια λύση του προβλήματος.

Άρα, ένα μοντέλο του Σ είναι $v(p_{11}) = 1$ $v(p_{12}) = 0$
$v(p_{22}) = 1$ $v(p_{21}) = 0$
$v(p_{31}) = 1$ $v(p_{32}) = 0$
$v(p_{42}) = 1$ $v(p_{41}) = 0$

Άσκηση 7

Έστω $a(\varphi)$ ο αριθμός των θέσεων της φ όπου εμφανίζεται άτομο και $b(\varphi)$ ο αριθμός των θέσεων της φ όπου εμφανίζεται διμελής σύνδεσμος. Να δειχθεί ότι
$a(\varphi) = b(\varphi) + 1$ για κάθε $\varphi \in P$.

Αρχικά, θα ορίσουμε αναδρομικά τις συναρτήσεις $a(\varphi)$, $b(\varphi)$
- $a(p) = 1$ για άτομο $p \in P_0$
- $a(\neg\varphi) = a(\varphi)$ για κάθε $\varphi \in P$
- $a(\varphi \square \psi) = a(\varphi) + a(\psi)$ για κάθε $\varphi, \psi \in P$

$\square$: οποιοσδήποτε από τους $\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$

• $b(p) = 0$ για κάθε $p \in P_0$
• $b(\neg\varphi) = b(\varphi)$ για κάθε $\varphi \in P$
• $b(\varphi \square \psi) = b(\varphi) + b(\psi) + 1$ για κάθε $\varphi, \psi \in P$ ← σύνολο όλων των προτάσεων

Στη συνέχεια, θα αποδείξουμε την ισότητα
$$a(\varphi) = b(\varphi) + 1 \quad \forall \varphi \in P$$
χρησιμοποιώντας την αρχή της επαγωγικής απόδειξης

Για κάθε άτομο p έχουμε: σύνολο των ατόμων
$a(p) = 1$ και $b(p) = 0$. Άρα $a(p) = b(p) + 1$ για $p \in P_0$

Έστω ότι για κάποια $x \in P$ ισχύει ότι $\boxed{a(x) = b(x) + 1}$.
Θα δείξουμε ότι $a(\neg x) = b(\neg x) + 1$

$a(\neg x) = a(x) = b(x) + 1 = b(\neg x) + 1$
Άρα και σ' αυτή την περίπτωση η ισότητα ισχύει.

Έστω ότι για κάποιες φ, ψ ισχύει ότι
$a(\varphi) = b(\varphi) + 1$ (1)
$a(\psi) = b(\psi) + 1$ (2)
Θα δείξουμε ότι $a(\varphi \square \psi) = b(\varphi \square \psi) + 1$

$$a(\varphi \square \psi) = a(\varphi) + a(\psi) \xrightarrow[(1),(2)]{\text{υποθ.}} b(\varphi) + 1 + b(\psi) + 1 =$$
$$= b(\varphi \square \psi) + 1$$ Άρα, και σ' αυτή την περίπτωση η ισότητα ισχύει.

Άρα, από την αρχή της επαγωγικής απόδειξης του προτασιακού λογισμού η ισότητα $a(\varphi) = b(\varphi) + 1$ ισχύει για κάθε $\varphi \in P$.

Άσκηση 8

Να δειχθούν οι παρακάτω λογικές ισοδυναμίες

α) $\neg(p \to q) \equiv p \wedge \neg q$

$\neg(p \to q) \equiv \neg(\neg p \vee q) \equiv \neg(\neg p) \wedge \neg q \equiv p \wedge \neg q$

Υπενθύμιση: $p \to q \equiv \neg p \vee q$ $\quad a \vee (b \wedge c) \equiv (a \vee b) \wedge (a \vee c)$

$\neg(a \vee b) \equiv \neg a \wedge \neg b$

$\neg(\neg p) \equiv p$ $\quad a \wedge (b \vee c) \equiv (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$

β) $p \vee p \equiv p$

$p \wedge p \equiv p$

p	$p \vee p$	$p \wedge p$
1	1	1
0	0	0

γ) $(p \wedge q) \vee q \equiv q$

$(p \vee q) \wedge q \equiv q$

p	q	$p \wedge q$	$(p \wedge q) \vee q$	$p \vee q$	$(p \vee q) \wedge q$
1	1	1	1	1	1
1	0	0	0	1	0
0	1	0	1	1	1
0	0	0	0	0	0

Άσκηση 9

Να γραφούν οι παρακάτω προτάσεις σε μορφή συζεύξεων διαζεύξεων (όχι υποχρεωτικά πλήρη CNF) χωρίς τη χρήση πινάκων αλήθειας.

α) p Θεωρούμε ότι η p είναι σ' αυτή τη μορφή

β) $p \vee q$ Είναι οκ

γ) $p \wedge q$ Είναι οκ όπως είναι.

δ) $p \rightarrow q \dashv\vdash \neg p \vee q$

ε) $(p \leftrightarrow q) \wedge r \dashv\vdash (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p) \wedge r$

$\dashv\vdash (\neg p \vee q) \wedge (\neg q \vee p) \wedge r$

στ) $p \rightarrow (q \vee r) \dashv\vdash \neg p \vee (q \vee r)$

ζ) $(q \vee r) \rightarrow p \dashv\vdash \neg(q \vee r) \vee p$

$\dashv\vdash (\neg q \wedge \neg r) \vee p$

$\dashv\vdash (\neg q \vee p) \wedge (\neg r \vee p)$

η) $\neg((q \vee r) \rightarrow (r \rightarrow p)) \dashv\vdash \neg(\neg(q \vee r) \vee (r \rightarrow p))$

$\dashv\vdash (q \vee r) \wedge \neg(r \rightarrow p)$

$\dashv\vdash (q \vee r) \wedge (r \wedge \neg p)$

Άσκηση 10

Δίνονται οι προτάσεις $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ όπου

φ_1: $(p \rightarrow q) \wedge r$

φ_2: $\neg(r \leftrightarrow q) \vee (p \leftrightarrow q)$

φ_3: $(p \wedge r) \leftrightarrow (\neg q \vee \neg p)$

Να βρεθεί ο ελάχιστος αριθμός εκτιμήσεων που απαιτούνται

→

για να διακρίνουμε τις 3 προτάσεις, αν οι μόνες πληροφορίες που έχουμε είναι οι τιμές των εκτιμήσεων τους.

p	q	r	$p\to q$	φ_1	$\neg(r\Leftrightarrow q)$	$p\Leftrightarrow q$	φ_2	$p\wedge r$	$\neg p\vee\neg q$	φ_3
1	1	1	1	1	0	1	1	1	0	0
1	1	0	1	0	1	1	1	0	0	1
1	0	1	0	0	1	0	1	1	1	1
1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0
0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	0
0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0
0	0	1	1	1	1	1	1	0	1	0
0	0	0	1	0	0	1	1	0	1	0

Μπορούμε με δύο μόνο εκτιμήσεις. Αρχικά θέτουμε $v(p)=v(q)=v(r)=1$
Η πρόταση για την οποία η v δίνει ψευδής είναι η φ_3.
Στη συνέχεια θέτουμε $v(p)=v(q)=1$ και $v(r)=0$.
Η αληθής πρόταση είναι η φ_2.
Η ψευδής πρόταση είναι η φ_1.