Μαθηματικά των Υπολογιστών

Επαγωγή - Αθροίσματα - Ανισότητες

2021-2022

Επαγωγή

Άσκηση 1

Να δειχθεί ότι

$$\frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!} \leq 2 - \frac{1}{n}, \text{ για κάθε } n \geq 2$$

Υπενθύμιση:

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (n-1) \cdot n$$
$$1! = 1, \quad 2! = 1 \cdot 2, \quad 3! = 1 \cdot 2 \cdot 3, \quad 0! = 1,$$
$$n! = (n-1)!n$$

Λύση

Έστω η πρόταση

$$\Pi(n): \text{ Ισχύει ότι } \frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{n!}\leq 2-\frac{1}{n}$$

Η Π(2) είναι αληθής, διότι (για $n=2$)

$$\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}\leq 2-\frac{1}{2}\Leftrightarrow 1+\frac{1}{2}\leq 2-\frac{1}{2}\Leftrightarrow 2\leq 2.$$

Έστω ότι η $\Pi(k)$ είναι αληθής για κάποιο $k\geq 2$, δηλαδή

$$\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{k!}\leq 2-\frac{1}{k}$$

Θα δείξουμε ότι ισχύει και η $\Pi(k+1)$, δηλαδή

$$\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{k!}+\frac{1}{(k+1)!}\leq 2-\frac{1}{k+1}$$

Λύση (συνέχεια)

Από την υπόθεση της επαγωγής έχουμε ότι

$$\underbrace{\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{k!}}_{\leq 2-\frac{1}{k}}+\frac{1}{(k+1)!}\leq 2-\frac{1}{k}+\frac{1}{(k+1)!}$$

οπότε αρκεί να δείξουμε ότι

$$2-\frac{1}{k}+\frac{1}{(k+1)!}\leq 2-\frac{1}{k+1}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{(k+1)!}\leq \frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{(k+1)!}\leq \frac{(k+1)-k}{k(k+1)}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{(k+1)!}\leq \frac{1}{k(k+1)}$$

Λύση (συνέχεια)

$$\overset{k \geq 2}{\Leftrightarrow} \frac{1}{(k+1)k(k-1)!} \leq \frac{1}{k(k+1)}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{(k-1)!} \leq 1 \Leftrightarrow (k-1)! \geq 1$$

το οποίο ισχύει. Άρα, η $\Pi(k+1)$ είναι αληθής.
Επομένως, από την αρχή της επαγωγής η $\Pi(n)$ είναι αληθής για κάθε $n \geq 2$.

Παρατήρηση

Η μορφή της προηγούμενης ανισότητας ήταν βολική για την εφαρμογή της αρχής της επαγωγής. Παρατηρήστε ότι
$\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{n!}\leq 2-\frac{1}{n}<2$, δηλαδή για κάθε $n\geq 2$ ισχύει ότι

$$\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{n!}<2.$$

Η ανισότητα αυτή, παρόλο που ισχύει, δεν μπορεί εύκολα να αποδειχθεί με επαγωγή, επειδή στο δεύτερο μέλος της δεν εμφανίζεται κάποια παράσταση του n. Συγκεκριμένα, στο επαγωγικό βήμα, από την υπόθεση ότι

$$\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{k!}<2$$

δεν μπορούμε να συνάγουμε ότι

$$\underbrace{\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{k!}}_{<2}+\frac{1}{(k+1)!}<2.$$

Σε αυτές τις περιπτώσεις προσπαθούμε να βρούμε μια κατάλληλη ανισότητα, όπως η προηγούμενη, από την οποία προκύπτει η ζητούμενη.

Άσκηση 2

Έστω $x \in \mathbb{R}$ *τέτοιο ώστε* $x + \frac{1}{x} \in \mathbb{Z}$.[a]

Να δειχθεί ότι $x^n + \frac{1}{x^n} \in \mathbb{Z}$ *για κάθε* $n \in \mathbb{N}$.

---

[a] Π.χ. αν $x = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$ τότε $x + \frac{1}{x} = 3$.

Λύση

Έστω $\Pi(n)$: $x^n + \frac{1}{x^n} \in \mathbb{Z}$.

$\Pi(0)$: $x^0 + \frac{1}{x^0} = 1 + 1 = 2 \in \mathbb{Z}$. Δηλαδή η $\Pi(0)$ είναι αληθής.

$\Pi(1)$: $x^1 + \frac{1}{x^1} \in \mathbb{Z}$. Δηλαδή η $\Pi(1)$ είναι αληθής.

Λύση (συνέχεια)

Εδώ θα χρησιμοποιήσουμε την ισχυρή μορφή της επαγωγής.
Έστω ότι η $\Pi(k)$ είναι αληθής για κάθε $k \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$.
Θα δείξουμε ότι και η $\Pi(n)$ είναι αληθής, δηλαδή ότι $x^n + \frac{1}{x^n} \in \mathbb{Z}$
Η απόδειξη βασίζεται στην επόμενη ταυτότητα. Ισχύει ότι

$$\begin{aligned}
x^n + \frac{1}{x^n} &= x^n + \frac{1}{x^n} + \left(x^{n-2} + \frac{1}{x^{n-2}}\right) - \left(x^{n-2} + \frac{1}{x^{n-2}}\right) \\
&= x\left(x^{n-1} + \frac{1}{x^{n-1}}\right) + \frac{1}{x}\left(x^{n-1} + \frac{1}{x^{n-1}}\right) - \left(x^{n-2} + \frac{1}{x^{n-2}}\right) \\
&= \left(x + \frac{1}{x}\right)\left(x^{n-1} + \frac{1}{x^{n-1}}\right) - \left(x^{n-2} + \frac{1}{x^{n-2}}\right).
\end{aligned}$$

