ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΥΝΔΥΑΣΤΙΚΗΣ
1η ΔΙΑΛΕΞΗ

- **Κανόνας αθροίσματος**
- **Πολλαπλασιαστική αρχή**
- **Κανόνας της αμφιμονοσήμαντης απεικόνισης**
- **Διατάξεις**
- **Συνδυασμοί**

Κανόνας αθροίσματος

Κανόνας αθροίσματος:

- Αν $|A| = m$ και $|B| = n$ με $A \cap B = \emptyset$ (δηλαδή A, B ξένα) τότε $|A \cup B| = |A| + |B| = m + n$.
- Αν $|A_1| = n_1$, $|A_2| = n_2, \ldots, |A_k| = n_k$ όπου τα A_i, A_j είναι ξένα όταν $i \neq j$ τότε
  $|A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_k| = |A_1| + |A_2| + \cdots + |A_k| = n_1 + n_2 + \cdots + n_k$.

Πρακτικά, ο κανόνας του αθροίσματος διατυπώνεται ως εξής:

- Αν ένα αντικείμενο A μπορεί να επιλεγεί κατά m τρόπους και ένα αντικείμενο B κατά n τρόπους τότε συνολικά η επιλογή ενός από τα 2 μπορεί να γίνει κατά $m + n$ τρόπους.
- Γενικότερα, αν υπάρχουν n_1 επιλογές για το πρώτο αντικείμενο, n_2 επιλογές για το δεύτερο αντικείμενο, ..., n_k επιλογές για το k-στο αντικείμενο, τότε για την επιλογή ενός από τα k αντικείμενα υπάρχουν $n_1 + n_2 + \cdots + n_k$ τρόποι.

Πολλαπλασιαστική αρχή ή Κανόνας γινομένου

Πολλαπλασιαστική αρχή:

- Αν $|A| = m$ και $|B| = n$ τότε $|A \times B| = |A| \cdot |B| = m \cdot n$.
- Αν $|A_1| = n_1$, $|A_2| = n_2, \ldots, |A_k| = n_k$, τότε
  $|A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_k| = |A_1| \cdot |A_2| \cdots |A_k| = n_1 \cdot n_2 \cdots n_k$.

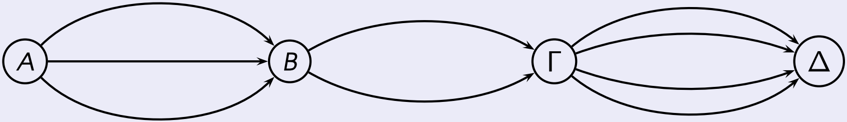
Πρακτικά, η πολλαπλασιαστική αρχή διατυπώνεται ως εξής:

- Αν ένα αντικείμενο A μπορεί να επιλεγεί κατά m τρόπους και ένα αντικείμενο B κατά n τρόπους τότε και τα δύο μαζί μπορούν να επιλεγούν κατά $m \cdot n$ τρόπους.
- Γενικότερα, αν υπάρχουν n_1 επιλογές για το πρώτο αντικείμενο, n_2 επιλογές για το δεύτερο αντικείμενο, $\ldots$, n_k επιλογές για το k-στο αντικείμενο, τότε και τα k αντικείμενα μπορούν να επιλεγούν κατά $n_1 \cdot n_2 \cdots n_k$ τρόπους.

Πολλαπλασιαστική αρχή ή Κανόνας γινομένου

Παράδειγμα 1

Αν από την πόλη A στην πόλη B υπάρχουν 3 διαφορετικοί δρόμοι, από την B στη Γ 2 δρόμοι και από τη Γ στη Δ 4 δρόμοι, πόσες διαδρομές υπάρχουν από την πόλη A στη Δ μέσω των πόλεων B και Γ;



Απάντηση.

Υπάρχουν $3 \cdot 2 \cdot 4 = 24$ διαδρομές. □

Πολλαπλασιαστική αρχή ή Κανόνας γινομένου

Παράδειγμα 2

Με πόσους τρόπους μπορούν να τοποθετηθούν 6 πιόνια στα τετράγωνα μιας 6×6 σκακιέρας ώστε να μην υπάρχουν δύο ή περισσότερα πιόνια στην ίδια γραμμή ή στήλη.

