

# Μαθηματικά των Υπολογιστών

Αθροίσματα - Διαφορές

2021-2022

## Τύπος του Νεύτωνα

**Τύπος του διωνύμου του Νεύτωνα** Για κάθε  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  και  $n \in \mathbb{N}^*$  ισχύει ότι

$$(\alpha + \beta)^n = (\beta + \alpha)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \alpha^k \beta^{n-k}.$$

## Άσκηση 1

Να βρεθούν οι συντελεστές των  $a^4$ ,  $a^5$  και  $a^{13}$  στο ανάπτυγμα της παράστασης  $\left(a + \frac{1}{a^2}\right)^{10}$ .

Ισχύει ότι

$$\left(a + \frac{1}{a^2}\right)^{10} = \sum_{k=0}^{10} \binom{10}{k} a^k \left(\frac{1}{a^2}\right)^{10-k} = \sum_{k=0}^{10} \binom{10}{k} a^{3k-20}$$

Επομένως, ο γενικός όρος του αθροίσματος έχει την μορφή  $\binom{10}{k} a^{3k-20}$ . Ο συντελεστής του  $a^4$  προκύπτει όταν  $3k - 20 = 4 \Leftrightarrow k = 8$  και ισούται με  $\binom{10}{8}$ .

Ο συντελεστής του  $a^5$  προκύπτει όταν  $3k - 20 = 5 \Leftrightarrow k = \frac{25}{3} \notin \mathbb{Z}$ , άρα ισούται με 0, δηλαδή ισοδύναμα το ανάπτυγμα δεν περιέχει τον όρο  $a^5$ . Ο συντελεστής του  $a^{10}$  προκύπτει όταν  $3k - 20 = 13 \Leftrightarrow k = 11$ . Επειδή,  $k \notin [10]$ , άρα ισούται με 0, δηλαδή ισοδύναμα το ανάπτυγμα δεν περιέχει τον όρο  $a^{13}$ .

## Άσκηση 2

Να υπολογισθούν τα αθροίσματα:

$$i) S_n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}$$

$$S_n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 1^k 1^{n-k} = (1 + 1)^n = 2^n$$

$$ii) S_n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 2^k$$

$$S_n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 2^k 1^{n-k} = (2 + 1)^n = 3^n$$

## Άσκηση 2

Να υπολογισθούν τα αθροίσματα:

$$iii) S_n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^k 3^{n-k}$$

$$S_n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^k 3^{n-k} = (-1 + 3)^n = 2^n$$

$$iv) S_n = \sum_{k=2}^n \binom{n}{k}$$

$$S_n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} - \binom{n}{0} - \binom{n}{1} = 2^n - 1 - n$$

## Άσκηση 2

Να υπολογισθούν τα αθροίσματα:

$$v) S_n = \sum_{k=2}^{n-1} \binom{n}{k}$$

$$S_n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} - \binom{n}{0} - \binom{n}{1} - \binom{n}{n} = 2^n - 1 - n - 1 = 2^n - n - 2$$

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \underbrace{\binom{n}{2} + \cdots + \binom{n}{n-2} + \binom{n}{n-1}}_{\sum_{k=2}^{n-1} \binom{n}{k}} + \binom{n}{n}$$

## Άσκηση 2

Να υπολογισθούν τα αθροίσματα:

$$vi) S_n = \sum_{k=0}^{n+2} \binom{n+2}{k}$$

$$S_n = \sum_{k=0}^{n+2} \binom{n+2}{k} = 2^{n+2}$$

$$vii) S_n = \sum_{k=0}^{5n} \binom{5n}{k}$$

$$S_n = \sum_{k=0}^{5n} \binom{5n}{k} = 2^{5n}$$

## Άσκηση 2

Να υπολογισθούν τα αθροίσματα:

$$\text{viii) } S_n = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k+1}$$

$$S_n = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k+1}$$

Θέτουμε  $k+1 = \lambda$ , τότε επειδή το  $k$  λαμβάνει τιμές από 0 μέχρι  $n-1$ , το  $\lambda$  θα λαμβάνει τιμές από  $0+1$  μέχρι  $n-1+1$ .