Από την υπόθεση της επαγωγής, αφού $n \geq 2$, έπεται ότι
$0 \leq n-1, n-2 < n$ οπότε $x^{n-1} + \frac{1}{x^{n-1}}$ και $x^{n-2} + \frac{1}{x^{n-2}} \in \mathbb{Z}$

Λύση (συνέχεια)

Άρα, η παράσταση

$$\left(x + \frac{1}{x}\right)\left(x^{n-1} + \frac{1}{x^{n-1}}\right) - \left(x^{n-2} + \frac{1}{x^{n-2}}\right) \in \mathbb{Z}$$

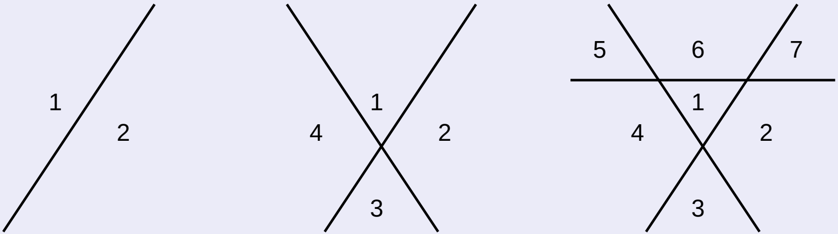
αφού περιέχει μόνο πολλαπλασιασμούς και αφαιρέσεις ακεραίων.
Επομένως, η $\Pi(n)$ είναι αληθής.
Άρα, από την αρχή της (ισχυρής) επαγωγής η $\Pi(n)$ είναι αληθής για κάθε $n \geq 0$.

Άσκηση 3 (Διαμερίσεις του επιπέδου από ευθείες)

Μια ευθεία χωρίζει το επίπεδο σε δύο περιοχές. Δύο ευθείες χωρίζουν το επίπεδο σε 4 το πολύ περιοχές. Σε πόσες το πολύ περιοχές μπορεί να χωρισθεί ένα επίπεδο από n ευθείες?

Λύση

Έστω a_n το μέγιστο πλήθος των περιοχών που μπορεί να χωρισθεί το επίπεδο από n ευθείες.
Παρατηρούμε ότι προκειμένου να μεγιστοποιήσουμε τον αριθμο των περιοχών πρέπει να μην υπάρχουν παράλληλες ευθείες και καμία 3-άδα ευθειών να μην συντρέχει σε σημείο.



Λύση (συνέχεια)

Έτσι, κάθε φορά που προσθέτουμε μια ευθεία τέμνει τις προηγούμενες n ευθείες σε n διαφορετικά σημεία και διαιρείται σε $n+1$ ευθύγραμμα μέρη κάθε ένα από τα οποία χωρίζει μια υπάρχουσα περιοχή σε 2 μέρη. Άρα, προκύπτει ο αναδρομικός τύπος

$$a_{n+1} = a_n + (n+1).$$

Με τη βοήθεια του αναδρομικού τύπου θα αποδείξουμε επαγωγικά ότι για κάθε $n \geq 1$ ισχύει ο τύπος

$$a_n = 1 + \frac{n(n+1)}{2}.$$

Πράγματι, έχουμε ότι $a_1 = 1 + \frac{1(1+1)}{2} = 2$, δηλαδή ο τύπος ισχύει για $n = 1$.

Λύση (συνέχεια)

Έστω ότι ο τύπος ισχύει για $n = k$, δηλαδή $a_k = 1 + \frac{k(k+1)}{2}$.
Θα δείξουμε ότι ο τύπος ισχύει και για $n = k + 1$. Από τον αναδρομικό τύπο έχουμε ότι

$$a_{k+1} = a_k + (k + 1),$$

οπότε, από την επαγωγική υπόθεση για το a_k, προκύπτει ότι

$$a_{k+1} = 1+\frac{k(k+1)}{2}+(k+1) = 1+\frac{k(k+1)+2(k+1)}{2} = 1+\frac{(k+1)(k+2)}{2}.$$

Άρα, ο τύπος ισχύει και για $n = k + 1$.
Επομένως, από την αρχή της επαγωγής ο τύπος ισχύει για κάθε $n \geq 1$.

Άσκηση 4 (Επαγωγή με βήμα μεγέθους 2)

Έστω ότι για μια πρόταση $\Pi(n)$ *μπορούμε να αποδείξουμε ότι αν η* $\Pi(k)$ *είναι αληθής, τότε και η* $\Pi(k+2)$ *είναι αληθής. Τι πρέπει να ισχύει ώστε η* $\Pi(n)$ *να είναι αληθής για κάθε* $n \in \mathbb{N}^*$*;*

Λύση

Αρκεί να είναι αληθείς οι $\Pi(1)$ και $\Pi(2)$.
Τότε μπορούμε να δείξουμε ότι η $\Pi(n)$ είναι αληθής για κάθε n περιττό και ότι η $\Pi(n)$ είναι αληθής για κάθε n άρτιο.
Άρα, η $\Pi(n)$ είναι αληθής για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$.

Άσκηση 5 (Το $3n+1$ πρόβλημα $\diamond$)

Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ εφαρμόζουμε τις εξής πράξεις:

- *Αν n άρτιος, τότε τον διαιρούμε με το* 2

$$n \to \frac{n}{2}$$

- *Αν n περιττός, τότε τον πολλαπλασιάζουμε επί* 3 *και προσθέτουμε* 1

$$n \to 3n+1$$

Επαναλαμβάνουμε την διαδικασία μέχρις ότου εμφανισθεί ο αριθμός 1.
Παραδείγματα.
$10 \to 5 \to 16 \to 8 \to 4 \to 2 \to 1$
$7 \to 22 \to 11 \to 34 \to 17 \to 52 \to 26 \to 13 \to 40 \to 20 \to 10 \to \cdots \to 1$
Εικασία[a] *Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ η διαδικασία καταλήγει πάντα στο* 1.

[a] Έχει επαληθευτεί μέχρι $n = 2^{68} = 295.147.905.179.352.825.856$.

