1η ΔΙΑΛΕΞΗ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΛΟΓΙΚΗ

- **Εισαγωγή στην προτασιακή λογική**
- **Γλώσσα του προτασιακού λογισμού**
  - **Τυπική γλώσσα του προτασιακού λογισμού**
  - **Έλεγχος για προτάσεις**
  - **Προτεραιότητα συνδέσμων**

Εισαγωγή στην προτασιακή λογική

Περιεχόμενα ενότητας:

- Γλώσσα του προτασιακού λογισμού
- Τιμές αληθείας, Εκτιμήσεις, Πίνακες αληθείας, Μοντέλα, Ικανοποιησιμότητα, Ταυτολογίες, Λογικό συμπέρασμα, Λογική ισοδυναμία.
- Κανονικές μορφές, Προβλήματα ικανοποιησιμότητας
- Αξιώματα, Κανόνες παραγωγής, Αποδείξεις, Συνέπεια, Θεωρήματα, Λογική συνέπεια, Ορθότητα, Πληρότητα
- Αρχή της απόφασης
- Δένδρα αληθείας

Εισαγωγή στην προτασιακή λογική

Αριστοτέλης: ``Σχήματα'' συλλογισμών

Π.χ.: Όλοι οι άνθρωποι είναι θνητοί.
Ο Σωκράτης είναι άνθρωπος.
Άρα ο Σωκράτης είναι θνητός.

Η αλήθεια του παραπάνω συλλογισμού δεν εξαρτάται από το υποκείμενο (Σωκράτης), ή από το κατηγόρημα (θνητός). Γενικά, το ``σχήμα'' αυτό είναι σωστό:

Κάθε Μ είναι Κ
Το Υ είναι Μ
Άρα το Υ είναι Κ

ή σε γραφή που ``ταιριάζει'' με τη Λογική:

Αν p τότε q
p
Άρα q

Εισαγωγή στην προτασιακή λογική

Αριστοτέλειες αρχές (αξιώματα)

- **Αρχή της ταυτότητας**: Κάθε πράγμα ταυτίζεται με τον εαυτό του.
- **Αρχή της απόκλεισης του τρίτου ενδεχόμενου**: Κάθε πράγμα ή έχει την ιδιότητα Α, ή δεν την έχει. Δεν υπάρχει τρίτη δυνατότητα.

Τα παραπάνω αποτελούν την αφετηρία της **δίτιμης μαθηματικής λογικής**.

Στη σύγχρονη εποχή αναπτύσσεται πάντως και η **πλειονότιμη** (ασαφής) λογική (με εφαρμογές στην τεχνολογία και την τεχνητή νοημοσύνη).

Στα Μαθηματικά, οι βασικές αρχές παραμένουν σταθερές - εκφράζονται ικανοποιητικά από την Αριστοτέλεια Λογική.

Leibniz, Boole (μέσα 19ου αιώνα).

Peano, Russell - Θεωρία συνόλων (τέλη 19ου αιώνα, αρχές 20ου αιώνα).

Hilbert, Gödel - Σύγχρονη Μαθηματική Λογική (20ος αιώνας).

Μαθηματική (ή συμβολική) Λογική

Χρησιμοποιεί μαθηματικές μεθόδους. Είναι μέρος των Μαθηματικών: Θεωρία συνόλων, μοντέλων, αποδείξεων, αναδρομής κ.λπ.

- **Γλώσσα της Μαθηματικής Λογικής**:
  Ένα καθορισμένο σύνολο συμβόλων.
- **Μεταγλώσσα**:
  Η κοινή (π.χ. η ελληνική) γλώσσα και κάποια σύμβολα (σαφώς διαφορετικά από εκείνα της γλώσσας της λογικής).

Εισαγωγή στην προτασιακή λογική

Μελέτη προτάσεων:

- Πρώτο επίπεδο: **Προτασιακός λογισμός (Propositional calculus)**.
- Δεύτερο (πιο πολύπλοκο) επίπεδο: **Κατηγορικός (ή κατηγορηματικός) λογισμός (Predicate calculus)**.
  Αυτός προσφέρει μεγαλύτερες δυνατότητες έκφρασης και συμπερασματολογίας.

Για παράδειγμα, στον προτασιακό λογισμό:

p: Υπάρχουν άπειροι πρώτοι αριθμοί,

q: Υπάρχει πρώτος αριθμός μεγαλύτερος του 10^{10}.

Στον κατηγορικό λογισμό:

$$\begin{aligned} p: &\quad (\forall x)(\exists y)(y > x \wedge \Pi(y)), \\ q: &\quad (\exists y)(y > 10^{10} \wedge \Pi(y)). \end{aligned}$$

όπου $\Pi(y)$ είναι το κατηγόρημα ότι ο y είναι πρώτος.

Εισαγωγή στην προτασιακή λογική

Στην μαθηματική λογική υπάρχουν:

- **Σημασιολογικές έννοιες**:
  Έχουν σχέση με τη ‘‘σημασία’’ (αλήθεια ή ψεύδος) των προτάσεων.
- **Συντακτικές έννοιες**:
  Έχουν σχέση με τη ‘‘σύνταξη’’ (τη συμβολική γραφή) των προτάσεων, το μηχανικό τρόπο παραγωγής προτάσεων από άλλες (αξίωμα, απόδειξη, κανόνες παραγωγής κ.λπ.).

Υπάρχει αντιστοιχία μεταξύ των παραπάνω δύο εννοιών.
Κατά συνέπεια, υπάρχουν δύο τρόποι αντιμετώπισης των προβλημάτων:
Θεωρία μοντέλων - **Θεωρία αποδείξεων**.

Γλώσσα του προτασιακού λογισμού

Στον προφορικό και στο γραπτό λόγο σχηματίζουμε (χρησιμοποιώντας λέξεις, και με βάση κανόνες του συντακτικού) γλωσσικές οντότητες με αυτοτελές νόημα, τις φράσεις.

Π.χ.:	Σου εύχομαι χρόνια πολλά.	(Ευχή)
	Πόσων χρόνων είσαι;	(Ερώτηση)
	Είμαι 55 χρόνων.	(Διαπίστωση)

Η λογική ασχολείται μόνο με αποφαντικές φράσεις (δηλαδή φράσεις που εκφράζουν διαπιστώσεις), οι οποίες λέγονται προτάσεις.

Π.χ.: Ο αριθμός 10 είναι άρτιος.
Ο Α είναι συμφοιτητής του Β.
$2 + 5 = 7$.
$4 + 4 = 10$.

Οι προτάσεις δέχονται **τιμή αληθείας** (αληθής, ψευδής).

Γλώσσα του προτασιακού λογισμού

Προσπαθούμε να βρούμε

- ένα ελάχιστο σύνολο προτάσεων (από τις οποίες μπορούμε να συνθέσουμε τις υπόλοιπες),
- καθώς επίσης και τους βασικούς κανόνες σύνθεσης.

Υπάρχουν λοιπόν κάποιες προτάσεις που δεν μπορούν να διασπαστούν σε απλούστερες υποπροτάσεις. Αυτές λέγονται **απλές προτάσεις** (ή **ατομικές**, ή **άτομα**). Για παράδειγμα:

Ο αριθμός 7 είναι πρώτος.
Κάθε φοιτητής ξέρει σκάκι.
Η κόρη μου είναι μεγαλύτερη από το γιό μου.

Αντίθετα, η πρόταση

$$\text{Αν ο } x \text{ είναι άρτιος, τότε ο } x+3 \text{ είναι περιττός}$$

αναλύεται σε (απλές) υποπροτάσεις: ‘‘Ο x είναι άρτιος’’ και ‘‘Ο $x+3$ είναι περιττός’’. Άρα, δεν είναι άτομο αλλά **σύνθετη πρόταση**.

Γλώσσα του προτασιακού λογισμού

Χρησιμοποιούμε τους εξής συνδέσμους για να συνθέσουμε μια πρόταση (χρησιμοποιώντας άτομα):

και, ή, όχι, αν ... τότε, αν και μόνο αν.

Για να ``τυποποιήσουμε'' λοιπόν τη λογική των προτάσεων, αρκεί να εισάγουμε σύμβολα

- για τις απλές προτάσεις,
- για τους παραπάνω συνδέσμους.

Τα σύμβολα αυτά (και μερικά άλλα, βοηθητικά) αποτελούν μια Τυπική Γλώσσα (formal language) του Προτασιακού Λογισμού (σε αντίθεση με τις φυσικές γλώσσες).

Γλώσσα του προτασιακού λογισμού

Ορισμός

Μια ***τυπική γλώσσα*** L ***του Προτασιακού Λογισμού*** *αποτελείται από:*

1. *Τα σύμβολα των ατόμων:* $p_1, p_2, p_3, \ldots$ *(αριθμήσιμα σε πλήθος).*
2. *Τα σύμβολα των συνδέσμων:*

$\wedge$:	*και*	*(σύζευξη)*
$\vee$:	*ή*	*(διάζευξη)*
$\neg$:	*όχι*	*(άρνηση)*
$\rightarrow$:	*αν ... τότε*	*(συνεπαγωγή)*
$\leftrightarrow$:	*αν και μόνο αν*	*(ισοδυναμία)*

3. *Τις παρενθέσεις: (,).*

Γλώσσα του προτασιακού λογισμού

Έκφραση λέγεται κάθε πεπερασμένη ακολουθία συμβόλων της L.

$$\text{Π.χ.:}\quad \begin{array}{l} (p_1 \wedge p_5)\neg(p_1 \wedge p_2), \\ \neg(p_1 \wedge p_2) \leftrightarrow (\neg p_1 \vee \neg p_2), \\ p_1(p_2(p_3(p_4))). \end{array}$$

Προτάσεις της L είναι εκφράσεις που κατασκευάζονται βάσει κάποιων συγκεκριμένων κανόνων (**κανόνες σχηματισμού**) που δίδονται σε επόμενο ορισμό:

Γλώσσα του προτασιακού λογισμού

Προκειμένου να περιγράψουμε τις προτάσεις της γλώσσας L είναι πολύ χρήσιμος και ο παρακάτω συμβολισμός:

Ονομάζουμε **προτασιακές μεταβλητές** τα σύμβολα

$$\varphi, \psi, \sigma, y, w, z, \dots, \varphi_1, \varphi_2, \dots$$

με τα οποία συμβολίζουμε, χάριν απλούστευσης και συντομίας, τυχαίες προτάσεις.
Τονίζουμε πάντως ότι τα σύμβολα αυτά *δεν είναι* στοιχεία της τυπικής γλώσσας L.
Μπορούμε να χρησιμοποιούμε προτασιακές μεταβλητές

$$p, q, r, \dots, q_1, \dots$$

(αντί για $p_1, p_2, \dots$) και για τα άτομα.

Γλώσσα του προτασιακού λογισμού

Ορισμός

- *Τα* $p_i, i \in \mathbb{N}^*$, *είναι προτάσεις.*
- *Αν οι* φ, y *είναι προτάσεις, τότε και οι εκφράσεις*

$$(\varphi) \land (y), \quad (\varphi) \lor (y), \quad (\varphi) \to (y), \quad (\varphi) \leftrightarrow (y), \quad \neg(\varphi)$$

  είναι προτάσεις.
- *Δεν υπάρχουν άλλες προτάσεις.*

Συμβολισμοί

$\mathbf{P}_0 = \{p_1, p_2, p_3, \ldots\}$ (δηλαδή το σύνολο των ατόμων της L).
$\mathbf{P}$: το σύνολο όλων των προτάσεων της L.

Γλώσσα του προτασιακού λογισμού

Έλεγχος για προτάσεις

- Αν η έκφραση ε δεν έχει μια από τις μορφές:

$$p_i, \quad (\varphi) \wedge (y), \quad (\varphi) \vee (y), \quad (\varphi) \to (y), \quad (\varphi) \leftrightarrow (y), \quad \neg(\varphi)$$

  τότε δεν είναι πρόταση.
- Αν έχει μια από τις παραπάνω μορφές, ελέγχουμε ομοίως τις φ, y.

Παράδειγμα

Οι εκφράσεις

$$(\neg(p_1)) \vee (p_2), \quad ((p_1) \to (p_2)) \vee ((p_3) \wedge ((p_4) \to (p_5)))$$

είναι προτάσεις, ενώ οι εκφράσεις

$$((p_1) \wedge (p_2)) \to ((p_3)\neg(p_4)), \quad (p_2) \wedge (\to ((p_1) \wedge (p_1)))$$

δεν είναι προτάσεις.

Η σημασία των παρενθέσεων

Οι προτάσεις $(p_1 \vee p_2) \wedge p_3$ και $p_1 \vee (p_2 \wedge p_3)$ είναι διαφορετικές.

Π.χ.:	p_1 :	Ο αριθμός 5 είναι περιττός.
	p_2 :	Ο αριθμός 5 είναι άρτιος.
	p_3 :	Ο αριθμός 5 είναι μικρότερος από το 4.

Τότε, η πρόταση $(p_1 \vee p_2) \wedge p_3$ είναι ψευδής, ενώ η πρόταση $p_1 \vee (p_2 \wedge p_3)$ είναι αληθής.

Γλώσσα του προτασιακού λογισμού

Προτεραιότητα συνδέσμων

1. Ο $\neg$ έχει προτεραιότητα εφαρμογής έναντι όλων των άλλων συνδέσμων.
2. Οι $\wedge, \vee$ έχουν προτεραιότητα εφαρμογής έναντι των $\rightarrow, \leftrightarrow$.
3. Οι $\wedge, \vee$ έχουν ίση προτεραιότητα μεταξύ τους.
4. Οι $\rightarrow, \leftrightarrow$ έχουν ίση προτεραιότητα μεταξύ τους.

Τέλος, μπορούμε να παραλείψουμε το ζεύγος των παρενθέσεων που περιλαμβάνουν ένα άτομο.

Έτσι, για παράδειγμα, γράφουμε:

- p_i αντί για (p_i),
- $\neg\varphi \vee y$ αντί για $(\neg\varphi) \vee y$,
- $\varphi \rightarrow \psi \wedge \sigma$ αντί για $\varphi \rightarrow (\psi \wedge \sigma)$,
- $\neg\neg p_1 \rightarrow (p_2 \wedge p_3 \leftrightarrow p_4 \vee p_5)$ αντί για $(\neg(\neg p_1)) \rightarrow ((p_2 \wedge p_3) \leftrightarrow (p_4 \vee p_5))$.

Γλώσσα του προτασιακού λογισμού

Παρατήρηση: Το (μοναδικό) ζεύγος παρενθέσεων στην πρώτη γραφή της πρότασης του τελευταίου παραδείγματος δεν μπορούμε να το παραλείψουμε, αφού δεν μπορούμε να διακρίνουμε αν η έκφραση

$$\neg\neg p_1 \rightarrow p_2 \wedge p_3 \leftrightarrow p_4 \vee p_5$$

είναι η πρόταση

$$(\neg\neg p_1 \rightarrow p_2 \wedge p_3) \leftrightarrow p_4 \vee p_5$$

ή η πρόταση

$$\neg\neg p_1 \rightarrow (p_2 \wedge p_3 \leftrightarrow p_4 \vee p_5).$$

Ομοίως, δεν μπορούμε να παραλείψουμε τις παρενθέσεις της πρότασης

$$(p_1 \vee p_2) \wedge p_3,$$

αφού η $p_1 \vee p_2 \wedge p_3$ δεν είναι σαφές αν είναι η $(p_1 \vee p_2) \wedge p_3$, ή η $p_1 \vee (p_2 \wedge p_3)$.

Παρατήρηση: Οι σύνδεσμοι μπορούν να θεωρηθούν ως (εσωτερικές) πράξεις στο σύνολο E των εκφράσεων της L: Οι σύνδεσμοι $\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$ θεωρούνται διμελείς πράξεις, ενώ ο $\neg$ μονομελής.
Πράγματι, για κάθε ζεύγος $(\varphi, y) \in E \times E$, οι εκφράσεις

$$\varphi \wedge y, \quad \varphi \vee y, \quad \varphi \rightarrow y, \quad \varphi \leftrightarrow y, \quad \neg\varphi$$

είναι εκφράσεις του E. Μπορούμε λοιπόν να θεωρήσουμε ότι το P είναι το ελάχιστο σύνολο που περιέχει το P_0 και είναι κλειστό ως προς τις πράξεις $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$, $\neg$.

2η ΔΙΑΛΕΞΗ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΛΟΓΙΚΗ

- **Τιμές αληθείας**
- **Εκτίμηση**
- **Μοντέλα**
- **Πίνακες αληθείας**
- **Ικανοποιησιμότητα**
- **Ταυτολογίες**
- **Λογικό συμπέρασμα**
- **Λογική ισοδυναμία**

Τιμές αληθείας, εκτίμηση, λογικό συμπέρασμα

Κάθε πρόταση $\varphi \in P$ έχει μια **τιμή αληθείας** και είναι

- ή **αληθής** (A ή α ή 1 ή T)
- ή **ψευδής** (Ψ ή ψ ή 0 ή F).

Όμως υπάρχουν κάποιοι κανόνες δεν μπορεί για παράδειγμα οι προτάσεις φ και $\neg\varphi$ να είναι ταυτόχρονα αληθείς.
Η τιμή αληθείας μια πρότασης καθορίζεται με βάση την τιμή αληθείας των ατόμων που περιέχει. Συγκεκριμένα:

Τιμές αληθείας, εκτίμηση, λογικό συμπέρασμα

Η απονομή μιας τιμής αληθείας σε μια πρόταση λέγεται **εκτίμηση** (valuation), δηλαδή, η εκτίμηση είναι μια απεικόνιση $v : P \mapsto \{0, 1\}$. Η εκτίμηση v ορίζεται (χωρίς περιορισμούς) στο σύνολο των ατόμων P_0 και επεκτείνεται στο σύνολο των προτάσεων P μέσω των επόμενων κανόνων:

φ	y	$\varphi \land y$
1	**1**	**1**
1	0	0
0	1	0
0	0	0

φ	y	$\varphi \lor y$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	**0**	**0**

φ	y	$\varphi \rightarrow y$
1	1	1
1	**0**	**0**
0	1	1
0	0	1

φ	y	$\varphi \leftrightarrow y$
1	**1**	**1**
1	0	0
0	1	0
0	**0**	**1**

φ	$\neg\varphi$
1	0
0	1

Τιμές αληθείας, εκτίμηση, λογικό συμπέρασμα

Παράδειγμα
Έστω $\varphi = (p_1 \vee p_2) \vee (p_3 \to p_2)$.
Αν θεωρήσουμε $v(p_1) = 1$, $v(p_2) = 0$, $v(p_3) = 0$, τότε $v(p_1 \vee p_2) = 1$ και $v(p_3 \to p_2) = 1$, οπότε $v(\varphi) = 1$.
Αν θεωρήσουμε $v(p_1) = 1$, $v(p_2) = 0$, $v(p_3) = 1$, τότε $v(p_1 \vee p_2) = 1$ και $v(p_3 \to p_2) = 0$, οπότε $v(\varphi) = 1$, κ.ο.κ.

Παρατήρηση: Δηλαδή, με βάση τους παραπάνω κανόνες για τους 5 συνδέσμους, μπορούμε να βρούμε την τιμή αληθείας οποιασδήποτε πρότασης φ, αρκεί να έχουμε δώσει τιμή αληθείας σε κάθε άτομο (που περιέχεται στη φ)

Για να καλύψουμε όλες τις περιπτώσεις, συνήθως δημιουργούμε **πίνακες αληθείας** με 2^n γραμμές, (όπου n είναι το πλήθος των ατόμων της φ). Συχνά γράφουμε A, Ψ αντί για 1, 0 αντίστοιχα.

Παραδείγματα

- Να γραφεί ο πίνακας αληθείας της πρότασης $\varphi_1 = (p \to q) \lor \neg(p \leftrightarrow \neg q)$.

p	q	$p \to q$	$\neg q$	$p \leftrightarrow \neg q$	$\neg(p \leftrightarrow \neg q)$	φ_1
1	1	1	0	0	1	1
1	0	0	1	1	0	0
0	1	1	0	1	0	1
0	0	1	1	0	1	1

Τιμές αληθείας, εκτίμηση, λογικό συμπέρασμα

- Ομοίως για τη $\varphi_2 = (p \wedge q) \vee (r \rightarrow \neg p)$.

p	q	r	$p \wedge q$	$\neg p$	$r \rightarrow \neg p$	φ_2
A	A	A	A	Ψ	Ψ	A
A	A	Ψ	A	Ψ	A	A
A	Ψ	A	Ψ	Ψ	Ψ	Ψ
A	Ψ	Ψ	Ψ	Ψ	A	A
Ψ	A	A	Ψ	A	A	A
Ψ	A	Ψ	Ψ	A	A	A
Ψ	Ψ	A	Ψ	A	A	A
Ψ	Ψ	Ψ	Ψ	A	A	A

- Ομοίως για τη $\varphi_3 = \neg(p \wedge q) \leftrightarrow \neg p \vee \neg q$.

p	q	$p \wedge q$	$\neg(p \wedge q)$	$\neg p$	$\neg q$	$\neg p \vee \neg q$	φ_3
A	A	A	Ψ	Ψ	Ψ	Ψ	A
A	Ψ	Ψ	A	Ψ	A	A	A
Ψ	A	Ψ	A	A	Ψ	A	A
Ψ	Ψ	Ψ	A	A	A	A	A

Άσκηση 1

Έστω 5 κάρτες, οι οποίες περιέχουν από τη μία πλευρά έναν αριθμό και από την άλλη πλευρά ένα γράμμα.

A	K	5	6	7

Ποιές κάρτες πρέπει να γυρίσουμε για να ελέγξουμε αν αληθεύει η πρόταση
S: Αν η κάρτα έχει φωνήεν στην μια πλευρά τότε έχει άρτιο αριθμό στην άλλη πλευρά.

Λύση: Αρκεί να γυρίσουμε τις κάρτες: Α, 5 και 7.
Έχουμε τις εξής περιπτώσεις:

Γράμμα	Ψηφίο	S
Φωνήεν	Άρτιος	Αληθής
Φωνήεν	Περιττός	Ψευδής
Σύμφωνο	Άρτιος	Αληθής
Σύμφωνο	Περιττός	Αληθής

Η περίπτωση όπου η S είναι ψευδής είναι μόνο όταν έχουμε φωνήεν μαζί με περιττό.
Άρα γυρίζω μόνο αυτές στις οποίες βλέπουμε στην πάνω πλευρά ή φωνήεν ή περιττό.

Τιμές αληθείας, εκτίμηση, λογικό συμπέρασμα

Ορισμός

- *Έστω* $\varphi \in P$.
  Αν $v(\varphi) = 1$, *λέμε ότι η* v ***ικανοποιεί*** *ή* ***επαληθεύει*** *την* φ *ή ότι η* v ***είναι μοντέλο*** *της* φ *και γράφουμε* $\boldsymbol{v} \models \varphi$.
  (*Γράφουμε* $\boldsymbol{v} \not\models \varphi$ *όταν* $v(\varphi) = 0$.)
- *Αν τώρα* $\Sigma \subseteq P$ *και* $v \models \varphi$, *για κάθε* $\varphi \in \Sigma$, *τότε λέμε ότι η* v ***ικανοποιεί*** *ή* ***επαληθεύει το*** $\boldsymbol{\Sigma}$ *ή ότι η* v ***είναι μοντέλο του*** $\boldsymbol{\Sigma}$ *και γράφουμε* $\boldsymbol{v} \models \boldsymbol{\Sigma}$.
- *Το* $\Sigma \subseteq P$ *λέγεται* ***ικανοποιήσιμο*** *όταν υπάρχει (τουλάχιστον μια) εκτίμηση* v *τέτοια ώστε* $v \models \Sigma$, *(δηλαδή, αν έχει τουλάχιστον ένα μοντέλο). Αν το* Σ *δεν είναι ικανοποιήσιμο (δηλαδή όταν δεν υπάρχει εκτίμηση* v *τέτοια ώστε* $v \models \Sigma$*) τότε ονομάζεται* ***μη ικανοποιήσιμο*** *ή* ***αντιφατικό***.