Λύση.

6 εκλογή $\longrightarrow$

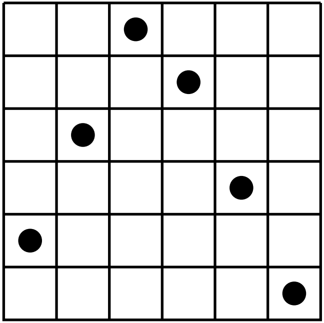
5 εκλογή $\longrightarrow$

4 εκλογή $\longrightarrow$

3 εκλογή $\longrightarrow$

2 εκλογή $\longrightarrow$

1 εκλογή $\longrightarrow$



Πολλαπλασιαστική αρχή ή Κανόνας γινομένου

Το πρώτο πιόνι τοποθετείται στην πρώτη γραμμή με 6 διαφορετικούς τρόπους. Για το δεύτερο πιόνι υπάρχουν 5 διαφορετικοί τρόποι (εξαιρείται το τετράγωνο της δεύτερης γραμμής στην στήλη του οποίου έχουμε βάλει στην πρώτη γραμμή το πρώτο πιόνι). Για το τρίτο πιόνι υπάρχουν 4 διαφορετικοί τρόποι (εξαιρούνται τα τετράγωνα της τρίτης γραμμής στις στήλες των οποίων έχουμε ήδη βάλει τα δυο προηγούμενα πιόνια). Συνεχίζοντας με αυτό τον τρόπο (βλέπε προηγούμενο σχήμα) για το τέταρτο πιόνι υπάρχουν 3 τρόποι, για το πέμπτο 2 τρόποι και για το έκτο ένας μόνο τρόπος τοποθέτησής του.
Έτσι σύμφωνα με την πολλαπλασιαστική αρχή για να τοποθετήσουμε και τα 6 πιόνια στην σκακιέρα θα υπάρχουν

$$6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6! = 720 \text{ τρόποι.}$$

Κανόνας της αμφιμονοσήμαντης απεικόνισης

Κανόνας της αμφιμονοσήμαντης απεικόνισης:

- Έστω A, B **πεπερασμένα** σύνολα. Αν υπάρχει αμφιμονοσήμαντη απεικόνιση f από το A στο B τότε $|A| = |B|$.

Πρακτικά, ο κανόνας της αμφιμονοσήμαντης απεικόνισης διατυπώνεται ως εξής:

- Αν σε κάθε αντικείμενο ενός συνόλου A μπορεί να αντιστοιχηθεί ένα και μοναδικό αντικείμενο ενός συνόλου B και αντιστρόφως, τότε τα δύο σύνολα έχουν ίσο πλήθος στοιχείων.

Διατάξεις

Έστω E ένα πεπερασμένο σύνολο με n στοιχεία, δηλαδή $|E| = n$.

- Κάθε διατεταγμένη m-άδα $(a_1, a_2, \ldots, a_m)$ με $a_i \in E$ για κάθε $i \in [m] = \{1, 2, \ldots, m\}$ ονομάζεται **διάταξη των n στοιχείων ανά m**.
- Αν τα στοιχεία μιας διάταξης είναι διαφορετικά (δηλαδή $a_i \neq a_j$ για κάθε $i, j \in [m]$ με $i \neq j$) τότε αυτή ονομάζεται **απλή διάταξη** (ή **διάταξη**) ενώ αν τα στοιχεία της δεν είναι κατ᾽ ανάγκη διαφορετικά τότε αυτή ονομάζεται **επαναληπτική διάταξη** ή **διάταξη με επανάληψη**.
- Αν $n = m$, τότε η διάταξη n ανά n ονομάζεται **μετάθεση n στοιχείων**.
- Μια επαναληπτική μετάθεση στην οποία εμφανίζονται k διαφορετικά στοιχεία ονομάζεται **μετάθεση k ειδών στοιχείων**.