Mathematics is not yet ripe enough for such questions. - Paul Erdős

Η επαγωγική προσέγγιση στην επίλυση προβλημάτων

Η επαγωγική προσέγγιση σε ένα πρόβλημα αποτελείται από δύο μέρη: Συνήθως το πρόβλημα έχει μια παράμετρο n, $n \in \mathbb{N}^*$ που εκφράζει το "μέγεθος" του προβλήματος

i) Για μικρές τιμές της παραμέτρου n γνωρίζουμε τις απαντήσεις στο πρόβλημα.

ii) Μπορούμε να λύσουμε το πρόβλημα με παράμετρο n χρησιμοποιώντας την λύση του προβλήματος με παράμετρο $n-1$, ή γενικότερα τις λύσεις του προβλήματος με παράμετρο k, όπου $k < n$.

Άσκηση 6 (Διάδοση κουτσομπολιών)

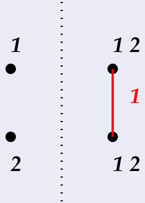
Μια παρέα n ατόμων κουτσομπολεύουν ανά δύο μέσω τηλεφώνου. Κάθε άτομο γνωρίζει τουλάχιστον ένα κουτσομπολιό που δεν το γνωρίζουν τα υπόλοιπα άτομα. Σε μια τηλεφωνική συνομιλία μεταξύ των A και B, ο A λέει στον B όλα τα κουτσομπολιά που έχει ακούσει και ο B ανταποδίδει. Έστω a_n ο ελάχιστος αριθμός τηλεφωνικών κλήσεων που πρέπει να γίνουν μεταξύ n ατόμων, ώστε όλα τα κουτσομπολιά να είναι γνωστά στον καθένα.

i) *Να δειχθεί ότι $a_2 = 1$, $a_3 = 3$ και $a_4 = 4$.*

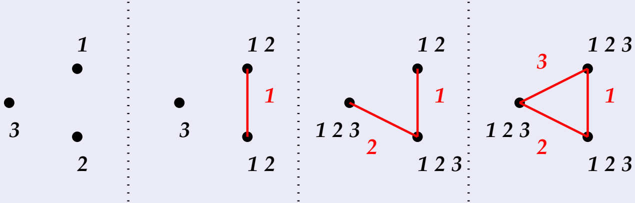
ii) *Να δειχθεί ότι $a_n \leq 2n - 4$, για κάθε $n \geq 4$.*

Λύση

i) Πράγματι, για $n = 2$ αρκεί ένα τηλεφώνημα.



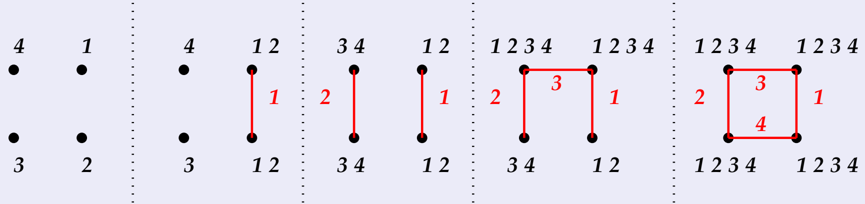
Για $n = 3$ αρκούν τρία τηλεφωνήματα.



Επαγωγή

Λύση (συνέχεια)

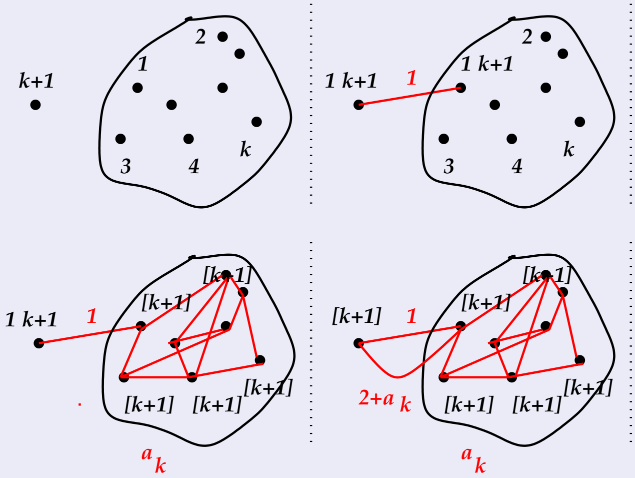
Για $n = 4$ αρκούν τέσσερα τηλεφωνήματα.



Λύση (συνέχεια)

ii) Έστω η πρόταση $\Pi(n) : a_n \leq 2n - 4$.
Για $n = 4$ έχουμε ότι $a_4 = 2 \cdot 4 - 4 = 4$, άρα η $\Pi(4)$ είναι αληθής.
Έστω ότι η πρόταση $\Pi(k)$ είναι αληθής για κάποιο $k \geq 4$, δηλαδή $a_k \leq 2k - 4$.
Θα δείξουμε ότι και η πρόταση $\Pi(k+1)$ είναι αληθής, δηλαδή $a_{k+1} \leq 2(k+1) - 4$.
Πράγματι, έστω ότι έχουμε $k+1$ άτομα. Αρχικά, το άτομο $k+1$ επικοινωνεί με το άτομο 1 και ανταλλάσουν τα κουτσομπολιά που γνωρίζουν. Στην συνέχεια τα άτομα 1, 2, ..., k ανταλλάσουν τα κουτσομπολιά που γνωρίζουν χρησιμοποιώντας a_k κλήσεις (αγνοώντας το άτομο $k+1$). Στο τέλος, το άτομο 1 καλεί το άτομο $k+1$ και του μεταφέρει όλα τα υπόλοιπα κουτσομπολιά.