Τιμές αληθείας, εκτίμηση, λογικό συμπέρασμα

Παραδείγματα

- Η εκτίμηση v με $v(p) = 0$ και $v(q) = 1$ ικανοποιεί τη φ_1 του προηγούμενου παραδείγματος 1, δηλαδή $v \models \varphi_1$.
  $\varphi_1 = (p \to q) \vee \neg(p \leftrightarrow \neg q)$.

p	q	$p \to q$	$\neg q$	$p \leftrightarrow \neg q$	$\neg(p \leftrightarrow \neg q)$	φ_1
1	1	1	0	0	1	1
1	0	0	1	1	0	0
0	1	1	0	1	0	1
0	0	1	1	0	1	1

Τιμές αληθείας, εκτίμηση, λογικό συμπέρασμα

Παραδείγματα

- Για τη v με $v(p) = 0$ και $v(q) = v(r) = 1$ έχουμε $v \models \varphi_2$ για το παράδειγμα 2.
- Για τη v με $v(q) = 0$ και $v(p) = v(r) = 1$ έχουμε $v \not\models \varphi_2$ για το παράδειγμα 2.
  $\varphi_2 = (p \wedge q) \vee (r \to \neg p)$.

p	q	r	$p \wedge q$	$\neg p$	$r \to \neg p$	φ_2
A	A	A	A	Ψ	Ψ	A
A	A	Ψ	A	Ψ	A	A
A	Ψ	A	Ψ	Ψ	Ψ	Ψ
A	Ψ	Ψ	Ψ	Ψ	A	A
Ψ	A	A	Ψ	A	A	A
Ψ	A	Ψ	Ψ	A	A	A
Ψ	Ψ	A	Ψ	A	A	A
Ψ	Ψ	Ψ	Ψ	A	A	A

Παραδείγματα

- Αν τώρα $\Sigma = \{\varphi_2, \varphi_3\} \subseteq P$, έχουμε ότι για τη v με $v(p) = 0$, $v(q) = v(r) = 1$ ισχύει ότι $v \models \Sigma$, δηλαδή η v αυτή είναι ένα μοντέλο του Σ (και άρα το Σ αυτό είναι ικανοποιήσιμο).

  $\varphi_2 = (p \wedge q) \vee (r \to \neg p)$.

p	q	r	$p \wedge q$	$\neg p$	$r \to \neg p$	φ_2
A	A	A	A	Ψ	Ψ	A
A	A	Ψ	A	Ψ	A	A
A	Ψ	A	Ψ	Ψ	Ψ	Ψ
A	Ψ	Ψ	Ψ	Ψ	A	A
Ψ	A	A	Ψ	A	A	A
Ψ	A	Ψ	Ψ	A	A	A
Ψ	Ψ	A	Ψ	A	A	A
Ψ	Ψ	Ψ	Ψ	A	A	A

$\varphi_3 = \neg(p \wedge q) \leftrightarrow \neg p \vee \neg q$.

p	q	$p \wedge q$	$\neg(p \wedge q)$	$\neg p$	$\neg q$	$\neg p \vee \neg q$	φ_3
A	A	A	Ψ	Ψ	Ψ	Ψ	A
A	Ψ	Ψ	A	Ψ	A	A	A
Ψ	A	Ψ	A	A	Ψ	A	A
Ψ	Ψ	Ψ	A	A	A	A	A

Τιμές αληθείας, εκτίμηση, λογικό συμπέρασμα

Ορισμός

- *Μια πρόταση* φ *λέγεται* ***ταυτολογία*** *αν* $v \models \varphi$ *για κάθε* v *και τότε γράφουμε* $\models \varphi$.
- *Η* φ *λέγεται* ***αντίφαση*** *ή* ***αντιλογία*** *αν* $v \not\models \varphi$ *για κάθε* v.

Παραδείγματα

- Η φ_3 του προηγούμενου παραδείγματος είναι μια ταυτολογία (ταυτότητα De Morgan).
  $\varphi_3 = \neg(p \wedge q) \leftrightarrow \neg p \vee \neg q$.

p	q	$p \wedge q$	$\neg(p \wedge q)$	$\neg p$	$\neg q$	$\neg p \vee \neg q$	φ_3
A	A	A	Ψ	Ψ	Ψ	Ψ	A
A	Ψ	Ψ	A	Ψ	A	A	A
Ψ	A	Ψ	A	A	Ψ	A	A
Ψ	Ψ	Ψ	A	A	A	A	A

- Η $\varphi = p \wedge q \leftrightarrow \neg p \vee \neg q$ είναι αντίφαση, όπως φαίνεται και από τον πίνακα αληθείας της:

p	q	$p \wedge q$	$\neg p$	$\neg q$	$\neg p \vee \neg q$	φ
1	1	1	0	0	0	0
1	0	0	0	1	1	0
0	1	0	1	0	1	0
0	0	0	1	1	1	0

Τιμές αληθείας, εκτίμηση, λογικό συμπέρασμα

Παραδείγματα Περισσότερα παραδείγματα ταυτολογιών (έλεγχος με πίνακες αληθείας - Άσκηση):

$$\varphi \to \neg\neg\varphi, \quad \varphi \wedge y \to \varphi, \quad \varphi \to \varphi \vee y, \quad \varphi \to \varphi, \quad \varphi \vee \neg\varphi$$

κ.τ.λ.

Ορισμός

Έστω $\varphi \in P$, $\Sigma \subseteq P$.
Η φ *λέγεται* ***λογικό συμπέρασμα του*** Σ, *αν κάθε μοντέλο του* Σ *είναι και μοντέλο της* φ, *(δηλαδή για κάθε εκτίμηση* v, *αν* $v \models \Sigma$ *τότε* $v \models \varphi$*).*
Γράφουμε τότε $\boldsymbol{\Sigma \models \varphi}$.
Αν $\Sigma = \{y\}$, *γράφουμε* $\boldsymbol{y \models \varphi}$ *αντί* $\{y\} \models \varphi$.

Παρατήρηση: Από τον ορισμό προκύπτει ότι **η** φ **δεν είναι λογικό συμπέρασμα του** Σ ανν υπάρχει μοντέλο του Σ το οποίο δεν είναι μοντέλο της φ. Επομένως, στην περίπτωση όπου το Σ είναι μη ικανοποιήσιμο, έπεται ότι $\Sigma \models \varphi$ για κάθε $\varphi \in P$.

Παραδείγματα

$\varphi \models \varphi, \quad \varphi \wedge y \models \varphi, \quad \varphi \models y \vee \varphi,$
$\{\varphi, \varphi \to y\} \models y$ [1], $\quad \{y \to \varphi, \neg\varphi\} \models \neg y$ [2],
$\{p_1, p_2, p_1 \vee p_3\} \models (p_1 \wedge p_2) \wedge (p_3 \vee \neg p_3)$ [3].

---

[1] Το (μοναδικό) μοντέλο v του $\{\varphi, \varphi \to y\}$ (με $v(\varphi) = v(y) = 1$) είναι και μοντέλο του y (αφού $v(y) = 1$).

[2] Ομοίως για $v(y) = v(\varphi) = 0$.

[3] Τα μοναδικά μοντέλα του $\{p_1, p_2, p_1 \vee p_3\}$ (με $\left\{\begin{matrix} v(p_1) = v(p_2) = 1, v(p_3) = 0 \\ \text{ή } v(p_1) = v(p_2) = v(p_3) = 1 \end{matrix}\right\}$) είναι και μοντέλα της $(p_1 \wedge p_2) \wedge (p_3 \vee \neg p_3)$.

Τιμές αληθείας, εκτίμηση, λογικό συμπέρασμα

Πρόταση 1

$\varphi \models y$ αν και μόνο αν $\models \varphi \to y$.
(Δηλαδή η y είναι λογικό συμπέρασμα της φ, αν και μόνο αν η $\varphi \to y$ είναι ταυτολογία.)

Απόδειξη.

Αρχικά θα αποδείξουμε το ευθύ. Διακρίνουμε 2 περιπτώσεις:

- Αν $v(\varphi) = 0$, τότε $v(\varphi \to y) = 1$.
- Αν $v(\varphi) = 1$, τότε, αφού $\varphi \models y$, έχουμε ότι και $v(y) = 1$, οπότε πάλι $v(\varphi \to y) = 1$.

Άρα πράγματι $\models \varphi \to y$.
Στη συνέχεια θα αποδείξουμε το αντίστροφο. Αφού $\models \varphi \to y$, έχουμε ότι $v(\varphi \to y) = 1$. Αν λοιπόν $v(\varphi) = 1$, τότε πρέπει και $v(y) = 1$. Άρα, πράγματι, $\varphi \models y$. □

Τιμές αληθείας, εκτίμηση, λογικό συμπέρασμα

Ορισμός

*Οι φ, y λέγονται **(λογικά) ισοδύναμες**, αν και μόνο αν $\varphi \models y$ και $y \models \varphi$. Γράφουμε τότε $\varphi \mathrel{\models\!\!\!\dashv} \boldsymbol{y}$.*

Πρόταση 2

$\varphi \mathrel{\models\!\!\!\dashv} y$, αν και μόνο αν $\models \varphi \leftrightarrow y$.

Πρόταση 3 (**Αντικατάσταση**)

Αν σ υποπρόταση της φ και σ' τυχούσα πρόταση, συμβολίζουμε με $\boldsymbol{\varphi[\sigma/\sigma']}$ την έκφραση που προκύπτει αν αντικαταστήσουμε τη σ με τη σ' στη φ. Τότε:

1. *Η $\varphi[\sigma/\sigma']$ είναι πρόταση, και*
2. *Αν $\sigma \mathrel{\models\!\!\!\dashv} \sigma'$ τότε $\varphi \mathrel{\models\!\!\!\dashv} \varphi[\sigma/\sigma']$.*

Τιμές αληθείας, εκτίμηση, λογικό συμπέρασμα

Βασικές Ισοδυναμίες

$$\left\{\begin{array}{c}(\varphi \to y) \mathrel{\models\!\!\!\dashv} (\neg\varphi \vee y)\\ (\varphi \leftrightarrow y) \mathrel{\models\!\!\!\dashv} (\varphi \to y) \wedge (y \to \varphi)\end{array}\right\}$$

('Αρα οι σύνδεσμοι $\to, \leftrightarrow$ δεν είναι απαραίτητοι.)

$$\left\{\begin{array}{c}\neg(\varphi \wedge y) \mathrel{\models\!\!\!\dashv} \neg\varphi \vee \neg y\\ \neg(\varphi \vee y) \mathrel{\models\!\!\!\dashv} \neg\varphi \wedge \neg y\\ \neg(\neg\varphi) \mathrel{\models\!\!\!\dashv} \varphi\end{array}\right\}$$

Κανόνες του De Morgan.

$$\left\{\begin{array}{c}\varphi \wedge (y \wedge \sigma) \mathrel{\models\!\!\!\dashv} (\varphi \wedge y) \wedge \sigma\\ \varphi \vee (y \vee \sigma) \mathrel{\models\!\!\!\dashv} (\varphi \vee y) \vee \sigma\end{array}\right\}$$

Προσεταιριστικότητα [4] των $\wedge, \vee$.

$$\left\{\begin{array}{c}\varphi \wedge y \mathrel{\models\!\!\!\dashv} y \wedge \varphi\\ \varphi \vee y \mathrel{\models\!\!\!\dashv} y \vee \varphi\end{array}\right\}$$

Αντιμεταθετικότητα των $\wedge, \vee$.

$$\left\{\begin{array}{c}\varphi \vee (y \wedge \sigma) \mathrel{\models\!\!\!\dashv} (\varphi \vee y) \wedge (\varphi \vee \sigma)\\ \varphi \wedge (y \vee \sigma) \mathrel{\models\!\!\!\dashv} (\varphi \wedge y) \vee (\varphi \wedge \sigma)\end{array}\right\}$$

Επιμεριστικότητα των $\wedge, \vee$ ως προς τους $\vee, \wedge$ αντίστοιχα.

$$\left\{\begin{array}{l}\text{Αν } \varphi \models y, \text{ τότε } \varphi \wedge y \mathrel{\models\!\!\!\dashv} \varphi\\ \text{Αν } \varphi \models y, \text{ τότε } \varphi \vee y \mathrel{\models\!\!\!\dashv} y\end{array}\right\}$$

Κανόνες απορρόφησης.

[4] Λόγω της προσεταιριστικότητας των $\wedge, \vee$, θα γράφουμε γενικότερα:

$$\bigwedge_{i=1}^{n} \varphi_i = \varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge \cdots \wedge \varphi_n \qquad \text{και} \qquad \bigvee_{i=1}^{n} \varphi_i = \varphi_1 \vee \varphi_2 \vee \cdots \vee \varphi_n.$$

Τιμές αληθείας, εκτίμηση, λογικό συμπέρασμα

Οι αποδείξεις γίνονται εύκολα με πίνακες αληθείας (Άσκηση).
Για παράδειγμα, για την

$$(\varphi \to y) \models\!\!\!\dashv (\neg\varphi \lor y),$$

δηλαδή

$$\models (\varphi \to y) \leftrightarrow (\neg\varphi \lor y),$$

έχουμε:

φ	y	$\varphi \to y$	$\neg\varphi$	$\neg\varphi \lor y$	$(\varphi \to y) \leftrightarrow (\neg\varphi \lor y)$
1	1	1	0	1	1
1	0	0	0	0	1
0	1	1	1	1	1
0	0	1	1	1	1

Άσκηση 2

Έστω η πρόταση

$$\varphi = (p_1 \vee p_2) \vee (p_3 \rightarrow p_1).$$

1. *Να βρεθεί η τιμή αληθείας της πρότασης* φ *όταν* $v(p_1) = 1$, $v(p_2) = 0$ *και* $v(p_3) = 0$.
2. *Να εξετασθεί αν υπάρχει εκτίμηση* v *για την οποία η πρόταση* φ *είναι ψευδής.*

Τιμές αληθείας, εκτίμηση, λογικό συμπέρασμα

Λύση:

1. $v(p_1 \vee p_2) = 1$, διότι $v(p_1) = 1$ και $v(p_2) = 0$.
   $v(p_3 \rightarrow p_2) = 1$, διότι $v(p_3) = v(p_2) = 0$.
   Άρα, $v(\varphi) = 1$, διότι $v(p_1 \vee p_2) = 1$ και $v(p_3 \rightarrow p_2) = 1$.
2. Η φ είναι ψευδής αν και μόνο αν οι προτάσεις $p_1 \vee p_2$ και $p_3 \rightarrow p_2$ είναι ψευδείς.
   $v(p_1 \vee p_2) = 0 \Leftrightarrow v(p_1) = v(p_2) = 0$.
   $v(p_3 \rightarrow p_2) = 0 \Leftrightarrow v(p_3) = 1$ και $v(p_2) = 0$.
   Άρα, η φ είναι ψευδής αν και μόνο αν $v(p_1) = v(p_2) = 0$ και $v(p_3) = 1$.

Άσκηση 3 (Τιμές αληθείας)

Δοθέντος ότι η πρόταση $p \to q$ *είναι ψευδής, να βρεθεί η τιμή αληθείας των προτάσεων*

- $(p \to q) \to r$,
- $p \lor (q \to r)$,
- $q \land (p \lor r)$.

Τιμές αληθείας, εκτίμηση, λογικό συμπέρασμα

Λύση: Επειδή $v(p \to q) = 0$ ισχύει ότι $v(p) = 1$ και $v(q) = 0$.
Άρα,
$v((p \to q) \to r) = 1$ (αφού $v(p \to q) = 0$).
$v(p \vee (q \to r)) = 1$ (αφού $v(p) = 1$).
$v(q \wedge (p \vee r)) = 0$ (αφού $v(q) = 0$).

Άσκηση 4 (Ψευδείς προτάσεις)

Να βρεθούν εκτιμήσεις για τις οποίες οι παρακάτω προτάσεις είναι ψευδείς:

1. $\varphi_1 = (x \vee y \vee z) \rightarrow ((x \vee y) \wedge (x \vee z))$.
2. $\varphi_2 = ((p \rightarrow (q \wedge r)) \rightarrow (\neg q \rightarrow \neg p)) \rightarrow \neg q$.

Λύση:

1. Για να είναι η πρόταση $\varphi_1 = (x \vee y \vee z) \rightarrow ((x \vee y) \wedge (x \vee z))$ ψευδής πρέπει $v((x \vee y \vee z)) = 1$ και $v(((x \vee y) \wedge (x \vee z)) = 0$.
   Αν $v(x) = 1$, τότε $v((x \vee y \vee z)) = v(((x \vee y) \wedge (x \vee z))) = 1$. Άρα, $v(x) = 0$.
   Επομένως, πρέπει ακριβώς ένα από τα y και z να είναι ψευδές (και το άλλο αληθές).
   Άρα, έχουμε δύο εκτιμήσεις για τις οποίες $v(\varphi_1) = 0$:
   - $v(x) = v(y) = 0$ και $v(z) = 1$.
   - $v(x) = v(z) = 0$ και $v(y) = 1$.

2. Για να είναι η πρόταση $\varphi_2 = ((p \to (q \wedge r)) \to (\neg q \to \neg p)) \to \neg q$ ψευδής πρέπει $v((p \to (q \wedge r)) \to (\neg q \to \neg p)) = 1$ και $v(\neg q) = 0$.
   Άρα, $v(q) = 1$.
   Επομένως, $v(\neg q \to \neg p) = 1$ (αφού $v(\neg q) = 0$).
   οπότε και $v((p \to (q \wedge r)) \to (\neg q \to \neg p)) = 1$ (αφού $v(\neg q \to \neg p) = 1$).
   Συνεπώς, έχουμε τέσσερεις εκτιμήσεις για τις οποίες $v(\varphi_2) = 0$:
   - $v(q) = v(p) = v(r) = 1$
   - $v(q) = v(p) = 1,\ v(r) = 0$
   - $v(q) = v(r) = 1,\ v(p) = 0$
   - $v(q) = 1,\ v(p) = v(r) = 0$.

Άσκηση 5

Να εξετασθεί αν η πρόταση

$$\varphi = ((p \to q) \to (q \to r)) \to (p \to r)$$

είναι ταυτολογία ή όχι.

Τιμές αληθείας, εκτίμηση, λογικό συμπέρασμα

Λύση: Θα χρησιμοποιήσουμε την μέθοδο του πίνακα αληθείας. Η πρόταση αυτή περιέχει 3 διαφορετικά άτομα: Τα p, q, r. Άρα, ο πίνακας αληθείας της θα έχει $2^3 = 8$ γραμμές.

p	q	r	$p \to q$	$q \to r$	$(p \to q) \to (q \to r)$	$p \to r$	φ
1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	1	0	0	0	1
1	0	1	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	0	0
0	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	1	0	0	1	1
0	0	1	1	1	1	1	1
0	0	0	1	1	1	1	1

Από τον πίνακα αληθείας προκύπτει ότι η φ δεν είναι ταυτολογία, διότι υπάρχει εκτίμηση v για την οποία $v(\varphi) = 0$: Η εκτίμηση v με $v(p) = 1$ και $v(q) = v(r) = 0$.

Άσκηση 6

Δίδεται η πρόταση

$$\varphi = (p \to q) \to \neg(r \leftrightarrow (p \wedge \neg q)).$$

1. *Να βρεθούν όλα τα μοντέλα της πρότασης* φ.
2. *Να εξετασθεί αν η πρόταση* φ *είναι ταυτολογία ή αντιλογία.*

Τιμές αληθείας, εκτίμηση, λογικό συμπέρασμα

1.

p	q	r	$p \to q$	$p \land \neg q$	$r \leftrightarrow (p \land \neg q)$	$\neg(r \leftrightarrow (p \land \neg q))$	φ
1	1	1	1	0	0	1	1
1	1	0	1	0	1	0	0
1	0	1	0	1	1	0	1
1	0	0	0	1	0	1	1
0	1	1	1	0	0	1	1
0	1	0	1	0	1	0	0
0	0	1	1	0	0	1	1
0	0	0	1	0	1	0	0

Άρα, τα μοντέλα της πρότασης φ είναι οι επόμενες πέντε εκτιμήσεις:

1. $v(p) = v(q) = v(r) = 1$,
2. $v(p) = v(r) = 1$, $v(q) = 0$,
3. $v(p) = 1$, $v(q) = v(r) = 0$,
4. $v(p) = 0$, $v(q) = v(r) = 1$,
5. $v(p) = v(q) = v(r) = 0$

2. Η φ δεν είναι ούτε ταυτολογία, ούτε αντιλογία.

Τιμές αληθείας, εκτίμηση, λογικό συμπέρασμα

Άσκηση 7

Να εξετασθεί αν η πρόταση q είναι λογικό συμπέρασμα του συνόλου Σ, όπου $\Sigma = \{p, p \to q\}$.

Τιμές αληθείας, εκτίμηση, λογικό συμπέρασμα

Λύση: Για να απαντήσουμε στο ερώτημα θα βρούμε όλα τα μοντέλα του Σ και θα ελέγξουμε αν επαληθεύουν την πρόταση q.
Έστω εκτίμηση v που ικανοποιεί το Σ. Πρέπει

$$v(p) = 1 \text{ και } v(p \to q) = 1,$$

επομένως,

$$v(p) = 1 \text{ και } v(q) = 1,$$

δηλαδή

$$v \models \Sigma \text{ αν και μόνο αν } v(p) = v(q) = 1,$$

οπότε

$$v \models q.$$

Άρα, η q είναι λογικό συμπέρασμα του Σ.

Άσκηση 8 (Λογικά συμπεράσματα)

Δίδονται οι προτάσεις $\varphi_1 = p \wedge q$ *και* $\varphi_2 = p \vee q$. *Να εξετασθεί αν η πρόταση* φ_2 *είναι λογικό συμπέρασμα της πρότασης* φ_1 *και το αντίστροφο.*

Τιμές αληθείας, εκτίμηση, λογικό συμπέρασμα

Λύση: Η φ_1 έχει μοναδικό μοντέλο την εκτίμηση v με $v(p) = v(q) = 1$. Η εκτίμηση αυτή επαληθεύει την φ_2, οπότε η φ_2 είναι λογικό συμπέρασμα της φ_1.
Το αντίστροφο δεν ισχύει διότι η εκτίμηση v με $v(p) = 1$ και $v(q) = 0$ είναι μοντέλο της φ_2 (αφού $v(\varphi_2) = 1$) όμως δεν είναι μοντέλο της φ_1 (αφού $v(\varphi_1) = 0$).

Παρατήρηση: Μπορούσαμε να δώσουμε την απάντηση ελέγχοντας αν οι προτάσεις $(p \wedge q) \rightarrow (p \vee q)$ και $(p \vee q) \rightarrow (p \wedge q)$ είναι ταυτολογίες ή όχι, αντίστοιχα.

Τιμές αληθείας, εκτίμηση, λογικό συμπέρασμα

Άσκηση 9

Να βρεθούν, αν υπάρχουν, όλα τα μοντέλα του συνόλου Σ_i, όπου

1. $\Sigma_1 = \{p_1 \to p_2, p_1 \wedge (p_1 \to p_2), p_2 \vee (p_1 \wedge p_2)\}$.
2. $\Sigma_2 = \{p_1 \vee p_2, p_1 \wedge \neg p_3, p_2 \to (p_1 \vee p_3)\}$.
3. $\Sigma_3 = \{p_1 \wedge \neg p_2, p_2 \vee p_3, p_3 \wedge p_4, \neg p_4 \vee \neg p_5, \neg p_5 \vee p_6\}$.

Στη συνέχεια, να εξετασθεί αν κάποια από τις προτάσεις $p_1 \to p_6$ και $p_1 \to p_3$ είναι λογικό συμπέρασμα του συνόλου Σ_3.

Τιμές αληθείας, εκτίμηση, λογικό συμπέρασμα

Λύση

1. Στις προτάσεις του

$$\Sigma_1 = \{p_1 \to p_2, p_1 \wedge (p_1 \to p_2), p_2 \vee (p_1 \wedge p_2)\}$$

εμφανίζονται 2 διαφορετικά άτομα: τα p_1, p_2.
Ο πίνακας αληθείας των προτάσεων του Σ_1 είναι ο εξής:

p_1	p_2	$p_1 \to p_2$	$p_1 \wedge (p_1 \to p_2)$	$p_2 \vee (p_1 \wedge p_2)$
1	1	1	1	1
1	0	0	0	0
0	1	1	0	1
0	0	1	0	0

Από τον πίνακα αληθείας των προτάσεων έπεται ότι το Σ_1 έχει ακριβώς ένα μοντέλο: την εκτίμηση v με $v(p_1) = v(p_2) = 1$.

Τιμές αληθείας, εκτίμηση, λογικό συμπέρασμα

2. Ο πίνακας αληθείας των προτάσεων του

$$\Sigma_2 = \{p_1 \vee p_2, p_1 \wedge \neg p_3, p_2 \to (p_1 \vee p_3)\}$$

είναι ο εξής:

p_1	p_2	p_3	$p_1 \vee p_2$	$p_1 \wedge \neg p_3$	$p_2 \to (p_1 \vee p_3)$
1	1	1	1	0	1
1	1	0	1	1	1
1	0	1	1	0	1
1	0	0	1	1	1
0	1	1	1	0	1
0	1	0	1	0	0
0	0	1	0	0	1
0	0	0	0	0	1

Άρα, το Σ_2 έχει δύο μοντέλα:
1ο μοντέλο: $v(p_1) = v(p_2) = 1$ και $v(p_3) = 0$.
2ο μοντέλο: $v(p_1) = 1$ και $v(p_2) = v(p_3) = 0$.

Τιμές αληθείας, εκτίμηση, λογικό συμπέρασμα

Έστω v ένα μοντέλο του Σ_3, τότε $v(\varphi) = 1$ για κάθε $\varphi \in \Sigma_3$.
Για να μειώσουμε τον αριθμό των περιπτώσεων που πρέπει να εξετάσουμε, αρχίζουμε από τις συζευκτικές προτάσεις.