Παράδειγμα 3

Αν $n = 4$, $m = 2$ *και* $E = \{\alpha, \beta, \gamma, \delta\}$, *τότε οι διατάξεις των 4 στοιχείων ανά δύο είναι:*

$$(\alpha,\beta),\quad (\alpha,\gamma),\quad (\alpha,\delta),\quad (\beta,\gamma),\quad (\beta,\delta),\quad (\gamma,\delta),$$
$$(\beta,\alpha),\quad (\gamma,\alpha),\quad (\delta,\alpha),\quad (\gamma,\beta),\quad (\delta,\beta),\quad (\delta,\gamma),$$

ενώ οι διατάξεις με επανάληψη των 4 στοιχείων ανά 2 είναι οι **προηγούμενες** *και* **επιπλέον** *οι:*

$$(\alpha,\alpha),\quad (\beta,\beta),\quad (\gamma,\gamma),\quad (\delta,\delta).$$

Διατάξεις

Παράδειγμα 4

Οι μεταθέσεις των 3 στοιχείων α, β, γ είναι :

$$
\begin{array}{lll}
(\alpha,\beta,\gamma), & (\alpha,\gamma,\beta), & (\beta,\alpha,\gamma), \\
(\beta,\gamma,\alpha), & (\gamma,\alpha,\beta), & (\gamma,\beta,\alpha).
\end{array}
$$

Παράδειγμα 5

Οι μεταθέσεις 3 ειδών όπου το α εμφανίζεται 2 φορές και τα β,γ από μία φορά είναι :

$$
\begin{array}{llll}
(\alpha,\alpha,\beta,\gamma), & (\alpha,\alpha,\gamma,\beta), & (\alpha,\beta,\alpha,\gamma), & (\alpha,\beta,\gamma,\alpha), \\
(\alpha,\gamma,\alpha,\beta), & (\alpha,\gamma,\beta,\alpha) & (\beta,\alpha,\alpha,\gamma), & (\beta,\alpha,\gamma,\alpha) \\
(\beta,\gamma,\alpha,\alpha), & (\gamma,\alpha,\alpha,\beta), & (\gamma,\alpha,\beta,\alpha), & (\gamma,\beta,\alpha,\alpha).
\end{array}
$$

Διατάξεις

Άσκηση 1

Να δειχθεί ότι το πλήθος των 1–1 απεικονίσεων f από το A στο B, όπου $|A| = m$, $|B| = n$ με $m \leq n$ είναι ίσο με το πλήθος των διατάξεων των n στοιχείων ανά m.

Άσκηση 2

Να δειχθεί ότι το πλήθος των απεικονίσεων του A στο B, όπου $|A| = m$ και $|B| = n$ είναι ίσο με το πλήθος των επαναληπτικών διατάξεων των n ανά m.

Διατάξεις

Λύση της 1 στην ειδική περίπτωση $A = \{\alpha, \beta, \gamma, \delta\}$ και $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$.

- Για κάθε 1–1 απεικόνιση $f : A \to B$ ορίζουμε μια διάταξη των 7 στοιχείων $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ ανά 4 ως εξής: Αν $f(\alpha) = 5$, $f(\beta) = 3$, $f(\gamma) = 1$ και $f(\delta) = 4$ τότε η ζητούμενη διάταξη είναι η
$$(5, 3, 1, 4)$$
- Αντίστροφα, για κάθε διάταξη των 7 στοιχείων ανά 4 ορίζουμε μια απεικόνιση $f : A \to B$ ως εξής:
Η $(3, 5, 6, 7)$ για παράδειγμα, ορίζει την απεικόνιση $f : A \to B$ με
$$f(\alpha) = 3,\ f(\beta) = 5,$$
$$f(\gamma) = 6,\ f(\delta) = 7.$$

$\square$

Διατάξεις

Ο αριθμός των (απλών) διατάξεων n στοιχείων ανά m συμβολίζεται με $P(n,m)$.
Εύκολα προκύπτει ότι $P(n,1) = n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$.
Εύκολα προκύπτει ότι $P(n,2) = n(n-1)$ για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$ με $n \geq 2$.
Θεωρούμε ότι $P(n,0) = 1$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.
Γενικότερα, ισχύει η επόμενη πρόταση:

Για κάθε $n, m \in \mathbb{N}$ **με** $m \leq n$ **ισχύει ότι** $P(n,m) = \frac{n!}{(n-m)!}$

Επίσης, ισχύει ότι $P(n,m) = 0$ όταν $m > n$.