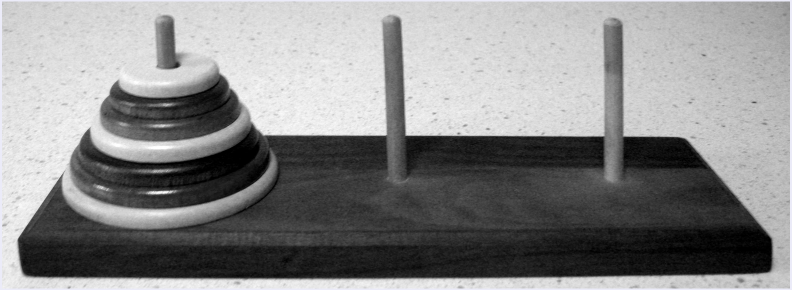
Λύση (συνέχεια)



Άρα, $a_{k+1} \leq 1 + a_k + 1 \leq 1 + (2k - 4) + 1 \leq 2(k+1) - 4.$

Άσκηση 7 (Πύργοι του Hanoi)

Έστω τρεις στύλοι και n διαφορετικοί δίσκοι, όπως φαίνεται στο επόμενο σχήμα:



Να βρεθεί πως μπορούμε να μεταφέρουμε τους n δίσκους σε άλλο στύλο, όταν μετακινούμε μόνο ένα δίσκο κάθε φορά και κανένας δίσκος δεν πρέπει να τοποθετηθεί πάνω σε μικρότερό του. Πόσες κινήσεις θα χρειαστούμε;

Λύση

Έστω a_n ο ζητούμενος αριθμός των κινήσεων που απαιτούνται όταν έχουμε να μεταφέρουμε n δίσκους.
Αν $n = 1$, τότε το πρόβλημα λύνεται άμεσα. Μετακινούμε τον μοναδικό δίσκο από τον στύλο που βρίσκεται σε ένα διαφορετικό στύλο. Άρα, $a_1 = 1$
Θα λύσουμε το πρόβλημα για $n \geq 2$ δίσκους.
Έστω ότι γνωρίζουμε να λύνουμε το πρόβλημα για $n - 1$ δίσκους, τότε στην περίπτωση που έχουμε να μεταφέρουμε n δίσκους:

- Μεταφέρουμε τους $n - 1$ μικρότερους δίσκους σε κάποιο άλλο στύλο (αγνοώντας τον μεγαλύτερο δίσκο).
- Έπειτα, μεταφέρουμε τον μεγαλύτερο δίσκο στον άδειο στύλο που απομένει.
- Και μεταφέρουμε τους $n - 1$ μικρότερους δίσκους στον στύλο όπου βρίσκεται ο μεγαλύτερος δίσκος.

Λύση (συνέχεια)

Συνολικά, θα χρειαστούμε $a_{n-1} + 1 + a_{n-1}$ κινήσεις, επομένως

$$a_n = 2a_{n-1} + 1$$

Με την βοήθεια του αναδρομικού τύπου μπορούμε να δείξουμε με επαγωγή ότι

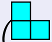
$$a_n = 2^n - 1$$

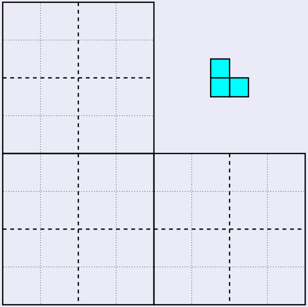
Πράγματι, για $n = 1$ έχουμε $a_1 = 2^1 - 1 = 1$ άρα ο ισχυρισμός ισχύει.
Υποθέτουμε ότι $a_k = 2^k - 1$ για κάποιο $k \geq 1$ και θα δείξουμε ότι $a_{k+1} = 2^{k+1} - 1$.
Πράγματι, χρησιμοποιώντας τον παραπάνω αναδρομικό τύπο

$$a_{k+1} = 2a_k + 1 = 2(2^k - 1) + 1 = 2^{k+1} - 1.$$

Άρα, από την αρχή της επαγωγής ο ισχυρισμός ισχύει για κάθε $n \geq 1$.

Άσκηση 8 (Κάλυψη με τρόμινο)

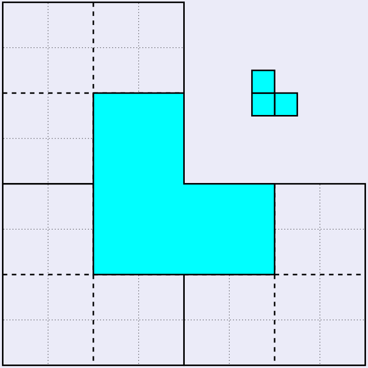
Να βρεθεί πως μπορούμε να καλύψουμε με σχήματα L-τρόμινο (*) μια $2^n \times 2^n$ L-τρόμινο σκακιέρα.*



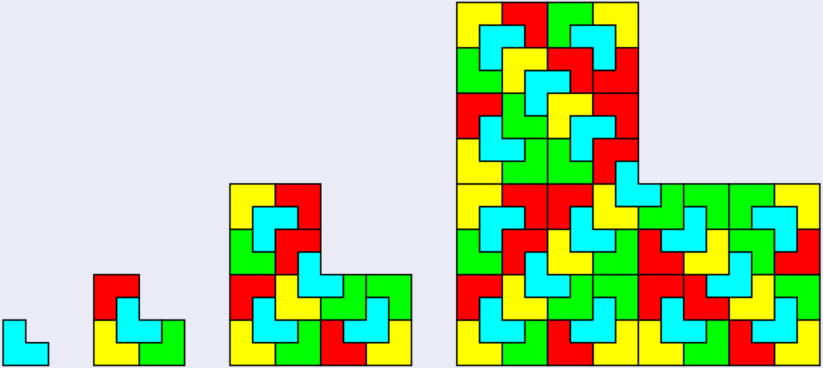
Δεν επιτρέπονται οι επικαλύψεις στα L-τρόμινο αλλά επιτρέπονται οι περιστροφές.