- $v(p_1 \land \neg p_2) = 1 \Leftrightarrow v(p_1) = 1$ και $v(\neg p_2) = 1 \Leftrightarrow v(p_1) = 1$ και $v(p_2) = 0$.
- $v(p_3 \land p_4) = 0 \Leftrightarrow v(p_3) = 1$ και $v(p_4) = 1$.
- $v(p_2 \lor p_3) = 1$, το οποίο ισχύει αφού $v(p_3) = 1$.
- $v(\neg p_4 \lor \neg p_5) = 1 \Leftrightarrow v(\neg p_5) = 1$ αφού $v(p_4) = 1$. Άρα, $v(p_5) = 0$.
- $v(\neg p_5 \lor p_6) = 1$, το οποίο ισχύει αφού $v(p_5) = 0$. Για το p_6 υπάρχουν 2 επιλογές $v(p_6) = 1$ ή $v(p_6) = 0$.

Άρα, τελικά, για το Σ_3 υπάρχουν 2 ακριβώς μοντέλα:
1ο μοντέλο: $v(p_1) = v(p_3) = v(p_4) = v(p_6) = 1$ και $v(p_2) = v(p_5) = 0$.
2ο μοντέλο: $v(p_1) = v(p_3) = v(p_4) = 1$ και $v(p_2) = v(p_5) = v(p_6) = 0$.

Τιμές αληθείας, εκτίμηση, λογικό συμπέρασμα

Η πρόταση $p_1 \to p_6$ δεν είναι λογικό συμπέρασμα του συνόλου Σ_3 διότι υπάρχει μοντέλο του Σ_3, το οποίο δεν είναι μοντέλο της πρότασης $p_1 \to p_6$. (Το 2ο μοντέλο του Σ_3.)
Η πρόταση $p_1 \to p_3$ είναι λογικό συμπέρασμα του Σ_3, διότι κάθε μοντέλο του Σ_3 είναι και μοντέλο της πρότασης $p_1 \to p_3$.

Άσκηση 10 (Μη ικανοποιήσιμο σύνολο)

Έστω

$$\Sigma = \{\neg(q \to (p \vee r)), (q \to p) \wedge q\}.$$

1. *Να βρεθούν όλα τα μοντέλα του συνόλου* Σ.
2. *Να εξετασθεί αν η πρόταση* $p \to r$ *είναι λογικό συμπέρασμα του* Σ.

Λύση:

1. Για κάθε μοντέλο v του Σ πρέπει να ισχύει
$v(\neg(q \to (p \vee r))) = v((q \to p) \wedge q) = 1$.
Επομένως,
$v(\neg(q \to (p \vee r))) = 1 \Leftrightarrow v(q \to (p \vee r)) = 0 \Leftrightarrow v(q) = 1$ και
$v(p \vee r) = 0$.
Άρα, πρέπει $v(q) = 1$ και $v(p) = v(r) = 0$.
Για την εκτίμηση αυτή έχουμε $v((q \to p) \wedge q) = 0$.
Άρα, το Σ είναι μη ικανοποιήσιμο, δηλαδή δεν έχει κανένα μοντέλο.
2. Επειδή το Σ είναι μη ικανοποιήσιμο, έπεται ότι η πρόταση $p \to r$ είναι λογικό συμπέρασμα του Σ.

Άσκηση 11

Να εξετασθεί αν κάποιο από τα παρακάτω ζεύγη προτάσεων είναι λογικά ισοδύναμα:

1. $\neg(p \leftrightarrow q)$, $\neg p \leftrightarrow \neg q$.
2. $p \vee (q \leftrightarrow r)$, $(p \vee q) \leftrightarrow (p \vee r)$.
3. $p \wedge (q \leftrightarrow r)$, $(p \wedge q) \leftrightarrow (p \wedge r)$.

Τιμές αληθείας, εκτίμηση, λογικό συμπέρασμα

Λύση:

1.

p	q	$p \leftrightarrow q$	$\neg(p \leftrightarrow q)$	$\neg p$	$\neg q$	$\neg p \leftrightarrow \neg q$
1	1	1	0	0	0	1
1	0	0	1	0	1	0
0	1	0	1	1	0	0
0	0	1	0	1	1	1

Άρα, οι προτάσεις $\neg(p \leftrightarrow q)$ και $\neg p \leftrightarrow \neg q$ **δεν** είναι λογικά ισοδύναμες. Στην πραγματικότητα η πρόταση $\neg p \leftrightarrow \neg q$ είναι λογικά ισοδύναμη με την $p \leftrightarrow q$.

Τιμές αληθείας, εκτίμηση, λογικό συμπέρασμα

2.

p	q	r	$q \leftrightarrow r$	$p \vee (q \leftrightarrow r)$	$p \vee q$	$p \vee r$	$(p \vee q) \leftrightarrow (p \vee r)$
1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	0	1	1	1	1
1	0	1	0	1	1	1	1
1	0	0	1	1	1	1	1
0	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	0	1	0	0
0	0	1	0	0	0	1	0
0	0	0	1	1	0	0	1

Άρα, οι προτάσεις $p \vee (q \leftrightarrow r)$, $(p \vee q) \leftrightarrow (p \vee r)$ είναι λογικά ισοδύναμες.

3.

p	q	r	$q \leftrightarrow r$	$p \wedge (q \leftrightarrow r)$	$p \wedge q$	$p \wedge r$	$(p \wedge q) \leftrightarrow (p \wedge r)$
1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	0	0	1	0	0
1	0	1	0	0	0	1	0
1	0	0	1	1	0	0	1
0	1	1	1	0	0	0	1
0	1	0	0	0	0	0	1
0	0	1	0	0	0	0	1
0	0	0	1	0	0	0	1

Άρα, οι προτάσεις $p \wedge (q \leftrightarrow r)$, $(p \wedge q) \leftrightarrow (p \wedge r)$ **δεν** είναι λογικά ισοδύναμες.

Άσκηση 12 (Ιδιότητες λογικού συμπεράσματος)

α) *Να δειχθεί ότι αν* $\Sigma \models \varphi$ *ή/και* $\Sigma \models \psi$*, τότε ισχύει ότι* $\Sigma \models \varphi \vee \psi$.

Έστω ότι η $\varphi \vee \psi$ δεν είναι λογικό συμπέρασμα του Σ. Τότε υπάρχει ένα μοντέλο v του Σ το οποίο δεν επαληθεύει την πρόταση $\varphi \vee \psi$, δηλαδή $v(\varphi \vee \psi) = 0 \Rightarrow v(\varphi) = v(\psi) = 0$.
Άρα, ούτε η φ είναι λογικό συμπέρασμα του Σ, ούτε η ψ είναι λογικό συμπέρασμα του Σ, το οποίο είναι άτοπο.
Άρα, η $\varphi \vee \psi$ είναι λογικό συμπέρασμα του Σ.

Άσκηση 13 (Ιδιότητες λογικού συμπεράσματος)

β) *Να δειχθεί ότι δεν ισχύει ότι* $\Sigma \models \varphi \vee \psi \Rightarrow \Sigma \models \varphi$ *ή/και* $\Sigma \models \psi$.

Θα δώσουμε ένα αντιπαράδειγμα που δείχνει ότι δεν ισχύει αυτή η συνεπαγωγή.
Θα βρούμε ένα σύνολο προτάσεων Σ και δύο προτάσεις φ, ψ που έχουν τις εξής ιδιότητες:
Κάθε μοντέλο του Σ να επαληθεύει την $\varphi \vee \psi$.
Υπάρχει ένα μοντέλο του Σ που δεν επαληθεύει την φ.
Υπάρχει ένα (άλλο) του Σ που δεν επαληθεύει την ψ.

Τιμές αληθείας, εκτίμηση, λογικό συμπέρασμα

p	q	Σ	φ	ψ
1	1	1	1	0
1	0	1	0	1
0	1	0	-	-
0	0	0	-	-

Αν επιλέξουμε $\Sigma = \{p \vee q, p \vee \neg q\}$, $\varphi = p \wedge q$ και $\psi = \neg(p \to q)$
τότε ισχύει ότι $\Sigma \models \varphi \vee \psi$,
ενώ δεν ισχύει καμία από τις προτάσεις $\Sigma \models \varphi$ και $\Sigma \models \psi$.

Άσκηση 14

Να εξετασθεί ποιες από τις επόμενες προτάσεις είναι αληθείς ή ψευδείς. (Να αιτιολογηθούν οι απαντήσεις.)

1. *Το σύνολο P είναι ικανοποιήσιμο.*
2. *Το σύνολο P_0 είναι ικανοποιήσιμο.*
3. *Το σύνολο P_0' που περιέχει τις αρνήσεις των ατόμων δεν είναι ικανοποιήσιμο.*
4. *Αν Σ είναι ικανοποιήσιμο, τότε περιέχει μόνο ταυτολογίες.*
5. *Αν Σ_1, Σ_2 είναι ικανοποιήσιμα, τότε το σύνολο $\Sigma_1 \cup \Sigma_2$ είναι ικανοποιήσιμο.*
6. *Αν Σ_1, Σ_2 είναι ικανοποιήσιμα, τότε το σύνολο $\Sigma_1 \cup \Sigma_2$ δεν είναι ικανοποιήσιμο.*

Άσκηση 14 (συνέχεια)

7. *Αν* Σ *είναι ικανοποιήσιμο, τότε το σύνολο* Σ' *που περιέχει τις αρνήσεις όλων των προτάσεων του* Σ *είναι επίσης ικανοποιήσιμο.*
8. *Αν* Σ *είναι ικανοποιήσιμο και* $\Sigma \models \varphi$, *τότε το σύνολο* $\Sigma \cup \{\varphi\}$ *είναι ικανοποιήσιμο.*
9. *Αν* $\Sigma \models \varphi$, *τότε το σύνολο* $\Sigma \cup \{\varphi\}$ *είναι ικανοποιήσιμο.*
10. *Αν* $\Sigma \models (\varphi \wedge \psi)$, *τότε* $\Sigma \models \varphi$ *και* $\Sigma \models \psi$.

Τιμές αληθείας, εκτίμηση, λογικό συμπέρασμα

Λύση:

1. Ψευδής. Το P περιέχει και αντιλογίες.
2. Αληθής. Η εκτίμηση v με $v(p) = 1$ για κάθε $p \in P_0$ είναι μοντέλο του P_0.
3. Ψευδής. Η εκτίμηση v με $v(p) = 0$ για κάθε $p \in P_0$ είναι μοντέλο του P_0'.
4. Ψευδής. Το $\Sigma = \{p\}$ είναι ικανοποιήσιμο, αλλά η πρόταση p δεν είναι ταυτολογία.
5. Ψευδής. Για παράδειγμα, αν $\Sigma_1 = \{p\}$, $\Sigma_2 = \{\neg p\}$, τότε Σ_1, Σ_2 ικανοποιήσιμα, αλλά $\Sigma_1 \cup \Sigma_2$ μη ικανοποιήσιμο.
6. Ψευδής. Για παράδειγμα, αν $\Sigma_1 = \{p\}$, $\Sigma_2 = \{q\}$, τότε Σ_1, Σ_2 ικανοποιήσιμα και $\Sigma_1 \cup \Sigma_2 = \{p, q\}$ είναι επίσης ικανοποιήσιμο.

7. Ψευδής. Για παράδειγμα, αν $\Sigma = \{p \vee \neg p\}$, τότε Σ είναι ικανοποιήσιμο, αλλά $\Sigma' = \{\neg(p \vee \neg p)\}$ είναι μη ικανοποιήσιμο.
8. Αληθής. Αφού Σ είναι ικανοποιήσιμο υπάρχει εκτίμηση v ώστε $v \models \Sigma$. Επίσης, αφού φ είναι λογικό συμπέρασμα του Σ για κάθε εκτίμηση v με $v \models \Sigma$ ισχύει ότι $v \models \varphi$.
   Άρα $v \models \Sigma \cup \{\varphi\}$. Άρα, το σύνολο $\Sigma \cup \{\phi\}$ είναι ικανοποιήσιμο.
9. Ψευδής. Αν το Σ είναι μη ικανοποιήσιμο, τότε $\Sigma \models \varphi$ για κάθε $\varphi \in P$. Όμως, προφανώς, το $\Sigma \cup \{\varphi\}$ είναι μη ικανοποιήσιμο.
10. Αληθής. Έστω $\Sigma \models (\varphi \wedge \psi)$.
   Αν Σ αντιφατικό, τότε $\Sigma \models \varphi$ και $\Sigma \models \psi$.
   Αν Σ ικανοποιήσιμο, τότε για κάθε μοντέλο v του Σ ισχύει ότι $v(\varphi \wedge \psi) = 1$, δηλαδή $v(\varphi) = 1$ και $v(\psi) = 1$, δηλαδή $\Sigma \models \varphi$ και $\Sigma \models \psi$.

Άσκηση 15 (Ταξινόμηση προτάσεων)

Η Μαρία είναι 31 χρονών και πολύ έξυπνη. Είναι πτυχιούχος Ελληνικού πανεπιστημίου. Ως φοιτήτρια ήταν βαθιά προβληματισμένη με τα θέματα των διακρίσεων και της κοινωνικής δικαιοσύνης. Επίσης, συμμετείχε σε κινήματα για την ειρήνη.
Τοποθετήστε, κατά την κρίση σας, τις παρακάτω προτάσεις που αφορούν την Μαρία από την πιο πιθανή εώς την λιγότερο πιθανή.

α. *Η Μαρία είναι ταμίας.*

β. *Η Μαρία εργάζεται σε βιβλιοπωλείο.*

γ. *Η Μαρία είναι δικηγόρος.*

δ. *Η Μαρία είναι δασκάλα.*

ε. *Η Μαρία είναι κοινωνική λειτουργός.*

στ. *Η Μαρία είναι λογίστρια.*

ζ. *Η Μαρία είναι δασκάλα και οικολόγος.*

3η ΔΙΑΛΕΞΗ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΛΟΓΙΚΗ

- **Προβλήματα ικανοποιησιμότητας**
  - **Κανονικές μορφές: DNF, CNF**
  - **Μοντελοποίηση με προβλήματα ικανοποιησιμότητας**
  - **SAT - solvers**

Προβλήματα ικανοποιησιμότητας

Δίδονται τα σύνολα

$$\Sigma_1 = \{p_1 \vee p_2 \vee p_3, p_1 \vee \neg p_2 \vee \neg p_3, \neg p_1 \vee p_2 \vee \neg p_3\}$$
$$\Sigma_2 = \{p_1 \vee p_2 \vee p_3, p_1 \vee \neg p_2, p_2 \vee \neg p_3, p_3 \vee \neg p_1, \neg p_1 \vee \neg p_2 \vee \neg p_3\}$$

Είναι κάποιο από τα σύνολα Σ_1 και Σ_2 ικανοποιήσιμο, δηλαδή υπάρχουν εκτιμήσεις v_1, v_2 ώστε $v_1 \models \Sigma_1$ ή $v_2 \models \Sigma_2$;
Εύκολα, μπορούμε να ελέγξουμε ότι η εκτίμηση v_1 με $v_1(p_1) = 1$, $v_1(p_2) = v_1(p_3) = 0$ ικανοποιεί το σύνολο Σ_1.
Αντίθετα, καμιά εκτίμηση δεν ικανοποιεί το σύνολο Σ_2, διότι από τις προτάσεις $p_1 \vee \neg p_2$, $p_2 \vee \neg p_3$, $p_3 \vee \neg p_1$ έπεται ότι για κάθε εκτίμηση v_2 που ικανοποιεί το Σ_2 ισχύει ότι

$$v_2(p_1) = v_2(p_2) = v_2(p_3),$$

επομένως, σε κάθε περίπτωση έχουμε αντίστοιχα ότι

$$v_2(p_1 \vee p_2 \vee p_3) = 0 \qquad \text{ή} \qquad v_2(\neg p_1 \vee \neg p_2 \vee \neg p_3) = 0.$$

Προβλήματα ικανοποιησιμότητας

Στην γενική του μορφή, το πρόβλημα της ικανοποιησιμότητας ορίζεται ως εξής:

Πρόβλημα Ικανοποιησιμότητας (πρόβλημα SAT) Δίδεται ένα σύνολο προτάσεων Σ και ζητείται να δοθεί μια εκτίμηση v που ικανοποιεί το Σ, ή η απάντηση ότι δεν υπάρχει τέτοια εκτίμηση.

Το πρόβλημα της ικανοποιησιμότητας είναι ένα από τα σημαντικότερα προβλήματα της Λογικής, με πολλές εφαρμογές στην Πληροφορική.

Η προφανής μέθοδος λύσης του είναι η *εξαντλητική εξέταση* όλων των δυνατών εκτιμήσεων, π.χ. με την βοήθεια των πινάκων αληθείας. Όμως, αν στο Σ περιέχονται n διαφορετικά άτομα, τότε ο συνολικός αριθμός των δυνατών εκτιμήσεων ισούται με 2^n (διότι για κάθε άτομο έχουμε ακριβώς δύο επιλογές). Ακόμα και ένας υπολογιστής που εξετάζει 10^{20} περιπτώσεις το δευτερόλεπτο, για σύνολα που περιέχουν 100 άτομα θα έπρεπε να εξετάσει 2^{100} περιπτώσεις, το οποίο θα απαιτούσε περίπου 4 αιώνες!

Προβλήματα ικανοποιησιμότητας

Μια καλύτερη προσέγγιση στο πρόβλημα SAT, όπως στο παράδειγμα με το σύνολο Σ_2, είναι να περιορίσουμε την αναζήτηση με βάση την μορφή των προτάσεων του.
Δυστυχώς, μέχρι σήμερα δεν υπάρχει κάποια μέθοδος για το πρόβλημα SAT που να είναι αποδοτική σε όλες τις περιπτώσεις.
Μάλιστα, το πρόβλημα SAT ανήκει σε μια κατηγορία ‘‘δύσκολων’’ προβλημάτων της Πληροφορικής, τα οποία χαρακτηρίζονται με τον όρο **NP-complete** προβλήματα.
Στην συνέχεια θα δούμε μερικές ιδέες που χρησιμοποιούνται για την λύση του προβλήματος SAT:

Κανονικές μορφές

Οι προτάσεις που εμφανίζονται σε ένα σύνολο προτάσεων Σ μπορεί να έχουν ιδιαίτερα πολύπλοκη μορφή. Για παράδειγμα:
$(((p_1 \leftrightarrow \neg p_2) \rightarrow (\neg p_3 \leftrightarrow p_1)) \vee (p_2 \rightarrow \neg p_3) \vee (\neg p_1 \wedge p_3)) \rightarrow ((\neg p_2 \wedge (p_1 \rightarrow p_4)) \vee (\neg p_4 \leftrightarrow \neg p_2))$, κ.ο.κ.
Πολλοί αλγόριθμοι για το πρόβλημα ικανοποιησιμότητας απαιτούν οι προτάσεις που εξετάζουν να έχουν συγκεκριμένη μορφή.
Για το λόγο αυτό έχει μελετηθεί το πρόβλημα της εύρεσης προτάσεων ψ που είναι λογικά ισοδύναμες με μια δοθείσα πρόταση ϕ αλλά έχουν μια συγκεκριμένη ‘‘απλούστερη’’ ή ‘‘τυποποιημένη’’ μορφή, η οποία ονομάζεται **κανονική μορφή**.
Υπάρχουν δύο κανονικές μορφές: η **κανονική διαζευκτική μορφή** και η **κανονική συζευκτική μορφή**.

Κανονικές μορφές

Πρόταση 16

Έστω φ *μια πρόταση η οποία, δεν είναι αντιλογία και, περιέχει τις προτασιακές μεταβλητές* $p_1, p_2, \dots, p_n$. *Ισχύει ότι:*

$$\varphi \models\!\!\!\models \bigvee_{v \in [\varphi]} \Big(\bigwedge_{i=1}^{n} p_i^v\Big),$$

όπου

$$[\varphi] = \{\textit{εκτίμηση } v : v(\varphi) = 1\} \textit{ και } p_i^v = \begin{cases} p_i, & \textit{αν } v(p_i) = 1 \\ \neg p_i, & \textit{αν } v(p_i) = 0. \end{cases}$$

Κανονικές μορφές

Απόδειξη: Αρκεί να δείξουμε ότι οι δύο προτάσεις έχουν τα ίδια μοντέλα.
Επειδή η φ δεν είναι αντιλογία τα μοντέλα της φ είναι οι εκτιμήσεις του συνόλου $[\varphi]$.
Η πρόταση $\bigvee_{v\in[\varphi]}(\bigwedge_{i=1}^{n} p_i^v)$ είναι αληθής αν και μόνο αν τουλάχιστον μια από τις προτάσεις $\bigwedge_{i=1}^{n} p_i^v$ είναι αληθής. Όμως, η πρόταση $\bigwedge_{i=1}^{n} p_i^v$ είναι αληθής μόνο όταν $v(p_i^v) = 1$ για κάθε $i \in [n]$ δηλαδή μόνο όταν $v \in [\varphi]$

Κανονικές μορφές

Πρακτικά, αυτό σημαίνει ότι οποιαδήποτε πρόταση φ μπορεί να γραφτεί ως διαζεύξεις συζεύξεων ακολουθώντας την εξής διαδικασία:

- Στον πίνακα αληθείας της φ κοιτάζουμε μόνο τις γραμμές με $v(\varphi) = 1$. Για κάθε τέτοια γραμμή δημιουργούμε μια σύζευξη από n μεταβλητές (p_i, αν στην i-οστή θέση της γραμμής έχουμε 1 και $\neg p_i$ αν έχουμε 0).
- Συνδέουμε τις συζεύξεις αυτές με διαζεύξεις.

Η γραφή που προκύπτει από τη διαδικασία αυτή ονομάζεται **(πλήρης) κανονική διαζευκτική μορφή** (**(full) disjunctive normal form**). Γενικότερα, αν μια πρόταση έχει γραφεί ως διαζεύξεις συζεύξεων, ονομάζεται **κανονική διαζευκτική μορφή** (**disjunctive normal form** - DNF)

Παραδείγματα

1. Η πρόταση
$$(\neg\phi \wedge \neg y) \vee (\phi \wedge y) \vee (y \wedge \neg\sigma)$$
είναι γραμμένη σε DNF (αλλά δεν είναι πλήρης).

2. Η πρόταση $\neg(\varphi \wedge y)$ έχει πίνακα αληθείας

φ	y	$\varphi \wedge y$	$\neg(\varphi \wedge y)$
1	1	1	0
1	0	0	1
0	1	0	1
0	0	0	1

Για να τη γράψουμε λοιπόν σε πλήρη κανονική διαζευκτική μορφή ασχολούμαστε μόνο με τις τρεις τελευταίες γραμμές του πίνακα. Από τη 2^{η} γραμμή παίρνουμε: $\varphi \wedge \neg y$, από την 3^{η}: $\neg\varphi \wedge y$ και από την 4^{η}: $\neg\varphi\neg \wedge y$.
Άρα τελικά $\neg(\varphi \wedge y) \models\!\!\!\dashv (\varphi \wedge \neg y) \vee (\neg\varphi \wedge y) \vee (\neg\varphi \wedge \neg y)$.

Κανονικές μορφές

Παραδείγματα

3. Η πρόταση $\varphi(p_1, p_2, p_3)$ με πίνακα:

p_1	p_2	p_3	$\varphi(p_1, p_2, p_3)$	
1	1	1	**1**	$\longrightarrow \quad p_1 \wedge p_2 \wedge p_3$
1	1	0	0	
1	0	1	0	
1	0	0	**1**	$\longrightarrow \quad p_1 \wedge \neg p_2 \wedge \neg p_3$
0	1	1	**1**	$\longrightarrow \quad \neg p_1 \wedge p_2 \wedge p_3$
0	1	0	0	
0	0	1	0	
0	0	0	**1**	$\longrightarrow \quad \neg p_1 \wedge \neg p_2 \wedge \neg p_3$

γράφεται σε DNF:
$(p_1 \wedge p_2 \wedge p_3) \vee (p_1 \wedge \neg p_2 \wedge \neg p_3) \vee (\neg p_1 \wedge p_2 \wedge p_3) \vee (\neg p_1 \wedge \neg p_2 \wedge \neg p_3)$.

Κανονικές μορφές

Παρατήρηση: Τα άτομα, οι αρνήσεις ατόμων, προτάσεις που χρησιμοποιούν μόνο διαζεύξεις ατόμων (ή αρνήσεων ατόμων) και προτάσεις που χρησιμοποιούν μόνο συζεύξεις ατόμων (ή αρνήσεων ατόμων), μπορούν τετριμμένα να θεωρηθούν ότι είναι σε DNF.
Για παράδειγμα, η πρόταση $p_1 \vee \neg p_2 \vee p_3 \vee p_4$ μπορεί να θεωρηθεί ως διάζευξη συζεύξεων (DNF) αφού είναι προφανώς ισοδύναμη με την $(p_1 \wedge p_1) \vee (\neg p_2 \wedge \neg p_2) \vee (p_3 \wedge p_3) \vee (p_4 \wedge p_4)$.
Ομοίως, η πρόταση $p_1 \wedge p_2 \wedge \neg p_3$ μπορεί να θεωρηθεί ως διάζευξη συζεύξεων (DNF) αφού είναι προφανώς ισοδύναμη με την $(p_1 \wedge p_2 \wedge \neg p_3) \vee (p_1 \wedge p_2 \wedge \neg p_3)$.