Διατάξεις

Απόδειξη: Έστω $|E| = n$. Τα στοιχεία μιας οποιασδήποτε διάταξης $(a_1, a_2, \ldots, a_m)$ των n στοιχείων του E ανά m επιλέγονται ως εξής:

$$\begin{array}{lcl}
a_1 & \text{επιλέγεται από το} & E_1 = E \\
a_2 & \cdots & E_2 = E \setminus \{a_1\} \\
a_3 & \cdots & E_3 = E \setminus \{a_1, a_2\} \\
\vdots & \vdots & \vdots \\
a_m & \text{επιλέγεται από το} & E_m = E \setminus \{a_1, a_2, \ldots, a_{m-1}\}
\end{array}$$

Έτσι το $(a_1, a_2, \ldots, a_m)$ επιλέγεται από το σύνολο $E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_m$. Άρα,

$$\begin{aligned}
P(n, m) &= |E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_m| = |E_1||E_2| \cdots |E_m| \\
&= \underbrace{n(n-1)\cdots(n-(m-1))}_{m \text{ όροι}} = \underbrace{n(n-1)\cdots(n-m+1)}_{m \text{ όροι}} \\
&= \frac{n(n-1)\cdots(n-m+1)(n-m)\cdots 2 \cdot 1}{1 \cdot 2 \cdots (n-m)} = \frac{n!}{(n-m)!}
\end{aligned}$$

Διατάξεις

Ο αριθμός των μεταθέσεων των n στοιχείων συμβολίζεται με $P_{n,n} = P_n$.

Αριθμός μεταθέσεων

$$P_n = n!$$

Ο αριθμός των επαναληπτικών διατάξεων των n στοιχείων ανα m συμβολίζεται με $U(n, m)$.

Αριθμός επαναληπτικών διατάξεων

$$U(n, m) = n^m$$

Παράδειγμα 6

Από μια καλπη που περιέχει 100 λαχνούς αριθμημένους από το 1 μέχρι το 100 κληρώνονται διαδοχικά 5 λαχνοί, χωρίς μετα από κάθε κλήρωση να επανατοποθετούνται στη κάλπη. Ο πρώτος λαχνός που κληρώνεται κερδίζει 10.000 ευρώ, ο δεύτερος 5.000 ευρώ, ο τρίτος 3.000 ευρώ, ο τέταρτος 2.000 ευρώ και ο πέμπτος 1.000 ευρώ. Να βρεθεί το πλήθος των δυνατών αποτελεσμάτων της κλήρωσης.

Λύση. Για τον υπολογισμό των δυνατών αποτελεσμάτων παρατηρούμε ότι η σειρά με την οποία εξάγονται οι αριθμοί είναι σημαντική λόγω του διαφορετικού ποσού που κερδίζεται σε κάθε κλήρωση. Έτσι ο ζητούμενος αριθμός θα είναι ίσος με τον αριθμό των διατάξεων των 100 ανά 5 δηλαδή

$$\begin{aligned} P(100,5) &= \frac{100!}{(100-5)!} \\ &= 100 \cdot 99 \cdot 98 \cdot 97 \cdot 96 \\ &= 9034502400 \end{aligned}$$

Παράδειγμα 7

Πόσους τετραψήφιους φυσικούς αριθμούς μπορούμε να κατασκευάσουμε με τα ψηφία 1,2,3,4,5,6,7

1. *όταν όλα τα ψηφία τους είναι διαφορετικά.*
2. *όταν τα ψηφία τους μπορεί να επαναλαμβάνονται.*
3. *όταν πρέπει να είναι περιττοί και τα ψηφία τους μπορεί να επαναλαμβάνονται.*
4. *όταν το άθροισμα του δεύτερου και τέταρτου ψηφίου τους είναι ίσο με 9 και τα ψηφία τους να είναι διαφορετικά.*

Λύση. Επειδή στην κατασκευή των αριθμών αυτών παίζει ρόλο η σειρά των ψηφίων τους, πρόκειται για διατάξεις στο (1) και για επαναληπτικές διατάξεις στο (2) των 7 ανά 4. Έτσι μπορούμε να κατασκευάσουμε:

Διατάξεις

1. $P(7,4) = \frac{7!}{(7-4)!} = \frac{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7}{1\cdot2\cdot3} = 840$ φυσικούς αριθμούς με διαφορετικά ψηφία.
2. $U(7,4) = 7^4 = 2401$ φυσικούς αριθμούς με ψηφία που μπορεί να επαναλαμβάνονται.
3. Επειδή θέλουμε οι αριθμοί που κατασκευάζουμε να είναι περιττοί θα υπάρχουν 4 διαφορετικές επιλογές για το τελευταίο ψηφίο τους (1 ή 3 ή 5 ή 7). Για τα υπόλοιπα 3 ψηφία τους υπάρχουν 7 επιλογές (διότι τα ψηφία τους μπορεί να επαναλαμβάνονται). Έτσι εδώ μπορούμε να κατασκευάσουμε $4 \cdot 7^3 = 1372$ τέτοιους αριθμούς.

4. Έστω $xyzw$ ένας τέτοιος αριθμός. Πρέπει να ισχύει $y + w = 9$ οπότε υπάρχουν 6 επιλογές για το ζευγάρι (y, w):

$$(2,7),(7,2),(3,6),(6,3),(4,5) \text{ και } (5,4)$$

Αφού έχουμε διαλέξει το ζευγάρι (y, w) το ζευγάρι (x, y) θα επιλέγεται μεταξύ των διατάξεων του συνόλου $[7] \setminus \{y, w\}$, δηλαδή θα επιλέγεται με $P(5, 2)$ τρόπους.
Άρα σύμφωνα με τον κανόνα του γινομένου, μπορούμε να κατασκευάσουμε $6 \cdot P(5,2) = 6\frac{5!}{(5-2)!} = 5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$ διαφορετικούς αριθμούς.

Αναγωγική εξίσωση διατάξεων

$$P(n,m) = P(n-1,m) + m \cdot P(n-1,m-1)$$

όπου $P(n,0) = 1$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Συνδυαστική απόδειξη: Έστω ένα σύνολο E με $|E| = n$ και $\Delta_m(E)$ το σύνολο όλων των διατάξεων των n στοιχείων του E ανά m.
Θεωρούμε $\beta \in E$ και ορίζουμε τα υποσύνολα του $\Delta_m(E)$:

$$A = \{(a_1, a_2, \ldots, a_m) \in \Delta_m(E) : a_i \neq \beta \ \ \forall i \in [m]\}$$

$$B_i = \{(a_1, a_2, \ldots, a_m) \in \Delta_m(E) : a_i = \beta\}$$

όπου $i \in [m]$.
Τα σύνολα $A, B_1, B_2, \ldots, B_m$ αποτελούν μια διαμέριση του $\Delta_m(E)$, οπότε ισχύει :

$$|\Delta_m(E)| = |A| + \sum_{i=1}^{m} |B_i| \tag{1}$$

Διατάξεις

Επειδή $A = \Delta_m(E \setminus \{\beta\})$ έπεται ότι:

$$|A| = P(n-1, m) \tag{2}$$

Επιπλέον, επειδή κάθε στοιχείο του B_i έχει σταθερή την i συντεταγμένη (δηλαδή ίση με β) προκύπτει ότι η απεικόνιση $\phi_i : B_i \to \Delta_{m-1}(E \setminus \{\beta\})$, με

$$\phi_i((a_1, a_2, \ldots, a_{i-1}, \beta, a_{i+1}, \ldots, a_m)) = (a_1, a_2, \ldots, a_{i-1}, a_{i+1}, \ldots, a_m))$$

είναι αμφιμονοσήμαντη. Οπότε,

$$B_i \sim \Delta_{m-1}(E \setminus \{\beta\}),$$

και επομένως

$$|B_i| = P(n-1, m-1), \text{ για κάθε } i \in [m]. \tag{3}$$

Από τις (1), (2) και (3) προκύπτει ότι

$$\begin{aligned} P(n,m) &= P(n-1,m) + \sum_{i=1}^{m} P(n-1,m-1) \\ &= P(n-1,m) + mP(n-1,m-1) \end{aligned}$$