Λύση

Για $n = 1$, η κάλυψη μιας $2^1 \times 2^1$ L-τρόμινο σκακιέρας είναι προφανής. Έστω ότι μπορούμε να καλύψουμε μια $2^n \times 2^n$ σκακιέρα. Τότε μπορούμε να καλύψουμε την $2^{n+1} \times 2^{n+1}$ σκακιέρα διαμερίζοντας την σκακιέρα σε τέσσερα $2^n \times 2^n$ τμήματα.

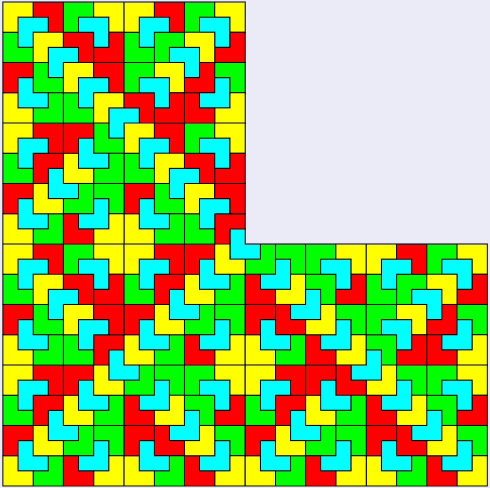


Λύση (συνέχεια)



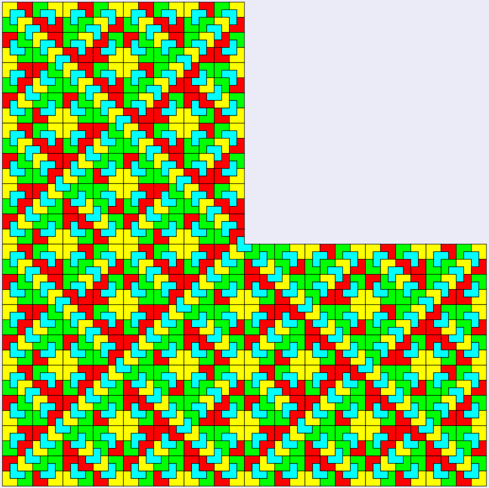
$n = 1$ $n = 2$ $n = 3$ $n = 4$

Λύση (συνέχεια)



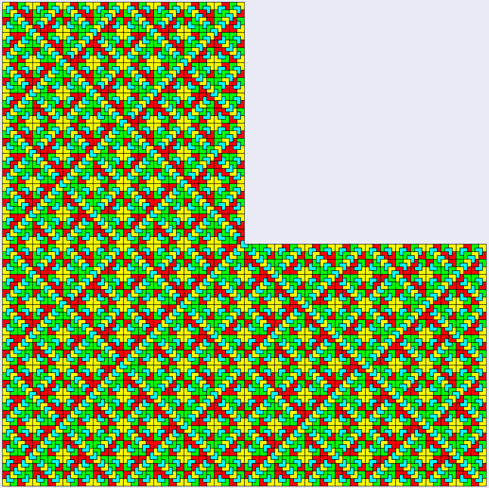
$n = 5$

Λύση (συνέχεια)



$n = 6$

Λύση (συνέχεια)



$n = 7$

Η αρχή της επαγωγής είναι ισοδύναμη με την αρχή της καλής διάταξης:

Αρχή της καλής διάταξης

Κάθε μη κενό υποσύνολο του $\mathbb{N}^*$ έχει ελάχιστο στοιχείο.

Άσκηση 9

Να δειχθεί ότι η εξίσωση $8x^4 + 4y^4 + 2z^4 = t^4$ *δεν έχει θετικές ακέραιες λύσεις* (x, y, z, t).

Λύση

Έστω A το σύνολο των θετικών φυσικών αριθμών x που εμφανίζονται στις θετικές ακέραιες λύσεις (x, y, z, t) της εξίσωσης.
Αν $A \neq \emptyset$ τότε επειδή $A \subseteq \mathbb{N}^*$ έπεται ότι το A έχει ελάχιστο στοιχείο.
Έστω $m = \min A$.
Τότε υπάρχουν $a, b, c \in \mathbb{N}$ ώστε

$$8m^4 + 4a^4 + 2b^4 = c^4.$$

Από την εξίσωση έπεται ότι c^4 είναι άρτιος, άρα και ο c είναι άρτιος, δηλαδή $c = 2c_1$ όπου $c_1 \in \mathbb{N}^*$.

Λύση (συνέχεια)

Αντικαθιστώντας στην εξίσωση έχουμε ότι

$$8m^4 + 4a^4 + 2b^4 = 16c_1^4 \Leftrightarrow 4m^4 + 2a^4 + b^4 = 8c_1^4.$$

Επομένως, ο b^4 είναι επίσης άρτιος, δηλαδή ο b είναι άρτιος, δηλαδή $b = 2b_1$ όπου $b_1 \in \mathbb{N}^*$. Άρα,

$$4m^4 + 2a^4 + 16b_1^4 = 8c_1^4 \Leftrightarrow 2m^4 + a^4 + 8b_1^4 = 4c_1^4.$$

Ομοίως, ο a είναι άρτιος, δηλαδή $a = 2a_1$, όπου $a_1 \in \mathbb{N}^*$. Άρα,

$$2m^4 + 16a_1^4 + 8b_1^4 = 4c_1^4 \Leftrightarrow m^4 + 8a_1^4 + 4b_1^4 = 2c_1^4.$$

Λύση (συνέχεια)

Επομένως, ο m είναι άρτιος, δηλαδή $m = 2m_1$, όπου $m_1 \in \mathbb{N}^*$ με $m_1 < m$. Αντικαθιστώντας στην προηγούμενη ισότητα έπεται ότι

$$16m_1^4 + 8a_1^4 + 4b_1^4 = 2c_1^4 \Leftrightarrow 8m_1^4 + 4a_1^4 + 2b_1^4 = c_1^4$$

δηλαδή η τετράδα (m_1, a_1, b_1, c_1) αποτελεί λύση της εξίσωσης $8x^4 + 4y^4 + 2z^4 = t^4$, επομένως $m_1 \in A$ με $m_1 < m = \min A$. το οποίο είναι άτοπο. Άρα, $A = \emptyset$, δηλαδή η εξίσωση δεν έχει θετικές ακέραιες λύσεις.