Κανονικές μορφές

Αντίστοιχα με την κανονική διαζευκτική μορφή, μπορούμε επίσης να γράφουμε οποιαδήποτε πρόταση φ (η οποία δεν είναι ταυτολογία) ως συζεύξεις διαζεύξεων:

- Κοιτάζουμε στον πίνακα αληθείας της φ μόνο τις γραμμές με $v(\varphi) = 0$. Για κάθε τέτοια γραμμή δημιουργούμε μια διάζευξη από n μεταβλητές ($\neg p_i$ αν στη i-οστή θέση της γραμμής έχουμε 1 και p_i αν έχουμε 0).
- Συνδέουμε τις διαζεύξεις αυτές με συζεύξεις.

Η γραφή που προκύπτει από αυτή την διαδικασία ονομάζεται **(πλήρης) κανονική συζευκτική μορφή** (**(full) conjuctive normal form** - **CNF**).

Γενικότερα, αν μια πρόταση έχει γραφεί ως συζεύξεις διαζεύξεων, ονομάζεται **κανονική συζευκτική μορφή** (**conjuctive normal form** - **CNF**).

Έτσι, το προηγούμενο Παράδειγμα 2, δίνει

$$\neg(\varphi \wedge y) \models\mid \neg\varphi \vee \neg y$$

και το Παράδειγμα 3 δίνει για την φ τη μορφή

$$(\neg p_1 \vee \neg p_2 \vee p_3) \wedge (\neg p_1 \vee p_2 \vee \neg p_3) \wedge (p_1 \vee \neg p_2 \vee p_3) \wedge (p_1 \vee p_2 \vee \neg p_3).$$

Παρατήρηση: Αντίστοιχα με την DNF, προφανώς ισχύει επίσης ότι τα άτομα, οι αρνήσεις ατόμων, προτάσεις που χρησιμοποιούν μόνο διαζεύξεις ατόμων (ή αρνήσεων ατόμων) και προτάσεις που χρησιμοποιούν μόνο συζεύξεις ατόμων (ή αρνήσεων ατόμων), μπορούν τετριμμένα να θεωρηθούν ότι είναι σε CNF.

Κανονικές μορφές

Αν μας είναι αρκετό να μετατρέψουμε μια πρόταση σε κανονική μορφή (χωρίς να είναι υποχρεωτικά πλήρης), μπορούμε πολλές φορές να το κάνουμε απλούστερα και γρηγορότερα, χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες των συνδέσμων (επιμεριστικότητα των $\vee$, $\wedge$, κανόνες De Morgan κ.λπ).

Έτσι, για παράδειγμα, η πρόταση $p_4 \wedge (p_4 \rightarrow p_1)$, η οποία γράφεται με χρήση πινάκων αληθείας σε πλήρη CNF ως

$$(\neg p_1 \vee p_4) \wedge (\neg p_4 \vee p_1) \wedge (p_1 \vee p_4),$$

μπορεί να γραφεί πολύ απλούστερα στην ισοδύναμή της (τετριμμένη, μη πλήρη) CNF ως $p_4 \wedge p_1$, αφού

$$p_4 \wedge (p_4 \rightarrow p_1) \overset{(1)}{\models\mkern-10mu\dashv} p_4 \wedge (\neg p_4 \vee p_1) \overset{(2)}{\models\mkern-10mu\dashv} (p_4 \wedge \neg p_4) \vee (p_4 \wedge p_1) \overset{(3)}{\models\mkern-10mu\dashv} p_4 \wedge p_1$$

(1): Βλέπε τις βασικές (λογικές) ισοδυναμίες (σελ. 40)
(2): Επιμεριστικότητα
(3): Αφού η $p_4 \wedge \neg p_4$ είναι ψευδής. Γενικά ισχύει προφανώς ότι αν η ψ είναι ψευδής τότε $\psi \vee \phi \models\mkern-10mu\dashv \phi$.

Κανονικές μορφές

Παρατήρηση: Στο πρόβλημα της ικανοποιησιμότητας συνήθως χρησιμοποιείται η δεύτερη κανονική μορφή, δηλαδή η κανονική συζευκτική μορφή (CNF).

Άσκηση 17

Να γραφεί η πρόταση

$$\varphi = (p \to q) \to \neg(r \leftrightarrow (p \wedge \neg q))$$

σε (πλήρη) κανονική διαζευκτική μορφή και σε (πλήρη) κανονική συζευκτική μορφή.

Λύση:

p	q	r	$p \to q$	$p \wedge \neg q$	$r \leftrightarrow (p \wedge \neg q)$	$\neg(r \leftrightarrow (p \wedge \neg q))$	φ
1	1	1	1	0	0	1	1
1	1	0	1	0	1	0	0
1	0	1	0	1	1	0	1
1	0	0	0	1	0	1	1
0	1	1	1	0	0	1	1
0	1	0	1	0	1	0	0
0	0	1	1	0	0	1	1
0	0	0	1	0	1	0	0

Από τον πίνακα αληθείας της φ προκύπτει ότι η φ είναι λογικά ισοδύναμη με την (DNF) πρόταση

$$(p \wedge q \wedge r) \vee (p \wedge \neg q \wedge r) \vee (p \wedge \neg q \wedge \neg r) \vee (\neg p \wedge q \wedge r) \vee (\neg p \wedge \neg q \wedge r).$$

Επίσης, η φ είναι λογικά ισοδύναμη με την (CNF) πρόταση

$$(\neg p \vee \neg q \vee r) \wedge (p \vee \neg q \vee r) \wedge (p \vee q \vee r).$$

Άσκηση 18

Να βρεθεί μια πρόταση φ που περιέχει τα άτομα p, q, r και είναι αληθής μόνο όταν ακριβώς δύο από τα p, q, r είναι αληθή.

Κανονικές μορφές

Λύση: Ο πίνακας αληθείας της πρότασης φ είναι ο εξής:

p	q	r	φ
1	1	1	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	0	0	0
0	1	1	1
0	1	0	0
0	0	1	0
0	0	0	0

Άρα, μια τέτοια πρόταση φ είναι η πρόταση

$$(p \wedge \neg q \wedge r) \vee (p \wedge q \wedge \neg r) \vee (\neg p \wedge q \wedge r),$$

η οποία προκύπτει γράφοντας την φ σε (πλήρη) κανονική διαζευκτική μορφή.

Προβλήματα ικανοποιησιμότητας

Το πρόβλημα της ικανοποιησιμότητας είναι σημαντικό διότι:

1. Ο έλεγχος σχετικά με τις βασικές έννοιες της ταυτολογίας, του λογικού συμπεράσματος και της λογικής ισοδυναμίας μπορούν να αναχθούν σε προβλήματα ικανοποιησιμότητας. Συγκεκριμένα:

   - Για να δείξουμε ότι μια πρόταση φ είναι ταυτολογία, αρκεί να δείξουμε ότι η πρόταση $\neg\varphi$ είναι μη ικανοποιήσιμη.
   - Για να δείξουμε ότι οι προτάσεις φ και ψ είναι λογικά ισοδύναμες, αρκεί να δείξουμε ότι η πρόταση $\varphi \leftrightarrow \psi$ είναι ταυτολογία. Άρα, ισοδύναμα, αρκεί να δείξουμε ότι η πρόταση $\neg(\varphi \leftrightarrow \psi)$ είναι μη ικανοποιήσιμη.
   - Για να δείξουμε ότι η πρόταση φ είναι λογικό συμπέρασμα του Σ, αρκεί να δείξουμε ότι το σύνολο $\Sigma \cup \{\neg\varphi\}$ είναι μη ικανοποιήσιμο.

Προβλήματα ικανοποιησιμότητας

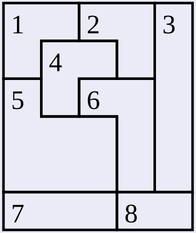
Το πρόβλημα της ικανοποιησιμότητας είναι σημαντικό διότι:

2. Πολλά αλγοριθμικά προβλήματα μπορούν να μοντελοποιηθούν ως προβλήματα ικανοποιησιμότητας. Επομένως, αν βρεθούν γρήγοροι αλγόριθμοι για την επίλυση του προβλήματος ικανοποιησιμότητας, με την βοήθεια αυτών θα λυθούν αποδοτικά και όλα αυτά τα αλγοριθμικά προβλήματα. Παρακάτω δίδονται μερικά παραδείγματα τέτοιων μοντελοποιήσεων.

Παραδείγματα μοντελοποίησης ως προβλήματα ικανοποιησιμότητας.

Άσκηση 19 (**Πρόβλημα χρωματισμού**)

Σε κάθε μια από τις 8 *περιοχές του διπλανού σχήματος να τοποθετηθεί ένας από τους αριθμούς* 1, 2, 3 *έτσι ώστε οι γειτονικές περιοχές να έχουν διαφορετικούς αριθμούς. (Δύο περιοχές θεωρούνται γειτονικές αν το κοινό τους σύνορο περιέχει άπειρα σημεία)*



Λύση: Για κάθε περιοχή i, $i \in [8]$ θεωρούμε τα άτομα:
p_{i1}: Η περιοχή i έχει τον αριθμό 1.
p_{i2}: Η περιοχή i έχει τον αριθμό 2.
p_{i3}: Η περιοχή i έχει τον αριθμό 3.
Συνολικά, για τις 8 περιοχές, χρειαζόμαστε $3 \cdot 8 = 24$ άτομα.
Οι περιορισμοί του προβλήματος μπορούν να μοντελοποιηθούν από τις παρακάτω προτάσεις:

1. Σε κάθε περιοχή πρέπει να τοποθετηθεί ένας τουλάχιστον αριθμός. Για κάθε περιοχή i, $i \in [8]$, πρέπει να ισχύει η πρόταση: $p_{i1} \vee p_{i2} \vee p_{i3}$.

   - $p_{11} \vee p_{12} \vee p_{13}$
   - $p_{21} \vee p_{22} \vee p_{23}$
   - $p_{31} \vee p_{32} \vee p_{33}$
   - $p_{41} \vee p_{42} \vee p_{43}$
   - $p_{51} \vee p_{52} \vee p_{53}$
   - $p_{61} \vee p_{62} \vee p_{63}$
   - $p_{71} \vee p_{72} \vee p_{73}$
   - $p_{81} \vee p_{82} \vee p_{83}$

Προβλήματα ικανοποιησιμότητας

2. (Προαιρετικά) Σε κάθε περιοχή πρέπει να τοποθετηθεί το πολύ ένας αριθμός. Για κάθε περιοχή i, $i \in [8]$, πρέπει να ισχύουν οι προτάσεις: $\neg p_{i1} \vee \neg p_{i2}, \neg p_{i1} \vee \neg p_{i3}, \neg p_{i2} \vee \neg p_{i3}$.
   - $\neg p_{11} \vee \neg p_{12}, \neg p_{11} \vee \neg p_{13}, \neg p_{12} \vee \neg p_{13}$
   - $\neg p_{21} \vee \neg p_{22}, \neg p_{21} \vee \neg p_{23}, \neg p_{22} \vee \neg p_{23}$
   - $\neg p_{31} \vee \neg p_{32}, \neg p_{31} \vee \neg p_{33}, \neg p_{32} \vee \neg p_{33}$
   - $\neg p_{41} \vee \neg p_{42}, \neg p_{41} \vee \neg p_{43}, \neg p_{42} \vee \neg p_{43}$
   - $\neg p_{51} \vee \neg p_{52}, \neg p_{51} \vee \neg p_{53}, \neg p_{52} \vee \neg p_{53}$
   - $\neg p_{61} \vee \neg p_{62}, \neg p_{61} \vee \neg p_{63}, \neg p_{62} \vee \neg p_{63}$
   - $\neg p_{71} \vee \neg p_{72}, \neg p_{71} \vee \neg p_{73}, \neg p_{72} \vee \neg p_{73}$
   - $\neg p_{81} \vee \neg p_{82}, \neg p_{81} \vee \neg p_{83}, \neg p_{82} \vee \neg p_{83}$

Προβλήματα ικανοποιησιμότητας

3. Αν οι περιοχές i, j είναι γειτονικές δεν επιτρέπεται να έχουν τον ίδιο αριθμό, οπότε πρέπει να ισχύουν οι προτάσεις: $\neg p_{i1} \vee \neg p_{j1}$, $\neg p_{i2} \vee \neg p_{j2}$, $\neg p_{i3} \vee \neg p_{j3}$.

   - $\neg p_{11} \vee \neg p_{21}$, $\neg p_{12} \vee \neg p_{22}$, $\neg p_{13} \vee \neg p_{23}$
   - $\neg p_{11} \vee \neg p_{41}$, $\neg p_{12} \vee \neg p_{42}$, $\neg p_{13} \vee \neg p_{43}$
   - $\neg p_{11} \vee \neg p_{51}$, $\neg p_{12} \vee \neg p_{52}$, $\neg p_{13} \vee \neg p_{53}$
   - $\neg p_{21} \vee \neg p_{31}$, $\neg p_{22} \vee \neg p_{32}$, $\neg p_{23} \vee \neg p_{33}$
   - $\neg p_{21} \vee \neg p_{41}$, $\neg p_{22} \vee \neg p_{42}$, $\neg p_{23} \vee \neg p_{43}$
   - $\neg p_{21} \vee \neg p_{61}$, $\neg p_{22} \vee \neg p_{62}$, $\neg p_{23} \vee \neg p_{63}$
   - $\neg p_{31} \vee \neg p_{61}$, $\neg p_{32} \vee \neg p_{62}$, $\neg p_{33} \vee \neg p_{63}$
   - $\neg p_{31} \vee \neg p_{81}$, $\neg p_{32} \vee \neg p_{82}$, $\neg p_{33} \vee \neg p_{83}$
   - $\neg p_{41} \vee \neg p_{51}$, $\neg p_{42} \vee \neg p_{52}$, $\neg p_{43} \vee \neg p_{53}$
   - $\neg p_{41} \vee \neg p_{61}$, $\neg p_{42} \vee \neg p_{62}$, $\neg p_{43} \vee \neg p_{63}$
   - $\neg p_{51} \vee \neg p_{61}$, $\neg p_{52} \vee \neg p_{62}$, $\neg p_{53} \vee \neg p_{63}$
   - $\neg p_{51} \vee \neg p_{71}$, $\neg p_{52} \vee \neg p_{72}$, $\neg p_{53} \vee \neg p_{73}$
   - $\neg p_{61} \vee \neg p_{81}$, $\neg p_{62} \vee \neg p_{82}$, $\neg p_{63} \vee \neg p_{83}$
   - $\neg p_{71} \vee \neg p_{81}$, $\neg p_{72} \vee \neg p_{82}$, $\neg p_{73} \vee \neg p_{83}$

Προβλήματα ικανοποιησιμότητας

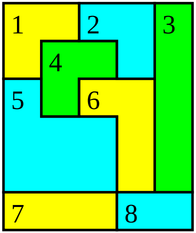
Το πρόβλημα έχει λύση αν και μόνο αν το σύνολο Σ που αποτελείται από τις προηγούμενες $8 + 24 + 42 = 74$ προτάσεις (οι οποίες συνολικά περιέχουν 24 διαφορετικά άτομα) είναι ικανοποιήσιμο.
Τα μοντέλα του Σ αντιστοιχούν στις λύσεις του προβλήματος τοποθέτησης.

Προβλήματα ικανοποιησιμότητας

Ένα τέτοιο μοντέλο του Σ είναι η εκτίμηση v για την οποία όλα τα άτομα, εκτός από τα επόμενα 8, είναι ψευδή:

$$p_{11}, p_{22}, p_{33}, p_{43}, p_{52}, p_{61}, p_{71}, p_{82}$$

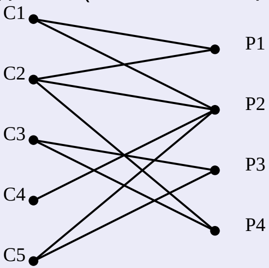
Το μοντέλο αυτό αντιστοιχεί στην διπλανή λύση όπου
οι περιοχές που περιέχουν τον αριθμό 1 είναι κίτρινες
οι περιοχές που περιέχουν τον αριθμό 2 είναι γαλάζιες
οι περιοχές που περιέχουν τον αριθμό 3 είναι πράσινες.



Προβλήματα ικανοποιησιμότητας

Άσκηση 20 (**Πρόβλημα αντιστοίχισης**)

Σε ένα πρόγραμμα Πρακτικής Άσκησης είναι διαθέσιμες 4 *θέσεις* P_1, P_2, P_3, P_4 *για τις οποίες υπάρχουν* 5 *υποψήφιοι* C_1, C_2, C_3, C_4, C_5.
Κάθε υποψήφιος έχει δηλώσει τις θέσεις για τις οποίες ενδιαφέρεται να αποσχοληθεί. Στο διπλανό σχήμα δίνονται οι επιλογές κάθε υποψήφιου. (Οι γραμμές δείχνουν τις θέσεις που προτιμά κάθε υποψήφιος.)
Να βρεθεί ένας τρόπος ώστε να καλυφθούν όλες οι θέσεις σύμφωνα με τις προτιμήσεις των υποψηφίων. (Σε κάθε θέση μπορεί να απασχοληθεί το πολύ ένας υποψήφιος).



Προβλήματα ικανοποιησιμότητας

Λύση: Για κάθε θέση i, $i \in [4]$ και για κάθε υποψήφιο j, $j \in [5]$ και θεωρούμε τα άτομα:
p_{ij}: Ο υποψήφιος j θα απασχοληθεί στην θέση i.
Γενικά σε ένα τέτοιο πρόβλημα χρειαζόμαστε το πολύ $4 \cdot 5 = 20$ άτομα.
Μπορούμε όμως να μειώσουμε τον αριθμό των ατόμων με βάση τις προτιμήσεις των υποψηφίων. Στο παρόν πρόβλημα χρειαζόμαστε $2 + 3 + 2 + 1 + 2 = 10$ άτομα.

Προβλήματα ικανοποιησιμότητας

Οι περιορισμοί του προβλήματος μπορούν να μοντελοποιηθούν από τις παρακάτω προτάσεις:

1. Σε κάθε θέση πρέπει να απασχοληθεί τουλάχιστον ένας υποψήφιος, (ο οποίος ενδιαφέρεται γι᾽ αυτή). Συγκεκριμένα, αν για την θέση i ενδιαφέρονται οι υποψήφιοι a, b, ..., z τότε πρέπει πρέπει να ισχύει η πρόταση $p_{ia} \vee p_{ib} \vee \cdots \vee p_{iz}$.
   - (Θέση $P1$): $p_{11} \vee p_{12}$
   - (Θέση $P2$): $p_{21} \vee p_{22} \vee p_{24} \vee p_{25}$
   - (Θέση $P3$): $p_{33} \vee p_{35}$
   - (Θέση $P4$): $p_{42} \vee p_{43}$

Προβλήματα ικανοποιησιμότητας

2. Σε κάθε θέση πρέπει να απασχοληθεί το πολύ ένας υποψήφιος, (ο οποίος ενδιαφέρεται γι᾽ αυτή). Συγκεκριμένα, αν για την θέση i ενδιαφέρονται περισσότεροι από ένας υποψήφιοι (και έστω A_i το σύνολο των υποψήφιων που ενδιαφέρονται για την θέση i) τότε πρέπει πρέπει να ισχύουν οι προτάσεις $\neg p_{ix} \vee \neg p_{iy}$ για κάθε $x, y \in A_i$ με $x < y$.
   - (Θέση $P1$): $\neg p_{11} \vee \neg p_{12}$
   - (Θέση $P2$): $\neg p_{21} \vee \neg p_{22}$, $\neg p_{21} \vee \neg p_{24}$, $\neg p_{21} \vee p_{25}$, $\neg p_{22} \vee \neg p_{24}$, $\neg p_{22} \vee \neg p_{25}$, $\neg p_{24} \vee \neg p_{25}$
   - (Θέση $P3$): $\neg p_{33} \vee \neg p_{35}$
   - (Θέση $P4$): $\neg p_{42} \vee \neg p_{43}$

Προβλήματα ικανοποιησιμότητας

3. Κάθε υποψήφιος μπορεί να απασχοληθεί σε μια το πολύ θέση, (από αυτές που τον ενδιαφέρουν). Συγκεκριμένα, αν ο υποψήφιος j ενδιαφέρεται για περισσότερες από μια θέσεις (και έστω B_j το σύνολο των θέσεων που ενδιαφέρουν τον υποψήφιο j) τότε πρέπει πρέπει να ισχύουν οι προτάσεις $\neg p_{xj} \vee \neg p_{yj}$ για κάθε $x, y \in B_j$ με $x < y$.
   - (Υποψήφιος C_1): $\neg p_{11} \vee \neg p_{21}$
   - (Υποψήφιος C_2): $\neg p_{12} \vee \neg p_{22}$, $\neg p_{12} \vee \neg p_{42}$, $\neg p_{22} \vee p_{42}$
   - (Υποψήφιος C_3): $\neg p_{33} \vee \neg p_{43}$
   - (Υποψήφιος C_4):
   - (Υποψήφιος C_5): $\neg p_{25} \vee \neg p_{35}$

Προβλήματα ικανοποιησιμότητας

Το πρόβλημα έχει λύση αν και μόνο αν το σύνολο Σ που αποτελείται από τις προηγούμενες $4+9+6=19$ προτάσεις (οι οποίες συνολικά περιέχουν 10 διαφορετικά άτομα) είναι ικανοποιήσιμο. Τα μοντέλα του Σ αντιστοιχούν στις λύσεις του προβλήματος αντιστοίχισης.
Ένα τέτοιο μοντέλο του Σ είναι η εκτίμηση v για την οποία:

$$v(p_{11}) = v(p_{24}) = v(p_{35}) = v(p_{43}) = 1$$

και τα υπόλοιπα 6 άτομα είναι ψευδή. Το μοντέλο αυτό αντιστοιχεί στην αντιστοίχιση $C_1 - P_1$, $C_4 - P_2$, $C_5 - P_3$ και $C_3 - P_4$.

Άσκηση 21 (**Πρόβλημα κάλυψης**)

Σε ένα τεστ πιστοποίησης εξετάζεται η γνώση πάνω σε 9 ενότητες A, B, C, D, E, F, G, H, I. Οι ερωτήσεις του τεστ επιλέγονται από μια βάση ερωτήσεων. Κάθε ερώτηση καλύπτει ορισμένες από τις ενότητες και απαιτεί κατά μέσο όρο 10 λεπτά για να απαντηθεί. Στον διπλανό πίνακα φαίνονται οι ενότητες που εξετάζει κάθε ερώτηση της βάσης: Να βρεθεί αν υπάρχει τρόπος να κατασκευασθεί ένα τεστ, που να διαρκεί κατά μέσο όρο 30 λεπτά και οι ερωτήσεις του να εξετάζουν και τις 9 ενότητες.