Συνδυασμοί

Έστω ένα σύνολο E με $|E| = n$.
Κάθε οικογένεια που αποτελείται απο m στοιχεία του E ονομάζεται **συνδυασμός** των n στοιχείων ανά m.
Αν τα στοιχεία ενός συνδυασμού είναι διαφορετικά τότε αυτός ονομάζεται **απλός συνδυασμός** (ή **συνδυασμός**) ενώ αν τα στοιχεία του δεν είναι κατ' ανάγκη διαφορετικά τότε αυτός ονομάζεται **επαναληπτικός συνδυασμός** ή **συνδυασμός με επανάληψη**.

Ουσιαστικά κάθε απλός συνδυασμός των n στοιχείων του E ανά m είναι ένα υποσύνολο του E με m στοιχεία.

Η διαφορά συνδυασμών και διατάξεων είναι ότι στους συνδυασμούς δεν παίζει ρόλο η σειρά των στοιχείων.

Συνδυασμοί

Παράδειγμα 8

Αν $n = 4$ και $m = 2$, έστω $E = \{\alpha, \beta, \gamma, \delta\}$.
Τότε οι συνδυασμοί των 4 ανά 2 είναι :

$$\{\alpha, \beta\}, \{\alpha, \gamma\}, \{\alpha, \delta\}, \{\beta, \gamma\}, \{\beta, \delta\}, \{\gamma, \delta\}$$

ενώ οι επαναληπτικοί συνδυασμοί των 4 ανά 2 είναι :

$$\alpha\alpha, \beta\beta, \gamma\gamma, \delta\delta, \alpha\beta, \alpha\gamma, \alpha\delta, \beta\gamma, \beta\delta, \gamma\delta$$

Συνδυασμοί

Αριθμός συνδυασμών $\binom{n}{m}$ ή $C(n,m)$ ή C_n^m

$$\binom{n}{m} = \frac{n!}{m!(n-m)!}$$

Απόδειξη: Για το σύνολο E με $|E| = n$ γράφουμε $\Delta_m(E)$ και $\Sigma_m(E)$ τα σύνολα των διατάξεων και συνδυασμών αντίστοιχα των n στοιχείων του E ανά m.
Για κάθε συνδυασμό $\sigma = \{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$ στο $\Sigma_m(E)$ ορίζουμε A_σ το σύνολο όλων των διατάξεων στο $\Delta_m(E)$ των οποίων τα στοιχεία είναι τα $a_1, a_2, \ldots, a_m$.
Προφανώς η οικογένεια $\{A_\sigma\}$ όπου $\sigma \in \Sigma_m(E)$ είναι μια διαμέριση του $\Delta_m(E)$ και ισχύει ότι $|A_\sigma| = m!$, (δηλαδή ο αριθμός των μεταθέσεων των στοιχείων $a_1, a_2, \ldots, a_m$).

Συνδυασμοί

Άρα είναι,

$$\begin{aligned}|\Delta_m(E)| &= |\bigcup\{A_\sigma : \sigma \in \Sigma_m(E)\}| \\ &= \sum_{\sigma\in\Sigma_m(E)} |A_\sigma| \\ &= m!|\Sigma_m(E)|\end{aligned}$$

Άρα,

$$|\Sigma_m(E)| = \frac{|\Delta_m(E)|}{m!} \iff \binom{n}{m} = \frac{n!}{m!(n-m)!}$$

Παρατήρηση

$$\binom{n}{m} = \binom{n}{n-m}$$

Συνδυασμοί

Παράδειγμα 9

Κατα πόσους τρόπους μπορεί να σχηματισθεί μια τετραμελής Πανεπιστημιακή επιτροπή από 4 φοιτητές, 3 λέκτορες και 2 καθηγητές

1. *Αν όλοι είναι εξίσου εκλέξιμοι.*
2. *Αν η επιτροπή δεν περιέχει κανένα φοιτητή.*
3. *Αν η επιτροπή πρεπει να περιέχει 1 καθηγητή, 1 λέκτορα και 2 φοιτητές.*

Συνδυασμοί

Λύση. Επειδή στο σχηματισμό της επιτροπής τα μέλη της έχουν ισότιμο ρόλο, πρόκειται για συνδυασμούς. Έτσι