$$S_n = \sum_{\lambda=1}^n \binom{n}{\lambda} = 2^n - \binom{n}{0} = 2^n - 1$$



### Άσκηση 3

Να υπολογισθούν τα αθροίσματα:

$$i) S_n = \sum_{k=0}^n n \binom{n}{k}$$

$$S_n = \sum_{k=0}^n n \binom{n}{k} = n2^n$$

### Άσκηση 3

Να υπολογισθούν τα αθροίσματα:

$$ii) \sum_{k=0}^n k \binom{n}{k}$$

Από τον τύπο  $\binom{a}{b} = \frac{a}{b} \binom{a-1}{b-1} \Leftrightarrow b \binom{a}{b} = a \binom{a-1}{b-1}$  έπεται  
ότι

$$S_n = \sum_{k=0}^n k \binom{n}{k} = \sum_{k=1}^n k \binom{n}{k} = \sum_{k=1}^n n \binom{n-1}{k-1} = n \sum_{k=1}^n \binom{n-1}{k-1}$$

Θέτουμε  $\lambda = k - 1$ , οπότε

$$S_n = n \sum_{\lambda=0}^{n-1} \binom{n-1}{\lambda} = n2^{n-1}.$$

### Άσκηση 3

Να υπολογισθούν τα αθροίσματα:

$$iii) S_n = \sum_{k=0}^n (Ak + B) \binom{n}{k}$$

$$S_n = \sum_{k=0}^n (Ak + B) \binom{n}{k} = A \sum_{k=0}^n k \binom{n}{k} + B \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = An2^{n-1} + B2^n$$

### Άσκηση 3

Να υπολογισθούν τα αθροίσματα:

$$iv) S_n = \sum_{k=0}^n k^2 \binom{n}{k}$$

$$S_n = \sum_{k=0}^n k^2 \binom{n}{k} = \sum_{k=1}^n k \cdot k \binom{n}{k}$$

Από τον τύπο  $\binom{a}{b} = \frac{a}{b} \binom{a-1}{b-1} \Leftrightarrow b \binom{a}{b} = a \binom{a-1}{b-1}$  έπεται ότι

$$S_n = \sum_{k=1}^n kn \binom{n-1}{k-1} = n \sum_{k=1}^n k \binom{n-1}{k-1}$$

### Άσκηση 3

Να υπολογισθούν τα αθροίσματα:

$$iv) S_n = \sum_{k=0}^n k^2 \binom{n}{k}$$

Θέτουμε  $\lambda = k - 1$ , οπότε

$$S_n = n \sum_{\lambda=0}^{n-1} (\lambda + 1) \binom{n-1}{\lambda} = n \sum_{\lambda=0}^{n-1} \lambda \binom{n-1}{\lambda} + n \sum_{\lambda=0}^{n-1} \binom{n-1}{\lambda}$$

Γνωρίζουμε ότι  $\sum_{k=0}^n k \binom{n}{k} = n2^{n-1}$ , άρα

$$S_n = n(n-1)2^{n-2} + n2^{n-1} = n2^{n-2}(n-1+2) = n(n+1)2^{n-2}.$$

$$v) \sum_{k=0}^n (Ak^2 + Bk + C) \binom{n}{k}$$

### Άσκηση 3

Να υπολογισθούν τα αθροίσματα:

$$vi) S_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k+1} \binom{n}{k}$$

Από τον τύπο  $\binom{a}{b} = \frac{a}{b} \binom{a-1}{b-1} \Leftrightarrow \frac{1}{a} \binom{a}{b} = \frac{1}{b} \binom{a-1}{b-1}$ , θέτουμε  
τας όπου  $b-1 = k$  και  $a-1 = n$  έπεται ότι

$$S_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{n+1} \binom{n+1}{k+1} = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n \binom{n+1}{k+1}$$

Θέτουμε  $k+1 = \lambda$  οπότε

$$S_n = \frac{1}{n+1} \sum_{\lambda=1}^{n+1} \binom{n+1}{\lambda} = \frac{1}{n+1} \left( \sum_{\lambda=0}^{n+1} \binom{n+1}{\lambda} - \binom{n+1}{0} \right) =$$
$$\frac{1}{n+1} (2^{n+1} - 1)$$