Ερώτηση	*Ενότητα*
1	A, B, G
2	A, B, C, E
3	C, D, H
4	A, E, G, I
5	D, F, H
6	D, E, G
7	A, C, I

Προβλήματα ικανοποιησιμότητας

Λύση: Για κάθε ερώτηση i, $i \in [7]$ θεωρούμε τα άτομα:
p_i: Η ερώτηση i επιλέγεται για το τεστ.
Συνολικά, για τις 7 ερωτήσεις, χρειαζόμαστε 7 άτομα.
Οι περιορισμοί του προβλήματος μπορούν να μοντελοποιηθούν από τις παρακάτω προτάσεις:

Προβλήματα ικανοποιησιμότητας

1. Πρέπει να επιλέξουμε τουλάχιστον 3 ερωτήσεις. Ισοδύναμα, από κάθε (δυνατή) πεντάδα ερωτήσεων επιλέγουμε τουλάχιστον 1 ερώτηση. Πράγματι, αν υπάρχει πεντάδα από την οποία δεν επιλέγουμε καμία ερώτηση, τότε έχουμε επιλέξει το πολύ 2 ερωτήσεις για το τεστ. Αντίστροφα, αν επιλέξουμε τουλάχιστον 3 ερωτήσεις, τότε σε κάθε πεντάδα ερωτήσεων περιέχεται τουλάχιστον 1 από αυτές.
   Υπάρχουν $\binom{7}{5} = 21$ τέτοιες προτάσεις που πρέπει να ισχύουν:

   - $p_1 \vee p_2 \vee p_3 \vee p_4 \vee p_5$
   - $p_1 \vee p_2 \vee p_3 \vee p_4 \vee p_6$
   - $p_1 \vee p_2 \vee p_3 \vee p_4 \vee p_7$
   - $p_1 \vee p_2 \vee p_3 \vee p_5 \vee p_6$
   - $p_1 \vee p_2 \vee p_3 \vee p_5 \vee p_7$
   - $p_1 \vee p_2 \vee p_3 \vee p_6 \vee p_7$
   - $p_1 \vee p_2 \vee p_4 \vee p_5 \vee p_6$
   - $p_1 \vee p_2 \vee p_4 \vee p_5 \vee p_7$
   - $p_1 \vee p_2 \vee p_4 \vee p_6 \vee p_7$
   - $p_1 \vee p_2 \vee p_5 \vee p_6 \vee p_7$
   - $p_1 \vee p_3 \vee p_4 \vee p_5 \vee p_6$
   - $p_1 \vee p_3 \vee p_4 \vee p_5 \vee p_7$
   - $p_1 \vee p_3 \vee p_4 \vee p_6 \vee p_7$
   - $p_1 \vee p_3 \vee p_5 \vee p_6 \vee p_7$
   - $p_1 \vee p_4 \vee p_5 \vee p_6 \vee p_7$
   - $p_2 \vee p_3 \vee p_4 \vee p_5 \vee p_6$
   - $p_2 \vee p_3 \vee p_4 \vee p_5 \vee p_7$
   - $p_2 \vee p_3 \vee p_4 \vee p_6 \vee p_7$
   - $p_2 \vee p_3 \vee p_5 \vee p_6 \vee p_7$
   - $p_2 \vee p_4 \vee p_5 \vee p_6 \vee p_7$
   - $p_3 \vee p_4 \vee p_5 \vee p_6 \vee p_7$

2. Προκειμένου ο χρόνος απαντήσεων να είναι περίπου ίσος με 30 λεπτά δεν επιτρέπεται να επιλεγούν πάνω από 3 ερωτήσεις. Ισοδύναμα, σε κάθε τετράδα ερωτήσεων δεν μπορούν να επιλεγούν όλες οι ερωτήσεις της. Συγκεκριμένα, αν η τετράδα περιέχει τις ερωτήσεις i, j, k, r τότε πρέπει να ισχύει η πρόταση $\neg p_i \vee \neg p_j \vee \neg p_k \vee \neg p_r$.
Υπάρχουν $\binom{7}{4} = 35$ τέτοιες προτάσεις που πρέπει να ισχύουν:

Προβλήματα ικανοποιησιμότητας

- $\neg p_1 \vee \neg p_2 \vee \neg p_3 \vee \neg p_4$
- $\neg p_1 \vee \neg p_2 \vee \neg p_3 \vee \neg p_5$
- $\neg p_1 \vee \neg p_2 \vee \neg p_3 \vee \neg p_6$
- $\neg p_1 \vee \neg p_2 \vee \neg p_3 \vee \neg p_7$
- $\neg p_1 \vee \neg p_2 \vee \neg p_4 \vee \neg p_5$
- $\neg p_1 \vee \neg p_2 \vee \neg p_4 \vee \neg p_6$
- $\neg p_1 \vee \neg p_2 \vee \neg p_4 \vee \neg p_7$
- $\neg p_1 \vee \neg p_2 \vee \neg p_5 \vee \neg p_6$
- $\neg p_1 \vee \neg p_2 \vee \neg p_5 \vee \neg p_7$
- $\neg p_1 \vee \neg p_2 \vee \neg p_6 \vee \neg p_7$
- $\neg p_1 \vee \neg p_3 \vee \neg p_4 \vee \neg p_5$
- $\neg p_1 \vee \neg p_3 \vee \neg p_4 \vee \neg p_6$
- $\neg p_1 \vee \neg p_3 \vee \neg p_4 \vee \neg p_7$
- $\neg p_1 \vee \neg p_3 \vee \neg p_5 \vee \neg p_6$
- $\neg p_1 \vee \neg p_3 \vee \neg p_5 \vee \neg p_7$
- $\neg p_1 \vee \neg p_3 \vee \neg p_6 \vee \neg p_7$
- $\neg p_1 \vee \neg p_4 \vee \neg p_5 \vee \neg p_6$
- $\neg p_1 \vee \neg p_4 \vee \neg p_5 \vee \neg p_7$
- $\neg p_1 \vee \neg p_4 \vee \neg p_6 \vee \neg p_7$
- $\neg p_1 \vee \neg p_5 \vee \neg p_6 \vee \neg p_7$
- $\neg p_2 \vee \neg p_3 \vee \neg p_4 \vee \neg p_5$
- $\neg p_2 \vee \neg p_3 \vee \neg p_4 \vee \neg p_6$
- $\neg p_2 \vee \neg p_3 \vee \neg p_4 \vee \neg p_7$
- $\neg p_2 \vee \neg p_3 \vee \neg p_5 \vee \neg p_6$
- $\neg p_2 \vee \neg p_3 \vee \neg p_5 \vee \neg p_7$
- $\neg p_2 \vee \neg p_3 \vee \neg p_6 \vee \neg p_7$
- $\neg p_2 \vee \neg p_4 \vee \neg p_5 \vee \neg p_6$
- $\neg p_2 \vee \neg p_4 \vee \neg p_5 \vee \neg p_7$
- $\neg p_2 \vee \neg p_4 \vee \neg p_6 \vee \neg p_7$
- $\neg p_2 \vee \neg p_5 \vee \neg p_6 \vee \neg p_7$
- $\neg p_3 \vee \neg p_4 \vee \neg p_5 \vee \neg p_6$
- $\neg p_3 \vee \neg p_4 \vee \neg p_5 \vee \neg p_7$
- $\neg p_3 \vee \neg p_4 \vee \neg p_6 \vee \neg p_7$
- $\neg p_3 \vee \neg p_5 \vee \neg p_6 \vee \neg p_7$
- $\neg p_4 \vee \neg p_5 \vee \neg p_6 \vee \neg p_7$

Προβλήματα ικανοποιησιμότητας

3. Κάθε μία από τις 9 ενότητες πρέπει να εξετάζεται από τουλάχιστον μια ερώτηση. Συγκεκριμένα, αν η ενότητα U εξετάζεται από τις ερωτήσεις x, y, ..., z πρέπει να ισχύει η πρόταση $p_x \vee p_y \vee \cdots \vee p_z$.

   - (Ενότητα A): $p_1 \vee p_2 \vee p_4 \vee p_7$
   - (Ενότητα B): $p_1 \vee p_2$
   - (Ενότητα C): $p_2 \vee p_3 \vee p_7$
   - (Ενότητα D): $p_3 \vee p_5 \vee p_6$
   - (Ενότητα E): $p_2 \vee p_4 \vee p_6$
   - (Ενότητα F): p_5
   - (Ενότητα G): $p_1 \vee p_4 \vee p_6$
   - (Ενότητα H): $p_3 \vee p_5$
   - (Ενότητα I): $p_4 \vee p_7$

Προβλήματα ικανοποιησιμότητας

Το πρόβλημα έχει λύση αν και μόνο αν το σύνολο Σ που αποτελείται από τις προηγούμενες $21 + 35 + 9 = 65$ προτάσεις (οι οποίες συνολικά περιέχουν 7 διαφορετικά άτομα) είναι ικανοποιήσιμο. Τα μοντέλα του Σ αντιστοιχούν στις λύσεις του προβλήματος κατασκευής του τεστ. Ένα τέτοιο μοντέλο του Σ (και μάλιστα μοναδικό) είναι η εκτίμηση v για την οποία

$$v(p_2) = v(p_4) = v(p_5) = 1, \qquad v(p_1) = v(p_3) = v(p_6) = v(p_7) = 0.$$

Το μοντέλο αυτό αντιστοιχεί στο τεστ που αποτελείται από τις 3 ερωτήσεις $\{2, 4, 5\}$, οι οποίες καλύπτουν και τις 9 ενότητες.

Άσκηση 22 (**Πρόβλημα κλίκας**)

Σε ένα κοινωνικό δίκτυο συμμετέχουν (μεταξύ πολλών άλλων) 8 συγκεκριμένοι χρήστες. Ο καθένας έχει μια λίστα από φίλους στην οποία περιέχονται ορισμένοι από αυτούς τους χρήστες. Συγκεκριμένα, οι λίστες φίλων των 8 χρηστών εμφανίζονται στον διπλανό πίνακα. Να βρεθεί, αν υπάρχει, μια ομάδα που αποτελείται από τουλάχιστον 3 χρήστες οι οποίοι ανά δύο είναι φίλοι.

Χρήστης	*Λίστα φίλων*
1	2, 7, 8
2	1, 3, 4, 8
3	2, 4
4	2, 3, 5
5	4, 7, 8
6	8
7	1, 5
8	1, 2, 5, 6

Προβλήματα ικανοποιησιμότητας

Λύση: Για κάθε χρήστη i, $i \in [8]$ θεωρούμε τα άτομα:
p_i: Ο χρήστης i συμμετέχει στην ομάδα.
Συνολικά, για τους 8 χρήστες, χρειαζόμαστε 8 άτομα.
Οι περιορισμοί του προβλήματος μπορούν να μοντελοποιηθούν από τις παρακάτω προτάσεις:

Προβλήματα ικανοποιησιμότητας

1. Πρέπει να επιλέξουμε τουλάχιστον 3 χρήστες.
   Ισοδύναμα, από κάθε (δυνατή) εξάδα χρηστών επιλέγουμε τουλάχιστον 1 χρήστη.
   Πράγματι, αν υπάρχει εξάδα από την οποία δεν επιλέγουμε κανένα χρήστη, τότε έχουμε επιλέξει το πολύ 2 χρήστες στην ομάδα.
   Αντίστροφα, αν επιλέξουμε τουλάχιστον 3 χρήστες, τότε σε κάθε εξάδα χρηστών περιέχεται τουλάχιστον 1 από αυτούς.

Υπάρχουν $\binom{8}{6} = 28$ τέτοιες προτάσεις που πρέπει να ισχύουν:

- $p_1 \vee p_2 \vee p_3 \vee p_4 \vee p_5 \vee p_6$
- $p_1 \vee p_2 \vee p_3 \vee p_4 \vee p_5 \vee p_7$
- $p_1 \vee p_2 \vee p_3 \vee p_4 \vee p_5 \vee p_8$
- $p_1 \vee p_2 \vee p_3 \vee p_4 \vee p_6 \vee p_7$
- $p_1 \vee p_2 \vee p_3 \vee p_4 \vee p_6 \vee p_8$
- $p_1 \vee p_2 \vee p_3 \vee p_4 \vee p_7 \vee p_8$
- $p_1 \vee p_2 \vee p_3 \vee p_5 \vee p_6 \vee p_7$
- $p_1 \vee p_2 \vee p_3 \vee p_5 \vee p_6 \vee p_8$
- $p_1 \vee p_2 \vee p_3 \vee p_5 \vee p_7 \vee p_8$
- $p_1 \vee p_2 \vee p_3 \vee p_6 \vee p_7 \vee p_8$
- $p_1 \vee p_2 \vee p_4 \vee p_5 \vee p_6 \vee p_7$
- $p_1 \vee p_2 \vee p_4 \vee p_5 \vee p_6 \vee p_8$
- $p_1 \vee p_2 \vee p_4 \vee p_5 \vee p_7 \vee p_8$
- $p_1 \vee p_2 \vee p_4 \vee p_6 \vee p_7 \vee p_8$
- $p_1 \vee p_2 \vee p_5 \vee p_6 \vee p_7 \vee p_8$
- $p_1 \vee p_3 \vee p_4 \vee p_5 \vee p_6 \vee p_7$
- $p_1 \vee p_3 \vee p_4 \vee p_5 \vee p_6 \vee p_8$
- $p_1 \vee p_3 \vee p_4 \vee p_5 \vee p_7 \vee p_8$
- $p_1 \vee p_3 \vee p_4 \vee p_6 \vee p_7 \vee p_8$
- $p_1 \vee p_3 \vee p_5 \vee p_6 \vee p_7 \vee p_8$
- $p_1 \vee p_4 \vee p_5 \vee p_6 \vee p_7 \vee p_8$
- $p_2 \vee p_3 \vee p_4 \vee p_5 \vee p_6 \vee p_7$
- $p_2 \vee p_3 \vee p_4 \vee p_5 \vee p_6 \vee p_8$
- $p_2 \vee p_3 \vee p_4 \vee p_5 \vee p_7 \vee p_8$
- $p_2 \vee p_3 \vee p_4 \vee p_6 \vee p_7 \vee p_8$
- $p_2 \vee p_3 \vee p_5 \vee p_6 \vee p_7 \vee p_8$
- $p_2 \vee p_4 \vee p_5 \vee p_6 \vee p_7 \vee p_8$
- $p_3 \vee p_4 \vee p_5 \vee p_6 \vee p_7 \vee p_8$

Προβλήματα ικανοποιησιμότητας

2. Αν δύο χρήστες δεν είναι φίλοι, τότε δεν μπορούν να επιλεγούν και οι δύο στην ομάδα. Συγκεκριμένα, αν οι χρήστες i, j δεν είναι φίλοι πρέπει να ισχύει η πρόταση $\neg p_i \vee \neg p_j$.
   - (1): $\neg p_1 \vee \neg p_3$, $\neg p_1 \vee \neg p_4$, $\neg p_1 \vee \neg p_5$, $\neg p_1 \vee \neg p_6$
   - (2): $\neg p_2 \vee \neg p_5$, $\neg p_2 \vee \neg p_6$, $\neg p_2 \vee \neg p_7$
   - (3): $\neg p_3 \vee \neg p_5$, $\neg p_3 \vee \neg p_6$, $\neg p_3 \vee \neg p_8$
   - (4): $\neg p_4 \vee \neg p_6$, $\neg p_4 \vee \neg p_7$, $\neg p_4 \vee \neg p_8$
   - (5): $\neg p_5 \vee \neg p_6$
   - (6): $\neg p_6 \vee \neg p_7$
   - (7): $\neg p_7 \vee \neg p_8$

Προβλήματα ικανοποιησιμότητας

Το πρόβλημα έχει λύση αν και μόνο αν το σύνολο Σ που αποτελείται από τις προηγούμενες $28 + 16 = 44$ προτάσεις (οι οποίες συνολικά περιέχουν 8 διαφορετικά άτομα) είναι ικανοποιήσιμο. Τα μοντέλα του Σ αντιστοιχούν στις λύσεις του προβλήματος επιλογής της ομάδας. Ένα τέτοιο μοντέλο του Σ είναι η εκτίμηση v για την οποία

$$v(p_1) = v(p_2) = v(p_8) = 1, \quad v(p_3) = v(p_4) = v(p_5) = v(p_6) = v(p_7) = 0.$$

Το μοντέλο αυτό αντιστοιχεί στην ομάδα που αποτελείται από τα άτομα $\{1, 2, 8\}$, τα οποία ανά δύο είναι φίλοι.

Προβλήματα ικανοποιησιμότητας

Παρατήρηση: Στις επόμενες ενότητες θα δούμε δύο μεθόδους που μπορούν να χρησιμοποιηθούν και για την επίλυση του προβλήματος της ικανοποιησιμότητας: τα **δένδρα αληθείας** και την **αρχή της απόφασης**.

Προβλήματα ικανοποιησιμότητας

1. Σε μια διαδικασία επιλογής μεταξύ τριών αντικειμένων α, β, γ είναι απαραίτητη η ικανοποίηση των παρακάτω περιορισμών:
    1. Δεν μπορούν να επιλεχθούν και τα τρία.
    2. Αν επιλεχθεί το γ, τότε θα επιλεχθεί και το α.
    3. Αν δεν επιλεχθεί το β, τότε δεν θα επιλεχθεί και το α.
    4. Αν δεν επιλεχθεί το γ, τότε δεν θα επιλεχθεί και το α.
    5. Πρέπει να επιλεγεί τουλάχιστον ένα.

    Να μοντελοποιηθεί το πρόβλημα επιλογής ως πρόβλημα ικανοποιησιμότητας.
2. Σε κάποια δίκη κλήθηκαν 4 μάρτυρες. Από τις καταθέσεις τους προέκυψαν τα ακόλουθα συμπεράσματα.
    1. Αν η μαρτυρία του M_1 είναι αληθής τότε και η μαρτυρία του M_2 είναι αληθής.
    2. Η μαρτυρία του M_3 είναι αληθής, αν και μόνο αν η μαρτυρία του M_4 είναι αληθής.
    3. Οι μαρτυρίες των M_2 και M_4 ουδέποτε συναληθεύουν.
    4. Η μαρτυρία του M_3 είναι αληθής.

    Να μοντελοποιηθεί ως πρόβλημα ικανοποιησιμότητας ο έλεγχος

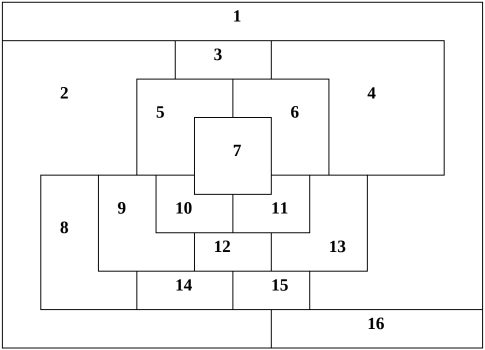
3. Κάποιος συλλέκτης επιθυμεί να συγκεντρώσει μια συλλογή γραμματοσήμων $S = \{\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_n\}$. Τα γραμματόσημα πωλούνται σε ομάδες X_1, X_2, ..., X_k, κάθε μια εκ των οποίων περιέχει ορισμένα από τα γραμματόσημα της συλλογής και οι ομάδες μπορούν να έχουν επικαλύψεις.
Συγκεκριμένα, ο συλλέκτης επιθυμεί να συγκεντρώσει 10 γραμματόσημα Γ_1, Γ_2, ..., Γ_{10} τα οποία πωλούνται ως μέρος των διπλανών 6 ομάδων:

Ομάδα	Γραμματόσημα
X_1	$\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_5, \Gamma_7, \Gamma_8, \Gamma_{10}$
X_2	$\Gamma_2, \Gamma_3, \Gamma_6, \Gamma_8, \Gamma_9, \Gamma_{10}$
X_3	$\Gamma_1, \Gamma_3, \Gamma_4, \Gamma_7, \Gamma_9, \Gamma_{10}$
X_4	$\Gamma_2, \Gamma_5, \Gamma_6, \Gamma_7, \Gamma_8, \Gamma_9$
X_5	$\Gamma_3, \Gamma_6, \Gamma_7, \Gamma_8, \Gamma_9, \Gamma_{10}$
X_6	$\Gamma_1, \Gamma_3, \Gamma_4, \Gamma_5, \Gamma_7, \Gamma_9$

Να μοντελοποιηθεί ως πρόβλημα ικανοποιησιμότητας το πρόβλημα της ύπαρξης και εύρεσης δύο ομάδων που να περιέχουν όλα τα γραμματόσημα της συλλογής.

Προβλήματα ικανοποιησιμότητας

4. Ζητείται να χρωματισθούν οι παρακάτω 16 περιοχές με 4 χρώματα έτσι ώστε δύο γειτονικές περιοχές να έχουν διαφορετικό χρώμα:



Να μοντελοποιηθεί ως πρόβλημα ικανοποιησιμότητας το πρόβλημα ύπαρξης και εύρεσης ενός τέτοιου χρωματισμού. (Δύο περιοχές θεωρούνται γειτονικές αν το κοινό τους σύνορο περιέχει άπειρα σημεία.)
(Απάντηση: Βλέπε εδώ.)

4η ΔΙΑΛΕΞΗ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΛΟΓΙΚΗ

- **Προβλήματα ικανοποιησιμότητας**
  - **Αναγωγές σε 3-SAT**
  - **Τύποι Horn**
  - **Επάρκεια συνδέσμων**

Αναγωγές σε 3-SAT

Σε προηγούμενη ενότητα ορίσθηκε το γενικό πρόβλημα ικανοποιησιμότητας:

> **Το πρόβλημα της ικανοποιησιμότητας**: Δοθέντος ενός συνόλου Σ λογικών προτάσεων, να ευρεθεί εκτίμηση που να το ικανοποιεί, ή η απάντηση ότι δεν υπάρχει τέτοια εκτίμηση.

Δεδομένου ότι κάθε πρόταση του Σ μπορεί να γραφεί ισοδύναμα σε CNF μορφή, το παραπάνω πρόβλημα είναι ισοδύναμο με

> **Το πρόβλημα CNF-SAT**: Δοθείσης μιας λογικής πρότασης φ σε CNF μορφή, να ευρεθεί εκτίμηση που να την ικανοποιεί, ή η απάντηση ότι δεν υπάρχει τέτοια εκτίμηση.

Αναγωγές σε 3-SAT

Παρατήρηση: Αν και στο πρόβλημα CNF-SAT ασχολούμαστε μόνο με μια πρόταση, αυτό δεν μειώνει την γενικότητα ή τη δυσκολία του. Αυτό ισχύει διότι αν ένα σύνολο Σ αποτελείται από περισσότερες από μία προτάσεις $\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_m$, τότε γράφοντας κάθε μία από αυτές σε κανονική συζευκτική μορφή $\phi'_1, \phi'_2, \ldots, \phi'_m$, προκύπτει ότι το Σ είναι ικανοποιησιμο αν και μόνο αν η CNF πρόταση $\phi'_1 \wedge \phi'_2 \wedge \cdots \wedge \phi'_m$ είναι ικανοποιήσιμη.

Το πρόβλημα 3-CNF-SAT ή 3-SAT

Το πρόβλημα 3-CNF-SAT είναι μια ειδική περίπτωση του προβλήματος CNF-SAT, όπου κάθε παρένθεση της πρότασης ϕ περιέχει ακριβώς 3 όρους. Στην περίπτωση αυτή, λέμε ότι η ϕ είναι σε μορφή 3-CNF.

Η πρόταση

$$(p_1 \vee p_2 \vee p_3) \wedge (p_1 \vee \neg p_2 \vee p_3) \wedge (\neg p_1 \vee p_2 \vee p_4)$$

είναι σε μορφή 3-CNF.

Αν και το 3-CNF-SAT αποτελεί ειδική περίπτωση του CNF-SAT, τελικά είναι **ισοδύναμο** με το γενικό πρόβλημα CNF-SAT, όπως προκύπτει από την **αναγωγή** που ακολουθεί.

Αναγωγές σε 3-SAT

Από το CNF-SAT στο 3-CNF-SAT. Έστω ϕ μια πρόταση εκφρασμένη σε CNF ως $\phi_1 \wedge \cdots \wedge \phi_m$, όπου κάθε ϕ_i είναι διάζευξη από άτομα ή/και αρνήσεις ατόμων. Μπορούμε για κάθε ϕ_i να κατασκευάσουμε μια λογικά ισοδύναμη διάζευξη με ακριβώς 3 όρους ως εξής:

- Αν η ϕ_i περιέχει έναν ακριβώς όρο, έστω τον p_1, τότε είναι λογικά ισοδύναμη με την πρόταση ϕ_i':

  $$(p_1 \vee y_1 \vee y_2) \wedge (p_1 \vee \neg y_1 \vee y_2) \wedge (p_1 \vee y_1 \vee \neg y_2) \wedge (p_1 \vee \neg y_1 \vee \neg y_2)$$

  όπου y_1, y_2 νέα άτομα.
- Αν η ϕ_i περιέχει 2 όρους, έστω $\phi_i : p_1 \vee p_2$, τότε είναι λογικά ισοδύναμη με την πρόταση ϕ_i':

  $$(p_1 \vee p_2 \vee y_1) \wedge (p_1 \vee p_2 \vee \neg y_1)$$

  όπου y_1 νέο άτομο.

Αναγωγές σε 3-SAT

Από το CNF-SAT στο 3-CNF-SAT. Έστω ϕ μια πρόταση εκφρασμένη σε CNF ως $\phi_1 \wedge \cdots \wedge \phi_m$, όπου κάθε ϕ_i είναι διάζευξη από άτομα ή/και αρνήσεις ατόμων. Μπορούμε για κάθε ϕ_i να κατασκευάσουμε μια λογικά ισοδύναμη διάζευξη με ακριβώς 3 όρους ως εξής:

- Αν η ϕ_i περιέχει 3 ακριβώς άτομα, τότε δεν κάνουμε καμία αλλαγή
- Αν η ϕ_i περιέχει 4 ή περισσότερους όρους, έστω $\phi_i : p_1 \vee p_2 \vee \cdots \vee p_k$, $k > 3$ τότε την αντικαθιστούμε με την πρόταση ϕ_i':

$$\begin{aligned} &(p_1 \vee p_2 \vee y_1) \\ \wedge&(\neg y_1 \vee p_3 \vee y_2) \wedge (\neg y_2 \vee p_4 \vee y_3) \wedge \cdots \wedge (\neg y_{k-4} \vee p_{k-2} \vee y_{k-3}) \\ \wedge&(\neg y_{k-3} \vee p_{k-1} \vee p_k) \end{aligned}$$

  όπου $y_1, \ldots, y_{k-3}$ νέα άτομα.
  Εύκολα προκύπτει ότι υπάρχει εκτίμηση που ικανοποιεί την ϕ_i' αν και μόνο αν ο περιορισμός αυτής της εκτίμησης στα $p_1, \ldots, p_k$ ικανοποιεί την ϕ_i.