Αθροίσματα

Άσκηση 10

Να απλοποιηθεί η παράσταση

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{2}{k+1} + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+2}$$

Λύση (1ος τρόπος γραφής)

$$\begin{aligned} S_n = &\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n}\right) \\ &- \left(1 + \frac{2}{3} + \frac{2}{4} + \cdots + \frac{2}{n} + \frac{2}{n+1}\right) \\ &+ \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2}\right) \end{aligned}$$

Λύση (συνέχεια)

$$
\begin{aligned}
&= \left(1 + \frac{1}{2} + \cancel{\frac{1}{3}} + \cdots + \cancel{\frac{1}{n-1}} + \cancel{\frac{1}{n}}\right) \\
&\quad - \left(\frac{2}{2} + \cancel{\frac{2}{3}} + \cancel{\frac{2}{4}} + \cdots + \cancel{\frac{2}{n}} + \frac{2}{n+1}\right) \\
&\quad + \left(\cancel{\frac{1}{3}} + \cancel{\frac{1}{4}} + \cancel{\frac{1}{5}} + \cdots + \cancel{\frac{1}{n}} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2}\right) \\
&= 1 + \frac{1}{2} - 1 - \frac{2}{n+1} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} \\
&= \frac{1}{2} - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2}.
\end{aligned}
$$

Λύση (2ος τρόπος γραφής)

$$
\begin{aligned}
S_n &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{2}{k+1} + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+2} \\
&\overset{\lambda=k+1,\mu=k+2}{=} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \sum_{\lambda=2}^{n+1} \frac{2}{\lambda} + \sum_{\mu=3}^{n+2} \frac{1}{\mu} \\
&= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \sum_{k=2}^{n+1} \frac{2}{k} + \sum_{k=3}^{n+2} \frac{1}{k} \\
&= (1 + \frac{1}{2} + \sum_{k=3}^{n} \frac{1}{k}) - 2(\frac{1}{2} + \sum_{k=3}^{n} \frac{1}{k} + \frac{1}{n+1}) + (\sum_{k=3}^{n} \frac{1}{k} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2}) \\
&= 1 + \frac{1}{2} - 1 - \frac{2}{n+1} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2}.
\end{aligned}
$$

Άσκηση 11

Να αποδειχθεί ότι $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = 1 - \frac{1}{n+1}$.

Λύση

Με ανάλυση σε απλά κλάσματα έχουμε ότι $\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$.

οπότε

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+1} \\ &= \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} \right) - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} \right) \\ &= \left(1 + \cancel{\frac{1}{2}} + \cancel{\frac{1}{3}} + \cdots + \cancel{\frac{1}{n}} \right) - \left(\cancel{\frac{1}{2}} + \cancel{\frac{1}{3}} + \cdots + \cancel{\frac{1}{n}} + \frac{1}{n+1} \right) \\ &= 1 - \frac{1}{n+1}. \end{aligned}$$

Λύση (2ος τρόπος γραφής)

Έχουμε ότι

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+1} \\ &\overset{\lambda=k+1}{=} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \sum_{\lambda=2}^{n+1} \frac{1}{\lambda} \\ &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{k} \\ &= (1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k}) - (\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} + \frac{1}{n+1}) \\ &= 1 - \frac{1}{n+1} \end{aligned}$$

Άσκηση 12 (Άθροισμα όρων γεωμετρικής προόδου)

Να αποδειχθεί ότι για κάθε $n \in \mathbb{N}$ *ισχύει ότι*

$$S_n = 1 + x + \cdots + x^n = \sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{x^{n+1} - 1}{x - 1}, \text{ όπου } x \neq 1.$$

Λύση

Ισχύει ότι

$$xS_n - S_n = x(1 + x + \cdots + x^n) - (1 + x + \cdots + x^n) \Leftrightarrow$$
$$(x-1)S_n = (x + x^2 + \cdots + x^{n+1}) - (1 + x + \cdots + x^n) \Leftrightarrow$$
$$(x-1)S_n = (\cancel{x} + \cancel{x^2} + \cdots + x^{n+1}) - (1 + \cancel{x} + \cdots + \cancel{x^n}) \Leftrightarrow$$
$$(x-1)S_n = x^{n+1} - 1 \Leftrightarrow S_n = \frac{x^{n+1} - 1}{x - 1}$$

Λύση (2ος τρόπος γραφής)

Ισχύει ότι

$$xS_n - S_n = x\sum_{k=0}^{n} x^k - \sum_{k=0}^{n} x^k \Leftrightarrow$$

$$(x-1)S_n = \sum_{k=0}^{n} x^{k+1} - \sum_{k=0}^{n} x^k \Leftrightarrow$$

$$(x-1)S_n \overset{\lambda=k+1}{=} \sum_{\lambda=1}^{n+1} x^{\lambda} - \sum_{k=0}^{n} x^k \Leftrightarrow$$

$$(x-1)S_n = \sum_{k=1}^{n+1} x^k - \sum_{k=0}^{n} x^k \Leftrightarrow$$

$$(x-1)S_n = (\sum_{k=1}^{n} x^k + x^{n+1}) - (1 + \sum_{k=1}^{n} x^k) \Leftrightarrow$$

$$(x-1)S_n = x^{n+1} - 1 \Leftrightarrow S_n = \frac{x^{n+1}-1}{x-1}$$

Τύπος του διωνύμου του Νεύτωνα

$$(\alpha+\beta)^n = (\beta+\alpha)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \alpha^k \beta^{n-k}$$

Άσκηση 13

Να βρεθεί ο συντελεστής του όρου $a^4 b^8$ στο ανάπτυγμα του αθροίσματος $(a+b)^{12}$.