### Άσκηση 3

Να υπολογισθούν τα αθροίσματα:

$$vii) S_n = \sum_{k=0}^n \frac{4k-6}{k+1} \binom{n}{k}$$

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=0}^n \frac{4k+4-10}{k+1} \binom{n}{k} = \sum_{k=0}^n \frac{4k+4}{k+1} \binom{n}{k} - \sum_{k=0}^n \frac{10}{k+1} \binom{n}{k} \\ &= 4 \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} - 10 \sum_{k=0}^n \frac{1}{k+1} \binom{n}{k} = 4 \cdot 2^n - \frac{10}{n+1} (2^{n+1} - 1) \end{aligned}$$

## Παραγοντικά πολυώνυμα

Παραγοντικό πολύωνμο τάξεως  $k$ .

$$F_0(x) = 1,$$

$$F_k(x) = \underbrace{x(x-1)(x-2)\cdots(x-k+1)}_{k \text{ όροι}} = (x)_k, \quad \text{για } k \in \mathbb{N}^*.$$

1)  $F_1(x) = x$

2)  $F_2(x) = x(x-1) = x^2 - x$

3)  $F_3(x) = x(x-1)(x-2) = x^3 - 3x^2 + 2x$

4)  $F_4(x) = x(x-1)(x-2)(x-3) = x^4 - 6x^3 + 11x^2 - 6x.$

Οι συντελεστές των  $x^i$  που εμφανίζονται στους τύπους των παραγοντικών πολυωνύμων ονομάζονται **αριθμοί Stirling πρώτου είδους**.



Τα μονώνυμα μπορούν να εκφραστούν με τη βοήθεια παραγοντικών πολυωνύμων.

1)  $x = F_1(x)$ , διότι  $F_1(x) = x$ .

2)  $x^2 = F_1(x) + F_2(x)$ , διότι

$$F_2(x) = x^2 - x \Rightarrow x^2 = x + F_2(x) = F_1(x) + F_2(x)$$

3)  $x^3 = F_1(x) + 3F_2(x) + F_3(x)$ ,

$$\text{διότι } F_3(x) = x(x-1)(x-2) = x^3 - 3x^2 + 2x \Rightarrow x^3 =$$

$$F_3(x) + 3x^2 - 2x = F_3(x) + 3(F_1(x) + F_2(x)) - 2F_1(x).$$

Οι συντελεστές των  $F_i(x)$  που εμφανίζονται στους τύπους έκφρασης των μονονύμων από τα παραγοντικά πολυώνυμα ονομάζονται **αριθμοί Stirling δευτέρου είδους**.

## Άσκηση 4

Να δειχθεί ότι  $x^4 = F_1(x) + 7F_2(x) + 6F_3(x) + F_4(x)$ .

$$F_4(x) = x(x-1)(x-2)(x-3) = x^4 - 6x^3 + 11x^2 - 6x$$

Άρα,

$$x^4 = F_4(x) + 6x^3 - 11x^2 + 6x = F_4(x) + 6(F_1(x) + 3F_2(x) + F_3(x)) - 11(F_1(x) + F_2(x)) + 6F_1(x) = F_4(x) + 6F_3(x) + 7F_2(x) + F_1(x).$$

**Παρατήρηση** Με τη βοήθεια των τύπων των προηγούμενων παραδειγμάτων μπορούμε να εκφράσουμε οποιοδήποτε πολυώνυμο βαθμού μέχρι 4 ως γραμμικό συνδυασμό παραγοντικών πολυωνύμων.

### Άσκηση 5

Να εκφραστεί το πολύωνυμο  $p(x) = 7x^3 - 2x^2 + 6x + 4$  ως γραμμικός συνδυασμός των παραγοντικών πολυωνύμων  $F_0(x)$ ,  $F_1(x)$ ,  $F_2(x)$  και  $F_3(x)$ .