Άσκηση 23

Να γραφεί η πρόταση

$$\varphi = (p_1 \vee p_2 \vee \neg p_3 \vee \neg p_4 \vee p_5) \wedge (p_1 \vee \neg p_2)$$

σε μορφή 3-CNF.

Λύση: Η φ είναι λογικά ισοδύναμη με την πρόταση

$$(p_1 \vee p_2 \vee y_1) \vee (\neg y_1 \vee \neg p_3 \vee y_2) \vee (\neg y_2 \vee \neg p_4 \vee p_5) \vee (p_1 \vee \neg p_2 \vee y_4) \vee (p_1 \vee \neg p_2 \vee \neg y_4)$$

Αναγωγές σε 3-SAT

Με βάση αυτή την ισοδυναμία, η οποία ανάγει το πρόβλημα CNF-SAT στο πρόβλημα 3-CNF-SAT προκύπτει το συμπέρασμα ότι:

> Τα προβλήματα CNF-SAT και 3-CNF-SAT είναι ισοδύναμα από πλευράς δυσκολίας επίλυσης.

Επομένως αν βρεθεί ένας αλγόριθμος που δίνει ‘‘αποδοτική’’ λύση στο πρόβλημα 3-CNF-SAT, αυτός θα δώσει ‘‘αποδοτική’’ λύση και στο πρόβλημα CNF-SAT και άρα και στο γενικό πρόβλημα της ικανοποιησιμότητας (πρόβλημα SAT).

Παρατήρηση: Ενώ το πρόβλημα 3-CNF-SAT είναι δύσκολο, το πρόβλημα 2-CNF-SAT, όπου κάθε διάζευξη περιέχει ακριβώς δύο όρους, είναι εύκολο.

Αναγωγές σε 3-SAT

Άσκηση 24

Να μετασχηματισθούν σε μορφή 3-CNF-SAT οι τύποι:

1. $\phi \to \psi$

$$\phi \to \psi \mathrel{\models\!\!\!\dashv} \neg\phi \lor \psi \mathrel{\models\!\!\!\dashv} (\neg\phi \lor \psi \lor y_1) \land (\neg\phi \lor \psi \lor \neg y_1)$$

2. $((\phi \to \psi) \to \phi) \to \psi$

Από τον πίνακα αληθείας προκύπτει ότι $((\phi \to \psi) \to \phi) \to \psi \mathrel{\models\!\!\!\dashv} \phi \to \psi$*, οπότε η λύση είναι ίδια με την προηγούμενη.*

3. $(\neg\phi \lor (\phi \to \zeta)) \land (\neg\zeta \lor (\phi \to \psi))$

$$\mathrel{\models\!\!\!\dashv} (\neg\phi \lor \zeta \lor y) \land (\neg\phi \lor \zeta \lor \neg y) \land (\neg\zeta \lor \neg\phi \lor \psi)$$

Άσκηση 25

Να μετασχηματισθούν σε μορφή 3-CNF-SAT οι τύποι:

1. $(\neg\phi) \vee (\phi \wedge \psi)$

$$\boxed{\models\!\!\!\dashv (\neg\phi \vee \phi) \wedge (\neg\phi \vee \psi) \models\!\!\!\dashv \neg\phi \vee \psi \models\!\!\!\dashv (\neg\phi \vee \psi \vee y_1) \wedge (\neg\phi \vee \psi \vee \neg y_1)}$$

2. $(\neg\phi) \to (\psi \wedge (\zeta \vee \psi))$

$$\boxed{\models\!\!\!\dashv \phi \vee ((\psi \wedge \zeta) \vee \psi) \models\!\!\!\dashv \phi \vee \psi \models\!\!\!\dashv (\phi \vee \psi \vee y_1) \wedge (\phi \vee \psi \vee \neg y_1)}$$

Άσκηση 26

Να μετασχηματισθεί το πρόβλημα ικανοποιησιμότητας του συνόλου:

$$\Sigma = \{\neg p_1 \vee \neg p_2 \vee \neg p_5, \neg p_2, p_2 \to p_1, (p_3 \wedge p_2) \to p_4, \neg p_4 \vee \neg p_5, (p_4 \vee p_1)$$

σε μορφή CNF-SAT και στη συνέχεια σε μορφή 3-*CNF-SAT.*

Λύση:

$$\begin{aligned}
\Sigma \;\;&\models\!\mid (\neg p_1 \vee \neg p_2 \vee \neg p_5) \wedge (\neg p_2) \wedge (\neg p_2 \vee p_1) \wedge (\neg p_3 \vee \neg p_2 \vee p_4) \\
&\wedge (\neg p_4 \vee \neg p_5) \wedge (\neg p_4 \vee p_2) \wedge (\neg p_1 \vee p_2) \\
&\models\!\mid (\neg p_1 \vee \neg p_2 \vee \neg p_5) \wedge (\neg p_2 \vee y_1 \vee y_2) \wedge (\neg p_2 \vee y_1 \vee \neg y_2) \\
&\wedge (\neg p_2 \vee \neg y_1 \vee y_2) \wedge (\neg p_2 \vee \neg y_1 \vee \neg y_2) \\
&\wedge (\neg p_2 \vee p_1 \vee y_1) \wedge (\neg p_2 \vee p_1 \vee \neg y_1) \wedge (\neg p_3 \vee \neg p_2 \vee p_4) \\
&\wedge (\neg p_4 \vee \neg p_5 \vee y_1) \wedge (\neg p_4 \vee \neg p_5 \vee \neg y_1) \\
&\wedge (\neg p_4 \vee p_2 \vee y_1) \wedge (\neg p_4 \vee p_2 \vee \neg y_1) \\
&\wedge (\neg p_1 \vee p_2 \vee y_1) \wedge (\neg p_1 \vee p_2 \vee \neg y_1)
\end{aligned}$$

Τύποι Horn

Το πρόβλημα της ικανοποιησιμότητας δεν είναι δύσκολο σε όλες τις περιπτώσεις προτάσεων (π.χ. 2-CNF-SAT). Άλλη μια τέτοια εύκολη περίπτωση έχουμε όταν το σύνολο προτάσεων Σ περιέχει μόνο προτάσεις που ανήκουν σε μια κατηγορία που ονομάζονται *τύποι Horn*. Χάριν απλότητας, θα περιοριστούμε σε τρεις μορφές των τύπων Horn.

Τύποι Horn. Μια πρόταση ονομάζεται **τύπος Horn** αν γράφεται σε μία από τις τρεις μορφές:

α) p_k

β) $(p_1 \wedge p_2 \wedge p_3 \wedge \cdots \wedge p_k) \to p_{k+1}$

γ) $\neg p_1 \vee \neg p_2 \vee \cdots \vee \neg p_k$

όπου $p_1, p_2, \ldots, p_k, p_{k+1}$ είναι άτομα.

Στις μορφές β, γ, ανήκουν και προτάσεις της μορφής: $p_k \to p_{k+1}$, $\neg p_k$. Για παράδειγμα, οι προτάσεις $(p_1 \wedge p_2) \to p_1$, p_1, $\neg p_2 \vee \neg p_3$, $p_3 \to p_1$, $\neg p_2$ είναι τύποι Horn.

Τύποι Horn

Το πρόβλημα της ικανοποιησιμότητας στην περίπτωση των τύπων Horn μπορεί να λυθεί ακολουθώντας τον παρακάτω αλγόριθμο.

Είσοδος: Ένα σύνολο τύπων Horn
Έξοδος: Μια εκτίμηση που το ικανοποιεί, αν υπάρχει.

Βήμα 1: Θέσε ψευδείς τις εκτιμήσεις όλων των ατόμων, εκτός αυτών που περιέχονται **ως** προτάσεις στο Σ.

Βήμα 2: Όσο υπάρχει συνεπαγωγή η οποία δεν ικανοποιείται, θέσε την εκτίμηση του άτομου στο δεξιό της μέλος ως αληθή, και επανάλαβε μέχρις ότου όλες οι συνεπαγωγές ικανοποιούνται.

Βήμα 3: Έλεγξε μόνο τους τύπους οι οποίοι περιέχουν μόνο αρνήσεις ατόμων. Αν όλοι αυτοί οι τύποι είναι αληθείς, τότε επίστρεψε την εκτίμηση που βρέθηκε.
Αλλιώς, επίστρεψε ότι το σύνολο δεν ικανοποιείται.

Τύποι Horn

Άσκηση 27

Έστω Σ *το σύνολο που αποτελείται από τους εξής τύπους Horn.*
$\Sigma = \{(p_1 \wedge p_2 \wedge p_3) \rightarrow p_1, p_1 \rightarrow p_2, (p_1 \wedge p_3) \rightarrow p_4, (p_1 \wedge p_2) \rightarrow p_4, p_1, p_4, \neg p_3 \vee \neg p_1 \vee \neg p_2\}$.
Να εξετασθεί αν το σύνολο Σ *είναι ικανοποιήσιμο.*

Τύποι Horn

Λύση: Το Σ περιέχει 4 άτομα: p_1, p_2, p_3, p_4.
Βήμα 1: Αρχικά θέτουμε όλα τα άτομα ψευδή εκτός από τα p_1, p_4, οπότε έχουμε

$$v(p_2) = v(p_3) = 0, \quad v(p_1) = v(p_4) = 1$$

Βήμα 2: Η συνεπαγωγή $p_1 \to p_2$ είναι ψευδής, άρα θέτουμε p_2 αληθές, οπότε έχουμε

$$v(p_3) = 0, \quad v(p_1) = v(p_2) = v(p_4) = 1$$

Τώρα, όλες οι συνεπαγωγές είναι αληθείς.
Βήμα 3: Η πρόταση $\neg p_3 \vee \neg p_1 \vee \neg p_2$ είναι αληθής, αφού επαληθεύται από την εκτίμηση v.
Άρα, η εκτίμηση v που βρήκαμε ικανοποιεί το Σ.

Τύποι Horn

Παρατηρήσεις:

1. Παρατηρήστε ότι στο Βήμα 2
   - αν η εκτίμηση ενός ατόμου γίνει αληθή, ποτέ δεν θα αλλάξει σε ψευδής
   - μπορεί η εκτίμηση μιας συνεπαγωγής να αλλάξει (μια φορά) από αληθής σε ψευδής
   - αν η εκτίμηση μιας συνεπαγωγής αλλάξει από ψευδής σε αληθής, ποτέ δεν πρόκειται να αλλάξει ξανά, οπότε μπορούμε να την αγνοήσουμε στους μελλοντικούς ελέγχους
2. Οι τύποι Horn βρίσκονται στην καρδιά της γλώσσα προγραμματισμού Prolog. Στην γλώσσα αυτή τα προγράμματα αποτελούνται από λογικές εκφράσεις που δηλώνουν τις επιθυμητές ιδιότητες της εξόδου του προγράμματος. Η βασική λειτουργία των μεταγλωτιστών της Prolog είναι ο προηγούμενος αλγόριθμος.

Ασκήσεις προς επίλυση

Να εξετασθεί αν τα επόμενα σύνολα τύπων Horn είναι ικανοποιήσιμα.

1. $\{(p_1 \wedge p_3 \wedge p_5) \to p_4, \neg p_1 \vee \neg p_4 \vee \neg p_2, p_3 \to p_1, \neg p_5 \vee \neg p_1 \vee \neg p_2, p_3, (p_1 \wedge p_3) \to p_5\}$
   Απάντηση. Ικανοποιήσιμο, με $v(p_1) = v(p_3) = v(p_4) = v(p_5) = 1$ και $v(p_2) = 0$.
2. $\{p_6, \neg p_3 \vee \neg p_4 \vee \neg p_2, (p_6 \wedge p_3) \to p_1, \neg p_1 \vee \neg p_5 \vee \neg p_3, (p_1 \wedge p_6) \to p_4, p_6 \to p_3\}$
   Απάντηση. Ικανοποιήσιμο, με $v(p_1) = v(p_3) = v(p_4) = v(p_6) = 1$ και $v(p_2) = v(p_5) = 0$.
3. $\{\neg p_1 \vee \neg p_2 \vee \neg p_5, \neg p_2, p_2 \to p_1, (p_3 \wedge p_2 \wedge p_5) \to p_4, \neg p_4 \vee \neg p_5, (p_4 \wedge p_1) \to p_2, p_1\}$.
   Απάντηση. Ικανοποιήσιμο, με $v(p_1) = 1$ και $v(p_2) = v(p_3) = v(p_4) = v(p_5) = 0$.

Επάρκεια συνδέσμων

Παρατήρηση:
Από τις δύο κανονικές μορφές CNF και DNF είναι φανερό ότι κάθε πρόταση ϕ είναι λογικά ισοδύναμη με μια πρόταση που περιέχει μόνο τους συνδέσμους $\neg$ και $\vee$, ή μόνο τους συνδέσμους $\neg$ και $\wedge$.
Πράγματι, όπως εύκολα μπορούμε να επαληθεύσουμε ισχύουν οι ισοδυναμίες:

$$
\begin{array}{ll}
(\varphi \to y) \mathrel{\models\!\!\!\dashv} (\neg\varphi \vee y) & \\
(\varphi \leftrightarrow y) \mathrel{\models\!\!\!\dashv} (\varphi \to y) \wedge (y \to \varphi) & (\text{άρα } (\varphi \leftrightarrow y) \mathrel{\models\!\!\!\dashv} (\neg\varphi \vee y) \wedge (\neg y \vee \varphi)) \\
\neg(\varphi \wedge y) \mathrel{\models\!\!\!\dashv} \neg\varphi \vee \neg y & (\text{άρα } \varphi \wedge y \mathrel{\models\!\!\!\dashv} \neg(\neg\varphi \vee \neg y)) \\
\neg(\varphi \vee y) \mathrel{\models\!\!\!\dashv} \neg\varphi \wedge \neg y & (\text{άρα } \varphi \vee y \mathrel{\models\!\!\!\dashv} \neg(\neg\varphi \wedge \neg y))
\end{array}
$$

Άρα, κάθε πρόταση φ που εκφράζεται από τα άτομα και τους λογικούς συνδέσμους $\neg$, $\vee$, $\wedge$, $\to$, $\leftrightarrow$ (δηλαδή κάθε πρόταση του P) μπορεί να εκφραστεί χρησιμοποιώντας μόνο δύο από τους τρεις πρώτους.

Στην πραγματικότητα ισχύει κάτι ακόμα πιο ισχυρό.

Επάρκεια συνδέσμων

Μέχρι τώρα ορίσαμε στην γλώσσα P του προτασιακού λογισμού το μονομελή σύνδεσμο $\neg$ και τους διμελείς συνδέσμους $\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$.
Ο μονομελής σύνδεσμος $\neg$ είναι στην ουσία μια απεικόνιση $F : P \mapsto P$ (με $F(\varphi) = \neg\varphi$) και συνοδεύεται από τον πίνακα αληθείας:

φ	$F(\varphi)$
1	0
0	1

Ομοίως ο διμελής σύνδεσμος $\wedge$ είναι μια απεικόνιση $F : P^2 \mapsto P$ (με $F(\varphi, y) = \varphi \wedge y$) και συνοδεύεται από τον πίνακα αληθείας

φ	y	$F(\varphi, y)$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

Αντίστοιχα έχουν ορισθεί και οι διμελείς σύνδεσμοι $\vee, \rightarrow, \leftrightarrow$.

Επάρκεια συνδέσμων

Τα παραπάνω γενικεύονται προφανώς για n-μελείς συνδέσμους ως εξής:

Κάθε απεικόνιση $F : P^n \mapsto P$ που συνοδεύεται από έναν πίνακα αληθείας για τις τιμές της $F(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n)$ (ή μια συνάρτηση $G_F : \{0,1\}^n \mapsto \{0,1\}$) ονομάζεται ***n*-μελής σύνδεσμος** στο P.

Παράδειγμα Η συνάρτηση $G_F : \{0,1\}^3 \mapsto \{0,1\}$ με:

φ_1	φ_2	φ_3	$G_F(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$
1	1	1	1
1	1	0	0
1	0	1	0
1	0	0	1
0	1	1	1
0	1	0	0
0	0	1	0
0	0	0	1

είναι ένας τριμελής σύνδεσμος.

Επάρκεια συνδέσμων

Αποδεικνύεται το παρακάτω γενικό αποτέλεσμα.

Θεώρημα 28

Το σύνολο $\{\wedge, \vee, \neg, \rightarrow, \leftrightarrow\}$ *(άρα και τα σύνολα* $\{\wedge, \vee, \neg\}$, $\{\wedge, \neg\}$, $\{\vee, \neg\}$*) είναι* ***επαρκές****. Δηλαδή, οποιοσδήποτε n-μελής σύνδεσμος F είναι ισοδύναμος (και άρα μπορεί να αντικατασταθεί) με μια πρόταση* φ *η οποία χρησιμοποιεί μόνο τους συνδέσμους* $\wedge$, $\vee$, $\neg$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$ *(ή όπως είδαμε ήδη μόνο τους* $\neg$, $\wedge$, $\vee$ *ή μόνο τους* $\neg$, $\wedge$ *ή μόνο τους* $\neg$, $\vee$*).*

Άρα οι σύνδεσμοι $\wedge$, $\vee$, $\neg$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$ (ή και μόνο οι $\neg$, $\wedge$, $\vee$ ή μόνο οι $\neg$, $\wedge$ ή μόνο οι $\neg$, $\vee$) επαρκούν για να εκφρασθεί μέσω αυτών οποιοσδήποτε άλλος σύνδεσμος.

Επάρκεια συνδέσμων

Άσκηση 29 (Επάρκεια του NAND)

Να αποδειχθεί ότι ο σύνδεσμος $|$ *(που ονομάζεται* ***σύνδεσμος του*** **Sheffer***) με πίνακα αληθείας*

φ	y	$\varphi \vert y$
1	1	0
1	0	1
0	1	1
0	0	1

είναι επαρκής για να εκφράσει οποιοδήποτε λογικό σύνδεσμο.

Λύση: Αφού το σύνολο $\{\neg, \vee, \wedge\}$ είναι επαρκές, αρκεί να εκφραστούν οι τρεις αυτοί σύνδεσμοι συναρτήσει του $|$.
Χρησιμοποιώντας την ισοδυναμία $p|q \models\!\!\!\!\dashv \neg(p \wedge q)$, έχουμε ότι

$$\begin{aligned}
\neg p &\models\!\!\!\!\dashv \neg(p \wedge p) \models\!\!\!\!\dashv p|p \\
p \vee q &\models\!\!\!\!\dashv \neg(\neg p \wedge \neg q) \models\!\!\!\!\dashv (\neg p)|(\neg q) \models\!\!\!\!\dashv (p|p)|(q|q) \\
p \wedge q &\models\!\!\!\!\dashv \neg\neg(p \wedge q) \models\!\!\!\!\dashv \neg(p|q) \models\!\!\!\!\dashv (p|q)|(p|q)
\end{aligned}$$

Άρα το μονοσύνολο $\{|\}$ είναι επαρκές.

Επάρκεια συνδέσμων

Πρόταση 30

Το σύνολο $\{\wedge, \rightarrow\}$ *είναι μη επαρκές.*

Επάρκεια συνδέσμων

Απόδειξη: Θα δείξουμε ότι ο σύνδεσμος $\neg$ για παράδειγμα δεν μπορεί να αναχθεί στους $\wedge, \rightarrow$. Δηλαδή θα δείξουμε ότι αν p είναι ένα άτομο, τότε η $\neg p$ δεν μπορεί να είναι ισοδύναμη με κάποια πρόταση σ που περιέχει την p και μόνο τους συνδέσμους $\wedge, \rightarrow$.
Έστω λοιπόν ότι η $\neg p$ είναι ισοδύναμη με μια τέτοια σ, δηλαδή $\sigma \models\!\dashv \neg p$, δηλαδή $v(p) = 1 \Leftrightarrow v(\sigma) = 0$.
Θα φτάσουμε σε άτοπο. Αρκεί να δείξουμε ότι $v(p) = 1 \Rightarrow v(\sigma) = 1$.
Θα χρησιμοποιήσουμε επαγωγή.
Αν η σ είναι άτομο, τότε η σ είναι η p (αφού υποθέσαμε ότι η σ περιέχει την p). Τότε όμως, προφανώς, $v(p) = 1 \Rightarrow v(\sigma) = 1$.
Έστω τώρα ότι ισχύει για τις προτάσεις φ και y. Δηλαδή
$v(p) = 1 \Rightarrow (v(\varphi) = 1$ και $v(y) = 1)$.
Τότε όμως αν $\sigma = \varphi \wedge y$ έχουμε ότι $v(\sigma) = v(\varphi \wedge y) = 1$, καθώς επίσης και αν $\sigma = \varphi \rightarrow y$ τότε έχουμε ότι $v(\sigma) = v(\varphi \rightarrow y) = 1$.
Άρα η επαγωγή ολοκληρώθηκε (αφού ασχολούμαστε μόνο με το σύνολο $\{\wedge, \rightarrow\}$) και το σύνολο $\{\wedge, \rightarrow\}$ δεν είναι επαρκές.

Επάρκεια συνδέσμων

Ορισμός

*Έστω $\varphi \in P$ και η φ δεν περιέχει τους συνδέσμους $\rightarrow, \leftrightarrow$. Η πρόταση φ^d που προκύπτει από τη φ αν εναλλάξουμε τους συνδέσμους $\wedge, \vee$ της λέγεται **δυϊκή** της φ.*

Θεώρημα 31 (Θεώρημα Δυϊκότητας)

$\varphi \models\mkern-9mu\dashv y \Leftrightarrow \varphi^d \models\mkern-9mu\dashv y^d$.

Έτσι, για παράδειγμα, αφού όπως ήδη είδαμε ισχύει ότι (προηγούμενο Παράδειγμα 1): $\neg(\varphi \wedge y) \models\mkern-9mu\dashv (\varphi \wedge \neg y) \vee (\neg\varphi \wedge y) \vee (\neg\varphi \wedge \neg y)$, (η DNF της $\neg(\varphi \wedge y)$), τότε ισχύει και ότι:
$\neg(\varphi \vee y) \models\mkern-9mu\dashv (\varphi \vee \neg y) \wedge (\neg\varphi \vee y) \wedge (\neg\varphi \vee \neg y)$, (η CNF της $\neg(\varphi \vee y)$).

Ασκήσεις προς επίλυση

1. Πόσοι n-μελείς σύνδεσμοι υπάρχουν για κάθε n; Βρείτε αναλυτικά όλους τους μονομελείς συνδέσμους.
2.
    1. Να δοθεί αναδρομικός ορισμός της δυϊκότητας.
    2. Να δειχθεί ότι $(\varphi^d)^d \models\mid \varphi$.
3. Να δειχθεί ότι ο σύνδεσμος $\vee$ μπορεί να εκφραστεί μόνο με τη βοήθεια του συνδέσμου $\rightarrow$.
4. Να δειχθεί ότι το σύνολο $\{\neg, \rightarrow\}$ είναι επαρκές.
5. Έστω η διμελής πράξη "$\downarrow$", όπου $G_{\downarrow}(0,0) = 1$ και $G_{\downarrow}(1,1) = G_{\downarrow}(1,0) = G_{\downarrow}(0,1) = 0$. Βρείτε τον πίνακα αληθείας του συνδέσμου και δείξτε ότι το $\{\downarrow\}$ είναι επαρκές.
6. Μετατρέψτε τις παρακάτω προτάσεις σε DNF και CNF:

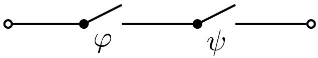
$$\neg(p_1 \rightarrow p_2) \vee (\neg p_1 \wedge p_3), \qquad p_1 \rightarrow ((p_2 \wedge \neg p_1) \vee p_3).$$

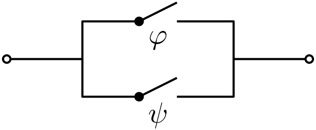
7. Να βρεθεί μια πρόταση φ που περιέχει τα άτομα p, q, r και είναι αληθής όταν ακριβώς ένα από τα p, q, r είναι αληθές.
8. Να βρεθεί μια πρόταση φ ώστε η πρόταση ψ να είναι ταυτολογία, όταν
   1. $\psi = ((\varphi \wedge q) \to \neg p) \to ((p \to \neg q) \to \varphi)$
   2. $\psi = ((r \to (\neg q \wedge p)) \to \varphi) \to (\varphi \wedge (p \to q) \wedge r)$.
9. Να βρεθεί μια πρόταση φ που περιέχει τα άτομα p, q, r τέτοια ώστε
   1. $p \wedge \varphi \models\!\!\!\mid p \wedge q$ και $p \vee \varphi \models\!\!\!\mid p \vee r$.
   2. $(r \to \varphi) \models\!\!\!\mid (r \to (p \wedge q))$ και $(\varphi \to r) \models\!\!\!\mid (\neg(p \vee q) \to r)$.
   3. $(r \to \varphi) \models\!\!\!\mid (q \to (\neg p \vee r))$ και $((r \to q) \to p) \models\!\!\!\mid (\neg p \to \neg\varphi$.
10. Δεδομένου ότι γνωρίζουμε την πλήρη κανονική διαζευτική μορφή της πρότασης φ, να βρεθεί η πλήρης κανονική διαζευτική και συζευκτική μορφή της πρότασης $\neg\varphi$.