Λύση

Από τον τύπο του διωνύμου του Νεύτωνα έχουμε ότι

$$(a+b)^{12} = \sum_{k=0}^{12} \binom{12}{k} a^k b^{12-k}$$

Ο συντελεστής του όρου $a^k b^{12-k}$ είναι ο $\binom{12}{k}$.
Ο όρος $a^4 b^8$ εμφανίζεται στο άθροισμα για $k = 4$.
Άρα ο αντίστοιχος συντελεστής είναι ο
$\binom{12}{4} = \frac{12!}{4!8!} = \frac{9 \cdot 10 \cdot 11 \cdot 12}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 3 \cdot 5 \cdot 11 \cdot 3 = 495$

Άσκηση 14

Να βρεθεί ο όρος που δεν περιέχει a στο ανάπτυγμα του αθροίσματος $(a^2 + \frac{1}{a})^9$.

Λύση

Από τον τύπο του διωνύμου του Νεύτωνα έχουμε ότι

$$(a^2 + \frac{1}{a})^9 = \sum_{k=0}^{9} \binom{9}{k} (a^2)^{9-k} (\frac{1}{a})^k$$

οπότε

$$\sum_{k=0}^{9} \binom{9}{k} (a^2)^{9-k} (\frac{1}{a})^k = \sum_{k=0}^{9} \binom{9}{k} a^{18-2k-k} = \sum_{k=0}^{9} \binom{9}{k} a^{18-3k}$$

Επομένως ο όρος που δεν περιέχει a εμφανίζεται στο άθροισμα όταν $18 - 3k = 0$, δηλαδή $k = 6$.

Άρα ο όρος που δεν περιέχει a ισούται με $\binom{9}{6} = \frac{9!}{6!3!} = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 3 \cdot 4 \cdot 7 = 84$.

Άσκηση 15

Να υπολογισθεί το άθροισμα

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^k$$

Λύση

Από τον τύπο του διωνύμου του Νεύτωνα για $a = 1$, $\beta = 2$ προκύπτει

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 1^{n-k} 2^k = (1+2)^n = 3^n$$

Άσκηση 16

Να αποδειχθεί ότι $\binom{-n}{n} = (-1)^n \binom{2n-1}{n}$, $n \in \mathbb{N}^*$.

Υπενθύμιση: $\binom{x}{k} = \dfrac{\overbrace{x(x-1)(x-2)\cdots(x-k+1)}^{k \text{ όροι}}}{k!}$, $x \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}$

$\binom{n}{k} = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$, $n, k \in \mathbb{N}$ με $k \leq n$.

Λύση

$$\begin{aligned}\binom{-n}{n} &= \frac{(-n)(-n-1)(-n-2)\cdots(-n-(n-1))}{n!} \\ &= \frac{(-1)^n n(n+1)(n+2)\cdots(2n-1)}{n!} \\ &= \frac{(-1)^n(2n-1)!}{n!(n-1)!} = (-1)^n\binom{2n-1}{n}.\end{aligned}$$

Βασικές ανισότητες

Ανισότητα Bernoulli

Για κάθε $x > -1$ και $n \in \mathbb{N}$ ισχύει ότι

$$(1+x)^n \geq 1 + nx.$$

Η ισότητα ισχύει μόνο για $n = 1$ ή $x = 0$.

- Συνήθως, χρησιμοποιείται όταν το x εξαρτάται από το n και $|x| \leq 1$.

Ανισότητα Cauchy[a] (AM - GM - HM)

[a] Προφέρεται: Κωσύ

Για κάθε $a_1, a_2, \ldots, a_n \geq 0$

$$\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} \geq \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n}}$$

Η ισότητα ισχύει μόνο όταν $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$.

Ανισότητα Cauchy - Schwarz (CS)

Για κάθε $a_1, a_2, \ldots, a_n, b_1, b_2, \ldots, b_n \in \mathbb{R}$ ισχύει ότι

$$(a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_n^2) \geq (a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n)^2$$

Η ισότητα ισχύει μόνο όταν υπάρχει $\lambda \in \mathbb{R}$ ώστε

$$a_1 = \lambda b_1, a_2 = \lambda b_2, \ldots, a_n = \lambda b_n.$$

Άσκηση 17

Να δειχθεί ότι $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \geq 2$, *για* $n \geq 1$.

Λύση.

Για $n \geq 1$ ισχύει ότι $x = \frac{1}{n} > -1$, άρα από την ανισότητα Bernoulli έχουμε ότι

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \geq 1 + n \cdot \frac{1}{n} = 2.$$

□

Άσκηση 18

Να δειχθεί ότι $\left(\dfrac{n+5}{n+10}\right)^n \geq 1 - \dfrac{5n}{n+10}$, *για* $n \geq 1$.

Λύση.

Ισχύει ότι

$$\frac{n+5}{n+10} = \frac{n+10-5}{n+10} = 1 - \frac{5}{n+10}.$$

Προκειμένου να εφαρμόσουμε την ανισότητα Bernoulli πρέπει να ελέγξουμε ότι

$$-\frac{5}{n+10} > -1 \Leftrightarrow 5 < n+10$$

το οποίο ισχύει.

Άρα, από την ανισότητα Bernoulli προκύπτει ότι

$$\left(1 - \frac{5}{n+10}\right)^n \geq 1 + n\left(-\frac{5}{n+10}\right) = 1 - \frac{5n}{n+10}.$$

□

Άσκηση 19

Να δειχθεί ότι $n! \leq \left(\frac{n+1}{2}\right)^n$, *για κάθε* $n \geq 1$.

Λύση.