Από τα προηγούμενα παραδείγματα ισχύει ότι

$$\begin{aligned} p(x) &= 7(F_1(x) + 3F_2(x) + F_3(x)) - 2(F_1(x) + F_2(x)) + 6F_1(x) + 4F_0(x) \\ &= 7F_3(x) + 19F_2(x) + 11F_1(x) + 4F_0(x). \end{aligned}$$

**Συμβολισμός:**  $\Delta g(x) = g(x + 1) - g(x)$ .

**Γραμμική ιδιότητα:**  $\Delta(ag(x) + bf(x)) = a\Delta g(x) + b\Delta f(x)$ .

Παρατήρηση:

1) Έστω  $f(n) = \sum_{k=0}^n g(k)$

$$\Delta f(n) = f(n+1) - f(n) = \sum_{k=0}^{n+1} g(k) - \sum_{k=0}^n g(k) = g(n+1)$$

2) Έστω  $f(n) = \Delta g(n) = g(n+1) - g(n)$

$$\sum_{k=0}^n f(k) = \sum_{k=0}^n \Delta g(k) = \sum_{k=0}^n (g(k+1) - g(k)) =$$

$$\sum_{k=0}^n g(k+1) - \sum_{k=0}^n g(k) = \sum_{k=1}^{n+1} g(k) - \sum_{k=0}^n g(k) = g(n+1) - g(0)$$

3) Η διαφορά και το άθροισμα συμπεριφέρονται όπως η παράγωγος και το ολοκλήρωμα:

$$\text{Αν } g'(x) = f(x) \text{ τότε } \int_a^b f(x) dx = \int_a^b (g(x))' dx = g(b) - g(a)$$

$$\text{Αν } \Delta g(n) = f(n) \text{ τότε } \sum_{k=a}^b f(k) = g(b+1) - g(a).$$

## Άσκηση 6

Να βρεθεί η τιμή του αθροίσματος

$$S_n = 1 \cdot 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot 4 + \dots + (n-1)n(n+1) + n(n+1)(n+2).$$

(1ος τρόπος)

**Ιδέα:** Αν  $\Delta g(n) = f(n)$  τότε  $\sum_{k=a}^b f(k) = g(b+1) - g(a)$ .

$$S_n = \sum_{k=1}^n k(k+1)(k+2)$$

Ψάχνουμε μια συνάρτηση  $g(n)$  (εδώ η συνάρτηση είναι πολυώνυμο) τέτοια ώστε  $\Delta g(n) = n(n+1)(n+2)$ .

Θα εκφράσουμε την συνάρτηση  $n(n+1)(n+2)$  ως άθροισμα παραγοντικών πολυωνύμων.

$$n(n+1)(n+2) = n^3 + 3n^2 + 2n$$

$$F_1(n) = n$$

$$F_2(n) = n(n-1) = n^2 - n \Rightarrow n^2 = F_2(n) + n = F_2(n) + F_1(n)$$

$$F_3(n) = n(n-1)(n-2) = n^3 - 3n^2 + 2n \Rightarrow n^3 = F_3(n) + 3n^2 - 2n =$$

$$F_3(n) + 3(F_2(n) + F_1(n)) - 2F_1(n) = F_3(n) + 3F_2(n) + F_1(n)$$

Άρα,

$$n(n+1)(n+2) = n^3 + 3n^2 + 2n =$$

$$F_3(n) + 3F_2(n) + F_1(n) + 3(F_2(n) + F_1(n)) + 2F_1(n) = F_3(n) + 6F_2(n) + 6F_1(n)$$

Χρησιμοποιώντας τον βασικό τύπο:

$$F_k(x) = \frac{\Delta F_{k+1}(x)}{k+1}.$$

έχουμε ότι

$$\begin{aligned} n(n+1)(n+2) &= F_3(n) + 6F_2(n) + 6F_1(n) = \frac{\Delta F_4(n)}{4} + 6\frac{\Delta F_3(n)}{3} + 6\frac{\Delta F_2(n)}{2} \\ &= \Delta \left( \underbrace{\frac{F_4(n)}{4} + 2F_3(n) + 3F_2(n)}_{g(n)} \right) \end{aligned}$$

Συμπέρασμα

$$\begin{aligned} S_n &= g(n+1) - g(1) \\ &= \frac{F_4(n+1)}{4} + 2F_3(n+1) + 3F_2(n+1) - 0 \\ &= \frac{(n+1)n(n-1)(n-2)}{4} + 2(n+1)n(n-1) + 3(n+1)n \end{aligned}$$



(2ος τρόπος)

\* Αν το  $p(x)$  είναι πολυώνυμο του  $x$  βαθμού  $a$ , τότε το  $\Delta p(x)$  είναι πολυώνυμο του  $x$  βαθμού  $a - 1$ .