Κανονικές μορφές - Επάρκεια συνδέσμων

11. Δεδομένου ότι γνωρίζουμε τις πλήρεις κανονικές διαζευκτικές μορφές των προτάσεων φ και ψ, να βρεθεί πώς μπορούμε να βρούμε τις πλήρεις κανονικές διαζευτικές και συζευκτικές μορφές των προτάσεων
    1. $\varphi \vee \psi$
    2. $\varphi \wedge \psi$.
    3. $\varphi \rightarrow \psi$.
12. Βρείτε το σύνδεσμο $F(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$ για τον οποίο:
    α) $v(F) = 1 \Leftrightarrow v(\varphi_1) + v(\varphi_2) + v(\varphi_3) = 2$,
    β) $v(F) = 1 \Leftrightarrow v(\varphi_1) + v(\varphi_2) + v(\varphi_3) \geq 2$.

13. Μια πρόταση $\varphi(p_1, \ldots, p_n)$ μοιάζει με ένα ηλεκτρικό κύκλωμα όπου τα p_i είναι διακόπτες. Κάθε διακόπτης έχει δύο δυνατές καταστάσεις, να είναι κλειστός ή ανοιχτός (αλήθεια - ψεύδος), πράγμα που συνεπάγεται δύο καταστάσεις και για το κύκλωμα: περνάει ή δεν περνάει ρεύμα. Τα p_i, $\neg p_i$ αντιστοιχούν στον ίδιο διακόπτη που νοείται ανοιχτός (κλειστός) σαν p_i και κλειστός (ανοιχτός) σαν $\neg p_i$. Έτσι, οι προτάσεις $\varphi \wedge \psi$ και $\varphi \vee \psi$ παριστούν τα στοιχειώδη κυκλώματα αντίστοιχα:

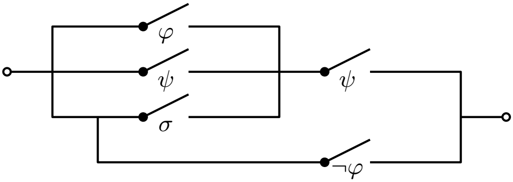




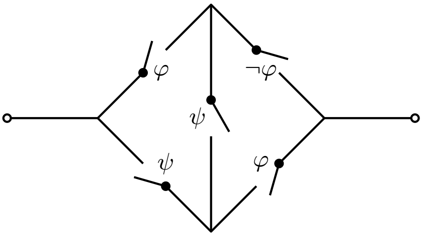
Κανονικές μορφές - Επάρκεια συνδέσμων

α) Ποιές προτάσεις αντιστοιχούν στα κυκλώματα:

i)



ii)



Κανονικές μορφές - Επάρκεια συνδέσμων

β) Κατασκευάστε τα κυκλώματα των προτάσεων

$$(\varphi \vee \psi) \wedge \sigma, \qquad (\varphi \vee \sigma) \wedge (\psi \vee \sigma), \qquad (\varphi \to \psi) \wedge (\psi \to \varphi).$$

γ) Κατασκευάστε κύκλωμα με τρεις διακόπτες τέτοιο ώστε να έχει ρεύμα αν και μόνο αν δύο τουλάχιστον από τους διακόπτες είναι κλειστοί.

5η ΔΙΑΛΕΞΗ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΛΟΓΙΚΗ

- **Αξιωματικοποίηση του Προτασιακού Λογισμού**
  - **Απόδειξη, Λογική συνέπεια, Θεώρημα**
  - **Συνέπεια, Ορθότητα, Πληρότητα**
- **Αρχή της απόφασης**

Αξιωματικοποίηση του Προτασιακού Λογισμού, πληρότητα

Μέχρι τώρα, ελέγχαμε αν $\varphi \models y$ με πίνακες αληθείας (**σημασιολογική μέθοδος**). Στα μαθηματικά όμως συνήθως δεν δουλεύουμε έτσι. Θέλουμε αποδείξεις (προτάσεων, θεωρημάτων) από άλλες (βασικές) προτάσεις (αξιώματα) με τη βοήθεια συγκεκριμένων κανόνων παραγωγής (**συντακτική μέθοδος**). Η μέθοδος αυτή συνίσταται στην ύπαρξη:

1. Μιας γλώσσας,
2. Κανόνων σχηματισμού των προτάσεων της γλώσσας,
3. Αξιωμάτων (πεπερασμένων σε πλήθος, ή και άπειρων αλλά ‘‘αναγνωρίσιμων’’),
4. Κανόνων παραγωγής που να οδηγούν **μηχανικά** από ορισμένες προτάσεις σε άλλες, με **μοναδικό κριτήριο τη μορφή** (σύνταξη).

Αξιωματικοποίηση του Προτασιακού Λογισμού, πληρότητα

Παίρνουμε λοιπόν:

1. Τη γλώσσα L του Π.Λ. που αποτελείται από
   - τα άτομα p_i, $i \in \mathbb{N}^*$,
   - τους συνδέσμους $\neg, \to$,
   - τις παρενθέσεις.
2. Τους κανόνες σχηματισμού:
   - Τα p_i είναι προτάσεις.
   - Αν φ, y: προτάσεις, τότε $\neg\varphi, \varphi \to y$: προτάσεις.
   - Δεν υπάρχουν άλλες προτάσεις.

1. Αξιώματα: προτάσεις που είναι πάντα αληθείς (δηλαδή ταυτολογίες). Διαλέγουμε όσο γίνεται λιγότερες, κατάλληλες όμως, και αρκετές για να μπορούμε να συμπεραίνουμε τις υπόλοιπες προτάσεις όσο γίνεται ευκολότερα. Διαλέγουμε τα αξιώματα (αξιωματικά σχήματα με προτασιακές μεταβλητές τις φ, y, σ):

$$\begin{array}{|ll|}\hline \Pi_1: & \varphi \to (y \to \varphi). \\ \Pi_2: & (\varphi \to (y \to \sigma)) \to ((\varphi \to y) \to (\varphi \to \sigma)). \\ \Pi_3: & (\neg\varphi \to \neg y) \to ((\neg\varphi \to y) \to \varphi). \\ \hline \end{array}$$

2. (Μοναδικός) κανόνας παραγωγής (**Modus Ponens - M.P., ή Κανόνας της Απόσπασης**):

$$\{\varphi, \varphi \to y\} \models y.$$

Παρατήρηση: Για λόγους συντομίας θα χρησιμοποιούμε και τους συνδέσμους $\wedge, \vee, \leftrightarrow$. Δηλαδή θα γράφουμε $\varphi \wedge y$ αντί για $\neg(\varphi \to \neg y)$,
$\varphi \vee y$ αντί για $\neg\varphi \to y$,
$\varphi \leftrightarrow y$ αντί για $(\varphi \to y) \wedge (y \to \varphi)$
(δηλαδή, αντί για $\neg((\varphi \to y) \to \neg(y \to \varphi))$).

Ορισμός

Έστω $\Sigma \subseteq P$ και $\varphi \in P$. ***Απόδειξη της φ από το Σ*** *λέγεται μια πεπερασμένη ακολουθία προτάσεων $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$, τέτοια ώστε $\varphi_n = \varphi$ και κάθε φ_i είναι*

- *i)* *αξίωμα, ή*
- *ii)* *πρόταση του Σ, ή*
- *iii)* *παράγεται με το M.P. από δύο προηγούμενες προτάσεις της ακολουθίας*
  (δηλαδή, υπάρχουν $j, k < i$ με $\varphi_j = (\varphi_k \to \varphi_i)$).

Λέμε ότι η φ **παράγεται** ή **αποδεικνύεται** από το Σ, ή είναι **λογική συνέπεια** του Σ και γράφουμε $\mathbf{\Sigma} \vdash \varphi$, αν υπάρχει μια απόδειξη της φ από το Σ.
Αν $\Sigma = \{y\}$, τότε γράφουμε $\boldsymbol{y} \vdash \varphi$.
Αν $\Sigma = \emptyset$ (δηλαδή αν η φ παράγεται μόνο από τα αξιώματα) τότε λέμε ότι η φ είναι **θεώρημα** και γράφουμε $\vdash \varphi$.

Παραδείγματα απόδειξης

α) Η πρόταση $\varphi \to \varphi$ είναι θεώρημα, δηλαδή $\vdash \varphi \to \varphi$.

1. $(\varphi \to ((\varphi \to \varphi)\to\varphi)) \to ((\varphi \to (\varphi \to \varphi)) \to (\varphi \to \varphi))$ (από Π_2, με $y = \varphi \to \varphi$ και $\sigma = \varphi$)
2. $\varphi \to ((\varphi \to \varphi) \to \varphi)$ (από Π_1, με $y = \varphi \to \varphi$)
3. $(\varphi \to (\varphi \to \varphi)) \to (\varphi \to \varphi)$, (από 1, 2 και M.P.)
4. $\varphi \to (\varphi \to \varphi)$, (από Π_1 με $y = \varphi$)
5. $\varphi \to \varphi$, (από 3, 4 και M.P.)

β) Από τις προτάσεις $\varphi \to y$, $y \to \sigma$ παράγεται η πρόταση $\varphi \to \sigma$, δηλαδή
$\{\varphi \to y, y \to \sigma\} \vdash \varphi \to \sigma$.

1. $\varphi \to y$, (από υπόθεση)
2. $y \to \sigma$, (από υπόθεση)
3. $(y \to \sigma) \to (\varphi \to (y \to \sigma))$, (από Π_1, με $\varphi = y \to \sigma$ και $\psi = \varphi$)
4. $\varphi \to (y \to \sigma)$, (από 3, 2 και M.P.)
5. $(\varphi \to (y \to \sigma)) \to ((\varphi \to y) \to (\varphi \to \sigma))$, ($\Pi_2$)
6. $(\varphi \to y) \to (\varphi \to \sigma)$, (από 5, 4 και M.P.)
7. $\varphi \to \sigma$, (από 6, 1 και M.P.)

Αξιωματικοποίηση του Προτασιακού Λογισμού, πληρότητα

Στην επόμενη πρόταση αποδεικνύεται ότι η λογική συνέπεια έχει αντίστοιχες ιδιότητες με το λογικό συμπέρασμα.

Πρόταση 4

i) *Αν* $T \vdash \varphi$ *και* $T \subseteq \Sigma$, *τότε* $\Sigma \vdash \varphi$. *Αν* $\vdash \varphi$, *τότε* $\Sigma \vdash \varphi$.

ii) *Αν* $\Sigma \vdash \varphi$, *τότε υπάρχει πεπερασμένο* $\Sigma_0 \subseteq \Sigma$ *με* $\Sigma_0 \vdash \varphi$.

iii) *Αν* $\Sigma \vdash \varphi$ *και* $\Sigma \vdash \varphi \to y$, *τότε* $\Sigma \vdash y$.

Αξιωματικοποίηση του Προτασιακού Λογισμού, πληρότητα

Το επόμενο θεώρημα μας εξασφαλίζει ότι αν από ένα σύνολο παράγεται μια πρόταση y τότε υπάρχει πρόταση ϕ στο σύνολο ώστε οι υπόλοιπες προτάσεις να παράγουν την πρόταση $\phi \to y$.

Θεώρημα Παραγωγής (**Deduction Theorem**)

Αν $\Sigma \subseteq P$ *και* $\varphi, y \in P$, *τότε*

$$\Sigma \cup \{\varphi\} \vdash y \Leftrightarrow \Sigma \vdash \varphi \to y.$$

Επίσης (για $\Sigma = \emptyset$*),* $\varphi \vdash y \Leftrightarrow \; \vdash \varphi \to y$.

Αξιωματικοποίηση του Προτασιακού Λογισμού, πληρότητα

Από τις προηγούμενες προτάσεις μπορούν να αποδειχθούν τα επόμενα θεωρήματα.

α) $\vdash \varphi \to \neg\neg\varphi$,

β) $\vdash (\varphi \to y) \to (\neg y \to \neg\varphi)$,

γ) $\vdash (\neg\varphi \to \neg y) \to (y \to \varphi)$,

δ) $\vdash \varphi \wedge y \to y \wedge \varphi$,

ε) $\vdash \varphi \wedge y \to y$,

στ) $\vdash \varphi \wedge y \to \varphi$,

ζ) $\vdash \varphi \to (y \to \varphi \wedge y)$,

η) $\vdash \varphi \to (\neg\varphi \to y)$.

Επειδή, η αποδεικτική διαδικασία που ορίσαμε λαμβάνει υπόψη μόνο την μορφή (σύνταξη) των προτάσεων είναι σημαντικό να παρατηρήσουμε ότι αν δεχτούμε ταυτόχρονα τις προτάσεις ϕ και $\neg\phi$ τότε μπορούμε να αποδείξουμε οποιαδήποτε πρόταση του προτασιακού λογισμού!

Ορισμός

Ένα σύνολο Σ λέγεται ***συνεπές*** *αν δεν υπάρχει πρόταση φ με $\Sigma \vdash \varphi \wedge \neg\varphi$. Αλλιώς, το σύνολο Σ λέγεται* ***ασυνεπές****.*

Αξιωματικοποίηση του Προτασιακού Λογισμού, πληρότητα

Πρόταση 5

Αν το Σ είναι ασυνεπές, τότε $\Sigma \vdash y$, για κάθε $y \in P$.

Απόδειξη.

Έστω $\Sigma \vdash \varphi \wedge \neg\varphi$. Τότε, βάσει των προηγούμενων θεωρημάτων, έχουμε:

1. $\Sigma \vdash \varphi$, (από στ, και *iii* της Πρότασης 4)
2. $\Sigma \vdash \neg\varphi$, (από ε, και *iii* της Πρότασης 4)
3. $\Sigma \vdash \varphi \rightarrow (\neg\varphi \rightarrow y)$, (από η)
4. $\Sigma \vdash \neg\varphi \rightarrow y$, (από 3, 1 και M.P.)
5. $\Sigma \vdash y$, (από 4, 2 και M.P.)

$\square$

Το θεώρημα αυτό δηλώνει ότι από ένα ασυνεπές σύνολο μπορούμε να αποδείξουμε τα πάντα!

Για το σύνολο των αξιωμάτων $\{\Pi_1, \Pi_2, \Pi_3\}$ αποδεικνύεται η επόμενη πρόταση.

Πρόταση 6

Το σύνολο $\{\Pi_1, \Pi_2, \Pi_3\}$ *είναι συνεπές.*

Αξιωματικοποίηση του Προτασιακού Λογισμού, πληρότητα

Το επόμενο θεώρημα μας εξασφαλίζει ότι η λογική συνέπεια είναι συμβατή με το λογικό συμπέρασμα.

Θεώρημα Ορθότητας (**Soundness Theorem**)

Αν $\Sigma \vdash \varphi$, τότε $\Sigma \models \varphi$. δηλαδή, αν υπάρχει μια απόδειξη της φ από το Σ, τότε η φ είναι λογικό συμπέρασμα του Σ.
Επίσης (για $\Sigma = \emptyset$), αν $\vdash \varphi$, τότε $\models \varphi$, δηλαδή, αν η φ είναι θεώρημα, τότε είναι ταυτολογία.

Πρόταση 7

Αν $\Sigma \subseteq P$ και $\varphi \in P$, τότε

$$\Sigma \nvdash \varphi \Leftrightarrow \Sigma \cup \{\neg\varphi\}: \text{ συνεπές.}$$

Παρατήρηση: Το Θεώρημα της Ορθότητας δηλώνει ότι αν μπορούμε να αποδείξουμε μια πρόταση, αυτή μπορεί να θεωρηθεί ως ένα λογικό συμπέρασμα.
Όπως θα δούμε αμέσως, ισχύει και το αντίστροφο (Θεώρημα Πληρότητας). Δηλαδή, αν έχουμε ένα λογικό συμπέρασμα, τότε μπορούμε να το αποδείξουμε.
Δηλαδή, τα σύμβολα $\models$ και $\vdash$ είναι ισοδύναμα, και το τυπικό σύστημα του Π. Λ. λέγεται πλήρες.

Αξιωματικοποίηση του Προτασιακού Λογισμού, πληρότητα

Δίδεται τώρα το Θεώρημα Πληρότητας, διατυπωμένο με δύο ισοδύναμες μορφές.

Θεώρημα Πληρότητας (Completeness Theorem 1)

Αν ένα σύνολο προτάσεων Σ είναι συνεπές, τότε είναι ικανοποιήσιμο.

Η διατύπωση αυτή συνδέει τη (συντακτική) έννοια της συνέπειας με τη (σημασιολογική) έννοια του μοντέλου.
Η δεύτερη εκδοχή του Θεωρήματος της Πληρότητας έχει, όπως ήδη αναφέρθηκε, τη μορφή του αντιστρόφου του Θεωρήματος Ορθότητας:

Θεώρημα Πληρότητας (Completeness Theorem 2)

Για κάθε λογικό συμπέρασμα φ του Σ, υπάρχει μια απόδειξή του φ από το Σ:

$$\Sigma \models \varphi \Rightarrow \Sigma \vdash \varphi.$$

Επίσης, (για $\Sigma = \emptyset$): $\models \varphi \Rightarrow \ \vdash \varphi$, δηλαδή, κάθε ταυτολογία είναι ένα θεώρημα.

Παρατήρηση: Λόγω του Θεωρήματος Πληρότητας, θεμελιώνονται οι παρακάτω ισοδυναμίες:

Σημασιολογική έννοια	Συντακτική έννοια
φ: ταυτολογία, $\models \varphi$	φ: θεώρημα, $\vdash \varphi$
φ: λογικό συμπέρασμα του Σ, $\Sigma \models \varphi$	φ: αποδεικνύεται από το Σ, $\Sigma \vdash \varphi$
Σ: ικανοποιήσιμο	Σ: συνεπές

Αξιωματικοποίηση του Προτασιακού Λογισμού, πληρότητα

Όπως ήδη είπαμε, μπορούμε με διάφορους τρόπους να ''αξιωματικοποιήσουμε'' τον Π.Λ. (δηλαδή να αλλάξουμε τους συνδέσμους που χρησιμοποιούμε, ή τα αξιώματα, ή τους κανόνες παραγωγής).
Έτσι, για παράδειγμα, στο **σύστημα Hilbert - Ackermann** χρησιμοποιούνται οι σύνδεσμοι $\vee$, $\neg$ και τα αξιώματα

1) $\varphi \vee \varphi \rightarrow \varphi$,
2) $\varphi \rightarrow \varphi \vee y$,
3) $\varphi \vee y \rightarrow y \vee \varphi$,
4) $(\varphi \rightarrow \sigma) \rightarrow (y \vee \varphi \rightarrow y \vee \sigma)$,

Κανόνες παραγωγής:
1) Modus Ponens
2) Κανόνας αντικατάστασης

ενώ στο **σύστημα Rosser** χρησιμοποιούνται οι σύνδεσμοι $\wedge$, $\neg$ και τα αξιώματα

1) $\varphi \to \varphi \wedge \varphi$,
2) $\varphi \wedge y \to \varphi$,
3) $(\varphi \to y) \to (\neg(y \wedge \sigma) \to (\neg(\sigma \wedge y))$.

Κανόνας παραγωγής: Modus Ponens

Αρχή της απόφασης

Η αρχή της απόφασης (resolution principle) οδηγεί, όπως θα δούμε, σε ένα τρόπο απόδειξης που είναι στην ουσία μια παραλλαγή της μεθόδου της εις άτοπον απαγωγής. Δίνουμε πρώτα τους ακόλουθους ορισμούς:

Έστω δύο προτάσεις φ, y με

$$\varphi = \varphi_1 \vee \varphi_2 \vee \cdots \vee \varphi_k, \qquad y = y_1 \vee y_2 \vee \cdots \vee y_l,$$

όπου οι $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_k, y_1, y_2, \ldots, y_l$ είναι προτασιακές μεταβλητές ή αρνήσεις προτασιακών μεταβλητών (για παράδειγμα, $\varphi = p_1 \vee \neg p_2 \vee \neg p_3 \vee p_4$). Αν η φ περιέχει την πρόταση z και η y περιέχει την $\neg z$, δημιουργούμε την πρόταση $w = \varphi^* \vee y^*$, όπου η φ^* (αντίστοιχα η y^*) προκύπτει από τη διαγραφή της z (αντίστοιχα της $\neg z$) από τη φ (αντίστοιχα από την y). Η w λέγεται **αποφαινόμενη** των φ, y ενώ οι φ, y λέγονται γονικές της w. Η δημιουργία της $w = \varphi^* \vee y^*$ σύμφωνα με την παραπάνω διαδικασία λέγεται **αρχή της απόφασης**.

Αρχή της απόφασης

Πριν προχωρήσουμε, υπενθυμίζουμε ότι προτάσεις της μορφής
s, $\neg s$, $s_1 \vee s_2 \vee \cdots \vee s_k$ και $s_1 \wedge s_2 \wedge \cdots \wedge s_k$
(όπου $s_1, s_2, \ldots, s_k$ είναι άτομα, ή αρνήσεις ατόμων) μπορούν να θεωρηθούν ότι είναι γραμμένες σε κανονική συζευκτική μορφή.

Επίσης, είναι προφανές ότι αν θελήσουμε να βρούμε μια απόδειξη από ένα σύνολο υποθέσεων Σ' το οποίο αποτελείται από προτάσεις γραμμένες σε CNF, μπορούμε να θεωρήσουμε το σύνολο Σ'' το οποίο αποτελείται από τα ‘‘μέρη’’ της CNF που αποτελούνται μόνο από διαζεύξεις.

Αρχή της απόφασης

Παράδειγμα
Αντί για το σύνολο

$$\Sigma' = \{(p_1 \vee \neg p_2 \vee p_3) \wedge (p_4 \vee p_5), \neg p_6, p_7 \vee p_8, \\ \neg p_9 \wedge p_{10}, (p_{11} \vee \neg p_{12}) \wedge p_{13} \wedge (p_{14} \vee \neg p_{15})\}$$

(και οι πέντε προτάσεις είναι σε CNF), μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το σύνολο

$$\Sigma'' = \{p_1 \vee \neg p_2 \vee p_3, p_4 \vee p_5, \neg p_6, p_7 \vee p_8, \neg p_9, p_{10}, \\ p_{11} \vee \neg p_{12}, p_{13}, p_{14} \vee \neg p_{15}\}.$$

Αρχή της απόφασης

Για να αποδείξουμε μια πρόταση χρησιμοποιώντας την αρχή της απόφασης, χρησιμοποιούμε έναν αλγόριθμο απόδειξης που στηρίζεται στην παρακάτω διαδικασία:

Αρχή της απόφασης

- Υποθέτουμε ότι η αποδεικτέα δεν είναι αληθής. Άρα η άρνησή της θα είναι αληθής. Προσθέτουμε λοιπόν την άρνηση της αποδεικτέας στο σύνολο των αρχικών προτάσεων από τις οποίες προσπαθούμε να αποδείξουμε την αποδεικτέα πρόταση.
- Αφού γράψουμε όλες τις παραπάνω προτάσεις σε CNF και αφού τις διασπάσουμε (αν δεν είναι τετριμμένες) στα ‘‘μέρη’’ τους που χρησιμοποιούν μόνο διαζεύξεις, εφαρμόζουμε επαναληπτικά την αρχή της απόφασης, διαλέγοντας κάθε φορά δύο κατάλληλες προτάσεις του συνόλου που σχηματίσαμε, και παράγοντας την αποφαινόμενή τους, την οποία προσθέτουμε στο αρχικό σύνολο προτάσεων.
- Συνεχίζουμε τη διαδικασία, μέχρι να φτάσουμε στην κενή πρόταση, που δίνει το άτοπο.
  (Στην ουσία, η κενή πρόταση προκύπτει από μια τελική εφαρμογή της αρχής της απόφασης, μεταξύ δύο προτάσεων π και $\neg\pi$, οι οποίες πράγματι δίνουν άτοπο.)

Αρχή της απόφασης

Ορισμός (Απόδειξη με την αρχή της απόφασης)

Απόδειξη της φ από το $\Sigma \subseteq P$ στο σύστημα παραγωγής που χρησιμοποιεί την αρχή της απόφασης (γράφουμε $\Sigma \vdash_r \varphi$) λέγεται μια πεπερασμένη ακολουθία προτάσεων $w_1, w_2, \ldots, w_n = \emptyset$ (η κενή πρόταση), όπου κάθε w_i είναι:

- *μια πρόταση του*[α´] *$\Sigma'' \cup \{\neg\varphi\}''$, ή*
- *παράγεται από δύο προηγούμενες προτάσεις της ακολουθίας με χρήση της αρχής της απόφασης.*

[α´] Οι δύο τόνοι υποδηλώνουν μετατροπή των προτάσεων του Σ σε CNF και μετά, όπου χρειάζεται (δηλαδή για τις προτάσεις εκείνες που δεν είναι σε τετριμμένη μορφή), διάσπαση στα ‘‘μέρη’’ της CNF που αποτελούνται μόνο από διαζεύξεις.