Υπενθυμίζεται ότι $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \cdots \cdot (n-1)n$.

$$n! \leq \left(\frac{n+1}{2}\right)^n \Leftrightarrow \sqrt[n]{n!} \leq \frac{n+1}{2} \Leftrightarrow \sqrt[n]{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n} \leq \frac{n+1}{2}$$

Από την ανισότητα Cauchy για $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, $a_3 = 3$, $\ldots$, $a_n = n$ προκύπτει ότι

$$\sqrt[n]{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n} \leq \frac{1+2+3+\cdots+n}{n} = \frac{\frac{n(n+1)}{2}}{n} \Leftrightarrow$$

$$\sqrt[n]{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n} \leq \frac{n+1}{2}. \qquad \square$$

Άσκηση 20

Να δειχθεί ότι $\sqrt[n]{1+x} \geq \dfrac{1}{1-\dfrac{x}{n(1+x)}}$.

Λύση.

Έχουμε ότι

$$\begin{aligned}
\sqrt[n]{1+x} &= \sqrt[n]{\underbrace{1\cdot 1\cdots 1}_{n-1\ \text{όροι}}\cdot(1+x)} \\
&\geq \frac{n}{\dfrac{1}{1}+\dfrac{1}{1}+\cdots+\dfrac{1}{1}+\dfrac{1}{1+x}} \\
&= \frac{n}{n-1+\dfrac{1}{1+x}} \\
&= \frac{n}{n-\dfrac{x}{1+x}} = \frac{1}{1-\dfrac{x}{n(1+x)}}.
\end{aligned}$$

□

Άσκηση 21

Να δειχθεί ότι όταν $x > 0$ και $n \geq 1$ τότε

$$(1+x)^n \geq 1 + nx.$$

Λύση.

$$(1+x)^n \geq 1 + nx \Leftrightarrow 1 + x \geq \sqrt[n]{1+nx}$$

Έχουμε ότι

$$\begin{aligned}
\sqrt[n]{1+nx} &= \sqrt[n]{1 \cdot 1 \cdots 1 \cdot (1+nx)} \\
&\leq \frac{1+1+\cdots+1+(1+nx)}{n} \\
&= \frac{n-1+(1+nx)}{n} = \frac{n+nx}{n} = 1+x
\end{aligned}$$

□

Άσκηση 22

Να δειχθεί ότι για κάθε $n \geq 1$ ισχύει ότι

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1}$$

Λύση

Κάνοντας ομώνυμα τα κλάσματα κάθε παρένθεσης, έχουμε ισοδύναμα

$$\left(\frac{n+1}{n}\right)^n < \left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+1} \Leftrightarrow$$

$$\sqrt[n+1]{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n} < \frac{n+2}{n+1}$$

Λύση (συνέχεια)

Ισχύει ότι
$$\sqrt[n+1]{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n} = \sqrt[n+1]{\underbrace{\frac{n+1}{n}\cdot\frac{n+1}{n}\cdots\frac{n+1}{n}}_{n \text{ όροι}}\cdot 1}$$

Από την ανισότητα Cauchy έπεται ότι

$$\sqrt[n+1]{\underbrace{\frac{n+1}{n}\cdot\frac{n+1}{n}\cdots\frac{n+1}{n}}_{n \text{ όροι}}\cdot 1} \leq \frac{\overbrace{\frac{n+1}{n}+\frac{n+1}{n}+\cdots+\frac{n+1}{n}}^{n \text{ όροι}}+1}{n+1}$$

$$= \frac{n\frac{n+1}{n}+1}{n+1} = \frac{n+2}{n+1}.$$

Το $=$ στην ανισότητα δεν ισχύει ποτέ, διότι $\dfrac{n+1}{n} \neq 1$ για κάθε n, άρα η ανισότητα είναι γνήσια (ισχύει το $<$)

Άσκηση 23

Να δειχθεί ότι για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$ *ισχύει ότι*

$$(x-5)^2 + (y+3)^2 + (x+2y+6)^2 \geq \frac{25}{6}.$$

Λύση

Οι ανισότητες που δίνουν κάτω φράγματα για το άθροισμα τετραγώνων γραμμικών συναρτήσεων 2 ή περισσοτέρων μεταβλητών μπορούν να αποδειχθούν με την βοήθεια της ανισότητας CS

$$(a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_n^2) \geq (a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n)^2$$

χρησιμοποιώντας την παρακάτω μεθοδολογία.
Βρίσκουμε σταθερές $b_1, b_2, b_3 \in \mathbb{R}$ ώστε η παράσταση

$$A = \underbrace{(x-5)}_{a_1} b_1 + \underbrace{(y+3)}_{a_2} b_2 + \underbrace{(x+2y+6)}_{a_3} b_3$$

να μην εξαρτάται από τα x, y.

Λύση (συνέχεια)

Έχουμε ότι

$$A = (b_1 + b_3)x + (b_2 + 2b_3)y + (6b_3 - 5b_1 + 3b_2)$$

οπότε πρέπει

$$b_1 + b_3 = 0 \text{ και } b_2 + 2b_3 = 0$$

Άρα, μια λύση είναι η τριάδα $b_3 = 1$, $b_1 = -1$, $b_2 = -2$ για την οποία $A = 6 \cdot 1 - 5(-1) + 3(-2) = 5$.
Επομένως, από την ανισότητα CS για $a_1 = x - 5$, $a_2 = y + 3$, $a_3 = x + 2y + 6$, $b_1 = -1$, $b_2 = -2$, $b_3 = 1$ έχουμε ότι

$$(\underbrace{(x-5)^2}_{a_1^2} + \underbrace{(y+3)^2}_{a_2^2} + \underbrace{(x+2y+6)^2}_{a_3^2})(\underbrace{(-1)^2}_{b_1^2} + \underbrace{(-2)^2}_{b_2^2} + \underbrace{1^2}_{b_3^2}) \geq 5^2$$

$$\Leftrightarrow (x-5)^2 + (y+3)^2 + (x+2y+6)^2 \geq \frac{25}{6}$$