\* Αν το  $p(x)$  είναι πολυώνυμο του  $x$  βαθμού  $a$ , τότε το  $\sum_{k=0}^n p(k)$  είναι πολυώνυμο του  $n$  βαθμού το πολύ  $a + 1$ .

Επειδή

$$S_n = \sum_{k=0}^n k(k+1)(k+2)$$

όπου  $k(k+1)(k+2)$  είναι πολυώνυμο του  $k$  βαθμού 3 έπεται ότι το  $S_n$  είναι πολυώνυμο  $q(n)$  του  $n$  βαθμού το πολύ 4.

Κάθε πολυώνυμο βαθμού  $n$  προσδιορίζεται μοναδικά αν γνωρίζουμε τις τιμές του σε  $n + 1$  σημεία.

Επομένως, μπορεί να υπολογισθεί αν γνωρίζουμε τουλάχιστον 5 τιμές του.

Εδώ θα χρησιμοποιήσουμε διαδοχικές τιμές και τον τύπο του Gregory.

### Τύπος του Gregory με παραγοντικά πολυώνυμα

Για κάθε πολυώνυμο  $p(x)$  βαθμού  $n$ , ισχύει ότι

$$p(x) = \sum_{k=0}^n \frac{\Delta^k p(0)}{k!} F_k(x).$$

Για  $n = 0$ ,  $S_0 = 0$ .

Για  $n = 1$ ,  $S_1 = S_0 + 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$ .

Για  $n = 2$ ,  $S_2 = S_1 + 2 \cdot 3 \cdot 4 = 6 + 24 = 30$ .

Για  $n = 3$ ,  $S_3 = S_2 + 3 \cdot 4 \cdot 5 = 30 + 60 = 90$ .

Για  $n = 4$ ,  $S_4 = S_3 + 4 \cdot 5 \cdot 6 = 90 + 120 = 210$ .

$x$	$q(x)$	$\Delta q(x)$	$\Delta^2 q(x)$	$\Delta^3 q(x)$	$\Delta^4 q(x)$
4	210				
3	90	120			
2	30	60	60		
1	6	24	36	24	
0	0	6	18	18	6

Άρα,  $q(0) = 0$ ,  $\Delta q(0) = 6$ ,  $\Delta^2 q(0) = 18$ ,  $\Delta^3 q(0) = 18$ ,  $\Delta^4 q(0) = 6$ .

Οπότε από τον τύπο του Gregory είναι:

$$\begin{aligned} S(n) &= \frac{q(0)}{0!} F_0(n) + \frac{\Delta^1 q(0)}{1!} F_1(n) + \frac{\Delta^2 q(0)}{2!} F_2(n) + \frac{\Delta^3 q(0)}{3!} F_3(n) \\ &\quad + \frac{\Delta^4 q(0)}{4!} F_4(n) \\ &= 0 + 6n + \frac{18}{2} n(n-1) + \frac{18}{6} n(n-1)(n-2) \\ &\quad + \frac{6}{24} n(n-1)(n-2)(n-3) \\ &= 6n + 9n(n-1) + 3n(n-1)(n-2) + \frac{1}{4} n(n-1)(n-2)(n-3). \end{aligned}$$

## Άσκηση 7

Να δειχθεί ότι για κάθε  $n \in \mathbb{N}$  ισχύει ότι  $\binom{-\frac{1}{2}}{n} = (-4)^{-n} \binom{2n}{n}$ .

$$\begin{aligned}\binom{-\frac{1}{2}}{n} &= \frac{\left(-\frac{1}{2}\right) \left(-\frac{1}{2} - 1\right) \cdots \left(-\frac{1}{2} - n + 1\right)}{n!} \\ &= (-1)^n \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{5}{2} \cdots \frac{2n-1}{2}}{n!} \\ &= (-1)^n \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2^n n!} \\ &= (-1)^n \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1) \cdot 2^n n!}{2^n n! \cdot 2^n n!} \\ &= (-1)^n \frac{(2n)!}{4^n n! n!} = (-4)^{-n} \binom{2n}{n}.\end{aligned}$$