1. Ο ζητούμενος αριθμός ισούται με τον αριθμό των συνδυασμών των $4 + 3 + 2 = 9$ ατόμων ανά 4, δηλαδή
$$\binom{9}{4} = \frac{9!}{4!(9-4)!} = \frac{6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 126$$
2. Ο ζητούμενος αριθμός ισούται με τον αριθμό των συνδυασμών των $3+2 = 5$ (εξαιρούνται οι φοιτητές) ανά 4, δηλαδή
$$\binom{5}{4} = \frac{5!}{4!(5-4)!} = 5$$
3. Για κάθε καθηγητή που θα εκλεγεί υπάρχουν $\binom{2}{1} = 2$ τρόποι, για τον λέκτορα $\binom{3}{1} = 3$ τρόποι, ενώ για τους 2 φοιτητές $\binom{4}{2} = 6$ τρόποι. Έτσι, σύμφωνα με την πολλαπλασιαστική αρχή ο ζητούμενος αριθμός θα είναι ίσος με $2 \cdot 3 \cdot 6 = 36$.

Αναγωγικές εξισώσεις συνδυασμών

Τρίγωνο του Pascal

$$\binom{n}{m} = \binom{n-1}{m} + \binom{n-1}{m-1}$$

όπου $m \leq n$ με $\binom{n}{0} = 1$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και $\binom{n}{m} = 0$ αν $m > n$.

Συνδυασμοί

Συνδυαστική απόδειξη: Έστω E ένα σύνολο με n στοιχεία. Διαμερίζουμε το σύνολο $\Sigma_m(E)$ των συνδυασμών των n στοιχείων του E ανά m σε δύο σύνολα A, B ως εξής : Αν $\beta \in E$ ορίζουμε :

- A το σύνολο όλων των συνδυασμών στο $\Sigma_m(E)$ *που δεν περιέχουν* το β, και
- B το σύνολο όλων των συνδυασμών στο $\Sigma_m(E)$ *που περιέχουν* το β.

Προφανώς,

$$A = \Sigma_m(E \setminus \{\beta\}) \text{ οπότε } |A| = \binom{n-1}{m}.$$

Από την άλλη, κάθε συνδυασμός $\sigma \in B$ περιέχει το β, οπότε γράφεται

$$\sigma = \{a_1, a_2, \ldots, a_{m-1}, \beta\}$$

όπου $a_i \in E \setminus \{\beta\}$ για κάθε $i \in [m-1]$.
Τότε ο συνδυασμός $\sigma' = \{a_1, a_2, \ldots, a_{m-1}\}$ είναι στο $\Sigma_{m-1}(E \setminus \{\beta\})$.

Συνδυασμοί

Επειδή η απεικόνιση $\sigma \to \sigma'$ από το B στο $\Sigma_{m-1}(E \setminus \{\beta\})$ είναι αμφιμονοσήμαντη προκύπτει ότι

$$|B| = |\Sigma_{m-1}(E \setminus \{\beta\})| = \binom{n-1}{m-1}$$

Άρα,

$$|\Sigma_m(E)| = |A| + |B|$$

και επομένως

$$\binom{n}{m} = \binom{n-1}{m} + \binom{n-1}{m-1}$$

Συνδυασμοί

Κατακόρυφη αναγωγική εξίσωση

$$\binom{n}{m} = \binom{m-1}{m-1} + \binom{m}{m-1} + \cdots + \binom{n-1}{m-1}$$
$$= \sum_{\nu=m}^{n} \binom{\nu-1}{m-1}$$

Συνδυασμοί

Απόδειξη: Εφαρμόζοντας το τρίγωνο του Pascal για κάθε $\nu \in \{n, n-1, \ldots, m+1, m\}$ αντί n προκύπτουν οι ισότητες:

$$\binom{n}{m} = \binom{n-1}{m} + \binom{n-1}{m-1}$$

$$\binom{n-1}{m} = \binom{n-2}{m} + \binom{n-2}{m-1}$$

$$\binom{n-2}{m} = \binom{n-3}{m} + \binom{n-3}{m-1}$$

$$\vdots$$

$$\binom{m+1}{m} = \binom{m}{m} + \binom{m}{m-1}$$

$$\binom{m}{m} = \binom{m-1}{m} + \binom{m-1}{m-1}$$

Συνδυασμοί

Προσθέτοντας κατά μέλη τις παραπάνω ισότητες έχουμε ότι

$$\binom{n}{m} = \binom{m-1}{m-1} + \binom{m}{m-1} + \cdots + \binom{n-3}{m-1} + \binom{n-2}{m-1} + \binom{n-1}{m-1}$$