Αρχή της απόφασης

Αλγόριθμος απόδειξης με την αρχή της απόφασης

- Μετατρέπουμε όλες τις προτάσεις του Σ σε CNF και δημιουργούμε έτσι το Σ'.
- Δημιουργούμε την άρνηση της αποδεικτέας πρότασης φ (επίσης σε CNF).
- Δημιουργούμε το σύνολο $\Sigma'' \cup \{\neg\varphi\}''$, διασπώντας (αν και όπου χρειάζεται) τις CNF στα ‘‘μέρη’’ που αποτελούνται από διαζεύξεις.
- Επαναλαμβάνουμε τα παρακάτω, μέχρι να βρεθεί η κενή λέξη: Διαλέγουμε δύο προτάσεις από το $\Sigma'' \cup \{\neg\varphi\}''$ και εφαρμόζουμε για αυτές την αρχή της απόφασης. Αν η παραγόμενη πρόταση (δηλαδή η αποφαινόμενη) είναι η κενή, τελειώσαμε. Αλλιώς, την προσθέτουμε στο σύνολο των διαθέσιμων προτάσεων και συνεχίζουμε, μέχρι να σχηματιστεί ως αποφαινόμενη η κενή πρόταση.

Παράδειγμα 1
Αν θέλουμε να δείξουμε ότι $\Sigma \vdash_r \varphi$,
όπου $\varphi = p_2 \wedge \neg p_3$ και

$$\begin{aligned}\Sigma = \{&p_4 \wedge (p_4 \to p_1), \quad \neg p_1 \vee \neg p_3, \quad p_1 \to p_2, \\ &p_4 \vee \neg(p_2 \wedge p_5), \quad p_6\},\end{aligned}$$

ακολουθούμε τα εξής βήματα:

Αρχή της απόφασης

Βήμα 1:

- Η $p_4 \wedge (p_4 \rightarrow p_1)$ γράφεται σε CNF: $(\neg p_1 \vee p_4) \wedge (\neg p_4 \vee p_1) \wedge (p_1 \vee p_4)$
- Η $\neg p_1 \vee \neg p_3$ είναι τετριμμένη (είναι ήδη σε CNF)
- Η $p_1 \rightarrow p_2$ γράφεται σε CNF $\neg p_1 \vee p_2$
- Η $p_4 \vee \neg(p_2 \wedge p_5)$ γράφεται σε CNF $p_4 \vee \neg p_2 \vee \neg p_5$
- Η p_6 είναι τετριμμένη (είναι ήδη σε CNF)

Άρα, $\Sigma' =$
$\{(\neg p_1 \vee p_4) \wedge (\neg p_4 \vee p_1) \wedge (p_1 \vee p_4), \neg p_1 \vee \neg p_3, \neg p_1 \vee p_2, p_4 \vee \neg p_2 \vee \neg p_5, p_6\}$.

Βήμα 2:

Η άρνηση της αποδεικτέας είναι η $\neg(p_2 \wedge \neg p_3)$, η οποία σε CNF γράφεται ως $\neg p_2 \vee p_3$.

Αρχή της απόφασης

Βήμα 3:
Διασπώντας την

$$(\neg p_1 \vee p_4) \wedge (\neg p_4 \vee p_1) \wedge (p_1 \vee p_4)$$

(η οποία είναι η μόνη που χρειάζεται τέτοια διάσπαση) σε τρεις προτάσεις (τα ‘‘μέρη’’ της: $\neg p_1 \vee p_4$, $\neg p_4 \vee p_1$, $p_1 \vee p_4$), δημιουργούμε το σύνολο $\Sigma'' \cup \{\neg\varphi\}''$:

$$\begin{aligned}\Sigma'' \cup \{\neg\varphi\}'' = \{&\neg p_1 \vee p_4, \neg p_4 \vee p_1, p_1 \vee p_4, \neg p_1 \vee \neg p_3,\\ &\neg p_1 \vee p_2, p_4 \vee \neg p_2 \vee \neg p_5, p_6, \underbrace{\neg p_2 \vee p_3}_{\{\neg\varphi\}''}\}.\end{aligned}$$

Αρχή της απόφασης

Βήμα 4:
Εφαρμόζουμε επαναληπτικά την αρχή της απόφασης, μέχρι να πάρουμε την κενή πρόταση:

$$\left.\begin{array}{rl} 1. & \neg p_2 \vee p_3 \\ 2. & \neg p_1 \vee p_4 \\ 3. & \neg p_4 \vee p_1 \\ 4. & p_1 \vee p_4 \\ 5. & \neg p_1 \vee \neg p_3 \\ 6. & \neg p_1 \vee p_2 \\ 7. & p_4 \vee \neg p_2 \vee \neg p_5 \\ 8. & p_6 \end{array}\right\} \text{Από το } \Sigma'' \cup \{\neg\varphi\}''.$$

9. Από 3, 4 η αρχή δίνει: $p_1 \vee p_1$, δηλαδή p_1.
10. Από 6, 9 η αρχή δίνει: p_2.
11. Από 1, 5 η αρχή δίνει: $\neg p_1 \vee \neg p_2$.
12. Από 10, 11 η αρχή δίνει: $\neg p_1$.
13. Από 9, 12 η αρχή δίνει την κενή πρόταση.

Αρχή της απόφασης

Παράδειγμα 2

-Αν έχω TV και δεν είμαι απασχολημένος, θα δω το έργο.
-Αν έχω video και είμαι απασχολημένος, θα γράψω το έργο.
-Αν γράψω το έργο, θα το δω.
-Έχω TV.
-Έχω video.
Να δειχθεί ότι θα δω οπωσδήποτε το έργο.

p :	Θα δω το έργο.
q :	Έχω TV.
r :	Είμαι απασχολημένος.
s :	Θα γράψω το έργο.
t :	Έχω video.

$$\Sigma = \{q \wedge \neg r \to p, \quad t \wedge r \to s, \quad s \to p, \quad q, \quad t\}.$$

Αρχή της απόφασης

$$\Sigma = \{q \wedge \neg r \to p, \quad t \wedge r \to s, \quad s \to p, \quad q, \quad t\}.$$

Βήμα 1:

$$\Sigma' = \{p \vee \neg q \vee r, \quad s \vee \neg t \vee \neg r, \quad p \vee \neg s, \quad q, \quad t\}.$$

Βήμα 2: Η άρνηση της αποδεικτέας είναι η $\neg p$ (η οποία είναι ήδη σε CNF).
Βήμα 3: Δεδομένου ότι $\Sigma'' = \Sigma'$ έχουμε:

$$\Sigma'' \cup \{\neg p\} = \{p \vee \neg q \vee r, s \vee \neg t \vee \neg r, p \vee \neg s, q, t, \neg p\}.$$

Αρχή της απόφασης

Βήμα 4: Εφαρμόζουμε επαναληπτικά την αρχή της απόφασης, μέχρι να πάρουμε την κενή πρόταση:

1.	$p \vee \neg q \vee r$	(Από Σ'')
2.	$\neg p$	(Από Σ'')
3.	$\neg q \vee r$	(Από 1, 2 και αρχή απόφασης)
4.	q	(Από Σ'')
5.	r	(Από 3, 4 και αρχή απόφασης)
6.	$s \vee \neg t \vee \neg r$	(Από Σ'')
7.	$p \vee \neg s$	(Από Σ'')
8.	$p \vee \neg t \vee \neg r$	(Από 6, 7 και αρχή απόφασης)
9.	$\neg t \vee \neg r$	(Από 2, 8 και αρχή απόφασης)
10.	t	(Από Σ'')
11.	$\neg r$	(Από 9, 10 και αρχή απόφασης)
12.	η κενή πρόταση	(Από 5, 11 και αρχή απόφασης)

Ασκήσεις

1. Για τις προτάσεις p_1, p_2, p_3, p_4 γνωρίζουμε ότι
   - Αν η p_1 είναι αληθής, τότε και η p_2 είναι αληθής.
   - Η p_3 είναι αληθής αν και μόνο αν η p_4 είναι αληθής.
   - Οι p_2 και p_4 δεν συναληθεύουν ποτέ.
   - Η p_3 είναι αληθής.

   Να δειχθεί, με χρήση της αρχής της απόφασης, ότι οι p_1, p_2 είναι ψευδείς, ενώ οι p_3, p_4 είναι αληθείς.
2. Να αποδειχθεί, με χρήση της αρχής της απόφασης, ότι
   1. $\{\neg t \vee p, q \vee \neg p, t \vee \neg p\} \vdash_r q \vee (\neg p \wedge \neg q \wedge \neg t)$.
   2. $\{\neg(p_1 \wedge p_6) \vee p_5, p_4, p_3 \rightarrow p_1, (p_5 \rightarrow p_3) \wedge p_5, \neg p_2 \vee \neg p_3\} \vdash_r \neg p_2 \wedge p_1$
   3. $\{\neg p \vee s \vee \neg t, \neg t \vee p \vee \neg q, (q \wedge r) \rightarrow t, q \vee s \vee \neg t\} \vdash_r (q \wedge r) \rightarrow (s \vee \neg t)$.

6η ΔΙΑΛΕΞΗ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΛΟΓΙΚΗ

- **Δένδρα αληθείας**

Δένδρα αληθείας

Έστω $\Sigma \subseteq P$ και $\varphi \in P$.
Μπορούμε να αποδείξουμε μια πρόταση $\Sigma \models \varphi$ με πίνακα αληθείας: Ελέγχουμε ότι σε κάθε περίπτωση (δηλαδή για κάθε συνδυασμό των τιμών αληθείας των προτάσεων που υπεισέρχονται στο πρόβλημα) στην οποία αληθεύουν όλες οι υποθέσεις, αληθεύει και η αποδεικτέα.

Δένδρα αληθείας

Για παράδειγμα, για να δείξουμε ότι $\{A \to \neg B, \neg C \to A\} \models B \to C$ μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τον πίνακα:

A	B	C	$\neg B$	$A \to \neg B$	$\neg C$	$\neg C \to A$	$B \to C$
1	1	1	0	0	0	1	1
1	1	0	0	0	1	1	0
1	0	1	1	1	0	1	1
1	0	0	1	1	1	1	1
0	1	1	0	1	0	1	1
0	1	0	0	1	1	0	0
0	0	1	1	1	0	1	1
0	0	0	1	1	1	0	1

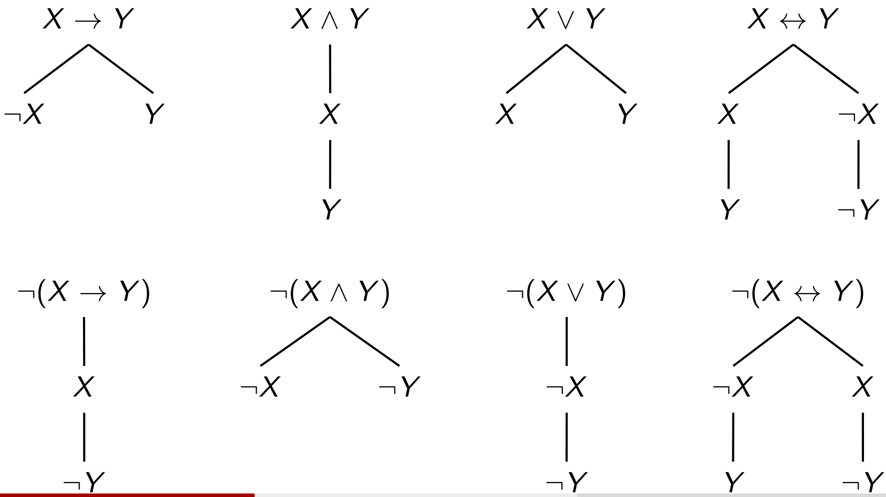
Πράγματι λοιπόν, σε κάθε περίπτωση που οι δύο υποθέσεις είναι αληθείς, ισχύει το συμπέρασμα. Παρατηρούμε όμως ότι έτσι, συνήθως κάνουμε ‘‘περιττό κόπο’’ (αφού οι γραμμές 1, 2, 6, 8 του πίνακα δεν χρειάζονται τελικά).

Δένδρα αληθείας

Γι' αυτό θα παρουσιάσουμε μια άλλη μέθοδο απόδειξης η οποία χρησιμοποιεί τα **δένδρα αληθείας**.
Η μέθοδος αυτή στηρίζεται στην έννοια του αντιπαραδείγματος.
Αν δηλαδή θέλουμε, από κάποιες υποθέσεις να αποδείξουμε κάποιο συμπέρασμα, αρκεί να αποδείξουμε ότι δεν υπάρχει αντιπαράδειγμα.
Δηλαδή, υποθέτοντας ότι ισχύει η άρνηση του αποδεικτέου, φθάνουμε σε κάθε περίπτωση σε αντίφαση (αλλιώς θα έχουμε ένα αντιπαράδειγμα).

Δένδρα αληθείας

Χρειαζόμαστε τους παρακάτω συμπερασματικούς κανόνες (δύο για κάθε σύνδεσμο: $\to, \wedge, \vee, \leftrightarrow$):



Δένδρα αληθείας

Οι κανόνες αυτοί προφανώς εκφράζουν τις ισοδυναμίες:

$$\begin{array}{rcl}
X \to Y & \models\!\!\!\mid & (\neg X) \vee Y \\
X \wedge Y & \models\!\!\!\mid & X \wedge Y \\
X \vee Y & \models\!\!\!\mid & X \vee Y \\
X \leftrightarrow Y & \models\!\!\!\mid & (X \wedge Y) \vee (\neg X \wedge \neg Y) \\
\neg(X \to Y) & \models\!\!\!\mid & X \wedge \neg Y \\
\neg(X \wedge Y) & \models\!\!\!\mid & \neg X \vee \neg Y \\
\neg(X \vee Y) & \models\!\!\!\mid & \neg X \wedge \neg Y \\
\neg(X \leftrightarrow Y) & \models\!\!\!\mid & (\neg X \wedge Y) \vee (X \wedge \neg Y),
\end{array}$$

με διακλάδωση για το $\vee$ και με διαδοχική παράθεση (το ένα κάτω από το άλλο) για το $\wedge$.

Τα δένδρα αληθείας δημιουργούνται με βάση τον παρακάτω αλγόριθμο:

ΑΡΧΗ

1. Γράψε τις υποθέσεις και την άρνηση του συμπεράσματος, τη μια κάτω από την άλλη.

2. Σβήσε όλες τις διπλές αρνήσεις.
Κλείσε με ένα $\times$ κάθε διαδρομή που περιέχει κάποια πρόταση και την άρνησή της.

3. Είναι όλες οι διαδρομές κλειστές;

NAI → **ΤΕΛΟΣ** Η πρόταση ισχύει

OXI ↓

4. Έχουν ‘‘τσεκαριστεί’’[5] όλες οι προτάσεις που περιέχουν $\rightarrow$ ή $\wedge$ ή $\vee$ ή $\leftrightarrow$;

NAI → **ΤΕΛΟΣ** Η πρόταση δεν ισχύει

OXI ↓

5. Διάλεξε μια πρόταση που δεν έχει ‘‘τσεκαριστεί’’ και ‘‘τσεκάρισέ’’ την, εφαρμόζοντας το σχετικό συμπερασματικό κανόνα.

Παρατηρήσεις:

1. Αν σε μια διαδρομή του δένδρου αληθείας που δημιουργείται, εμφανίζονται μια πρόταση και η άρνησή της, τότε αυτή η διαδρομή λέγεται **κλειστή** (αυτό σημειώνεται με ένα $\times$ στο τέλος της διαδρομής).
2. "Τσεκάρουμε" μια πρόταση, όταν εφαρμόζουμε γι΄ αυτήν το σχετικό συμπερασματικό κανόνα.
3. Μπορούμε να διαλέξουμε τις προτάσεις που "τσεκάρουμε" και διασπάμε (σύμφωνα με τους συμπερασματικούς κανόνες) με όποια σειρά θέλουμε. Συνήθως όμως, χρησιμοποιούμε πρώτα, αν γίνεται, τους κανόνες για τις $X \wedge Y$, $\neg(X \to Y)$, $\neg(X \vee Y)$ που δεν δημιουργούν διακλαδώσεις, (αν, φυσικά, οι περιπτώσεις αυτές εμφανίζονται στο δένδρο).

4. Μπορούμε να γενικεύσουμε κάποιους από τους παραπάνω συμπερασματικούς κανόνες:

$$
\begin{array}{c}
X \wedge Y \wedge Z \\
| \\
X \\
| \\
Y \\
| \\
Z
\end{array}
\qquad
\begin{array}{ccc}
 & X \vee Y \vee Z & \\
\swarrow & \downarrow & \searrow \\
X & Y & Z
\end{array}
\qquad
\begin{array}{ccc}
 & \neg(X \wedge Y \wedge Z & \\
\swarrow & \downarrow & \\
\neg X & \neg Y &
\end{array}
$$

Στη συνέχεια, παρουσιάζονται μερικά παραδείγματα του αλγορίθμου. Στο πρώτο παράδειγμα, παρουσιάζεται βήμα προς βήμα η διαδικασία κατασκευής του δένδρου αληθείας. Στην πράξη, εμφανίζεται συνήθως μόνο το τελικό στιγμιότυπο της διαδικασίας αυτής, όπως φαίνεται στα υπόλοιπα παραδείγματα.

Άσκηση 32

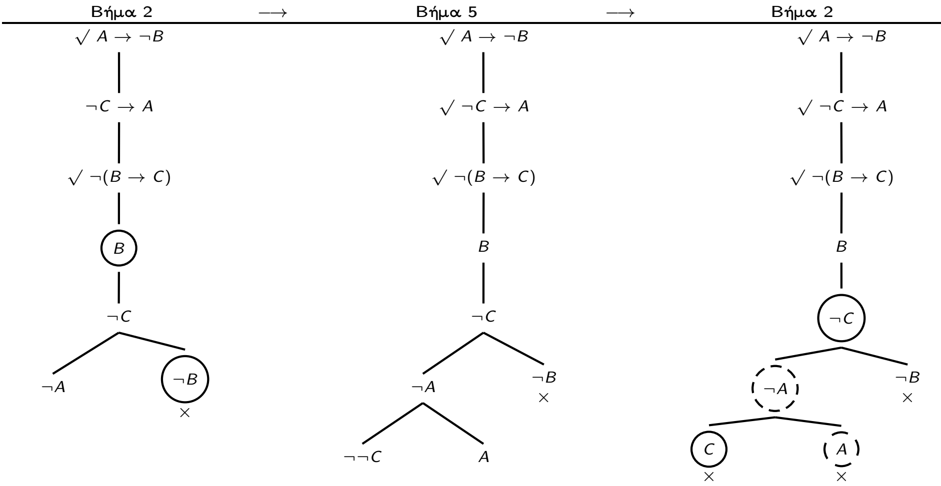
Να εξετασθεί αν ισχύει $\{A \to \neg B, \quad \neg C \to A\} \models B \to C$.

(Το βήμα 2 δεν αναφέρεται όταν δεν υπάρχουν διπλές αρνήσεις ή δεν δημιουργούνται κλειστές διαδρομές, και επίσης δεν αναφέρονται τα βήματα 3 και 4 όταν η απάντησή τους είναι ''ΟΧΙ'', οπότε και συνεχίζεται η εκτέλεση του αλγορίθμου.)

Δένδρα αληθείας

Βήμα 1 $\longrightarrow$	Βήμα 5 $\longrightarrow$	Βήμα 5 $\longrightarrow$
$A \to \neg B$	$A \to \neg B$	$\surd\ A \to \neg B$
$\neg C \to A$	$\neg C \to A$	$\neg C \to A$
$\neg(B \to C)$	$\surd\ \neg(B \to C)$	$\surd\ \neg(B \to C)$
	B	B
	$\neg C$	$\neg C$
		$\neg A \quad\quad \neg B$

Δένδρα αληθείας

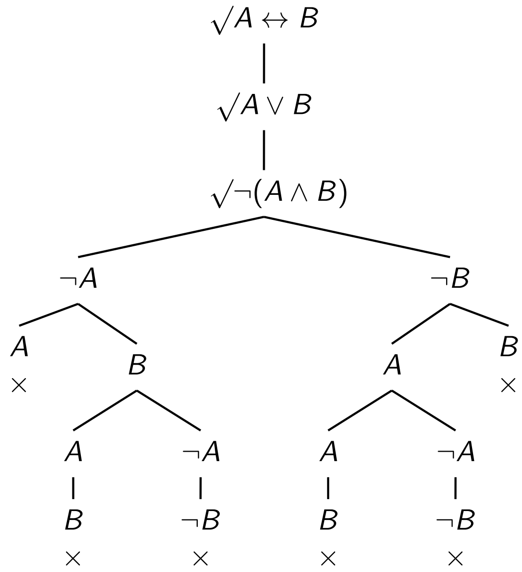


Επειδή η απάντηση στο Βήμα 3 είναι τώρα ‘‘ΝΑΙ’’, ο αλγόριθμος τερματίζει συμπεραίνοντας ότι η αποδεικτέα ισχύει.

Άσκηση 33

Να εξετασθεί αν ισχύει ότι $\{A \leftrightarrow B, \quad A \vee B\} \models A \wedge B$.

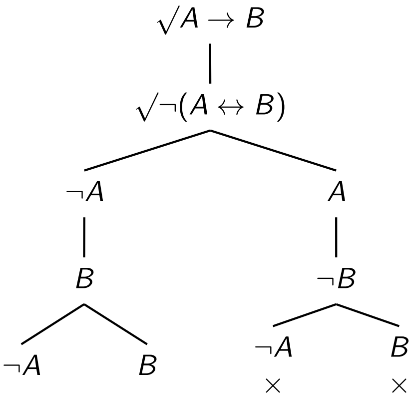
Δένδρα αληθείας



Άσκηση 34

Να εξετασθεί αν ισχύει ότι $A \rightarrow B \models A \leftrightarrow B$.

Δένδρα αληθείας



Οι δύο πρώτες διαδρομές δεν είναι κλειστές, άρα δεν ισχύει.
Παρατηρούμε εδώ ότι οι διαδρομές που δεν κλείνουν περιέχουν τα $\neg A$, B. Άρα τα $\neg A$, B (δηλαδή $A : 0$, $B : 1$) δίνουν ένα αντιπαράδειγμα.
Πράγματι, αν $A : 0$, $B : 1$, τότε ισχύει $A \to B : 1$ ενώ $A \leftrightarrow B : 0$.

Άσκηση 35

Να εξετασθεί αν ισχύει ότι $A \vee B \rightarrow C \models A \vee C$.

Δένδρα αληθείας

$$
\begin{array}{c}
\surd A \vee B \to C \\
| \\
\surd \neg(A \vee C) \\
| \\
\neg A \\
| \\
\neg C \\
\swarrow \quad \searrow \\
\begin{array}{cc}
\surd \neg(A \vee B) & C \\
| & \times \\
\neg A & \\
| & \\
\neg B &
\end{array}
\end{array}
$$

Η πρώτη διαδρομή δεν είναι κλειστή, άρα δεν ισχύει. Στη διαδρομή που δεν κλείνει εμφανίζονται τα $\neg A$, $\neg B$, $\neg C$ τα οποία δίνουν ένα αντιπαράδειγμα. Πράγματι, για A, B, $C : 0$, έχουμε $A \vee B \to C : 1$, ενώ $A \vee C : 0$.

Δένδρα αληθείας

Να εξετασθεί, με χρήση δένδρων αληθείας, αν ισχύει κάθε ένα από τα παρακάτω:

1. $\{A, \quad A \to B\} \models B.$
2. $\{B, \quad A \to B\} \models A.$
3. $\neg A \models A \to B.$
4. $\{A \to B, \quad B \to C\} \models A \to C.$
5. $\neg A \to B \models B \to A.$
6. $A \to B \models \neg B \to \neg A.$
7. $(A \to B) \to C \models \neg C \to A.$
8. $(A \to B) \to A \models A.$
9. $(A \to B) \to B \models A.$
10. $\{A \to B, \quad B \to C, \quad C \to D\} \models A \to D.$
11. $\{A \to B, \neg A \to C\} \models (B \to A) \to (B \wedge C).$
12. $\{\neg A \vee B, A\} \models (\neg B \to C) \wedge (A \wedge (B \vee C)).$
13. $\{\neg A \to B, \neg B \to C\} \models A \to (\neg C \to B).$
14. $\{\neg A \wedge B, A \to \neg C\} \models A \vee (B \to C).$

Όπου δεν ισχύει, να δοθούν όλα τα σχετικά αντιπαραδείγματα.