Οριζόντια αναγωγική εξίσωση

$$\binom{n}{m} = (-1)^m \binom{n+1}{0} + (-1)^{m-1}\binom{n+1}{1} + \cdots + (-1)^{m-m}\binom{n+1}{m} = \sum_{\nu=0}^{m} (-1)^{m-\nu}\binom{n+1}{\nu}$$

Η **απόδειξη** σαν άσκηση. (Εφαρμογή του τριγώνου του Pascal για $n+1$ αντί n και κάθε $\nu = 1, 2, \ldots, m$ αντί m.)

Συνδυασμοί

Οι αριθμοί $\binom{n}{m}$

	0	1	2	3	4	5	6	7
0	1							
1	1	1						
2	1	2	1					
3	1	3	3	1				
4	1	4	6	4	1			
5	1	5	10	10	5	1		
6	1	6	15	20	15	6	1	
7	1	7	21	35	35	21	7	1

$20 = 10 + 10$ (Τρίγωνο Pascal)

$20 = 1 + 3 + 6 + 10$ (Κατακόρυφη αναγωγική σχέση)

$20 = -1 + 7 - 21 + 35$ (Οριζόντια αναγωγική σχέση)

Λυμένες ασκήσεις

Άσκηση 1

Να υπολογισθεί ο αριθμός των τρόπων που n ανδρόγυνα μπορούν να καθίσουν σε ένα ευθύγραμμο τραπέζι έτσι ώστε σε k καθορισμένα ανδρόγυνα οι σύζυγοι να κάθονται ο ένας δίπλα στον άλλο.

Λύση.

Το πλήθος των  είναι k και το πλήθος των  είναι $2n-2k$.
Θεωρούμε ότι κάθε ένα από τα k καθορισμένα ανδρόγυνα είναι ένα αδιαίρετο στοιχείο οπότε το πλήθος των στοιχείων που πρέπει να τοποθετήσουμε στον ευθύγραμμο τραπέζι είναι ίσο με με $2n-k$ και επομένως θα υπάρχουν $(2n-k)!$ τρόποι τοποθέτησης. Σε κάθε ένα από αυτούς τους τρόπους τοποθέτησης υπάρχουν δύο επιλογές τοποθέτησης καθενός από τα k καθορισμένα ζευγάρια (δηλαδή ο άνδρας να προηγείται ή να έπεται της γυναίκας). Άρα ο ζητούμενος αριθμός θα είναι ίσος με

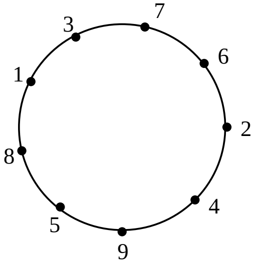
$$\underbrace{2\cdot 2\cdots 2}_{k \text{ φορές}}\,(2n-k)! = 2^k(2n-k)!$$

Λυμένες ασκήσεις

Άσκηση 2

Με πόσους τρόπους μπορούν να καθίσουν σε ένα στρογγυλό τραπέζι με 9 όμοιες θέσεις 9 άτομα.

Λύση.



Σε κάθε τρόπο τοποθέτησης των 9 ατόμων στο τραπέζι αντιστοιχούν 9 μεταθέσεις του συνόλου [9] που προκύπτουν με κυκλική εναλλαγή των στοιχείων τους. Έτσι για παράδειγμα για τον τρόπο τοποθέτησης του διπλανού σχήματος προκύπτουν οι μεταθέσεις: $(1, 3, 7, 6, 2, 4, 9, 5, 8)$, $(3, 7, 6, 2, 4, 9, 5, 8, 1)$, $(7, 6, 2, 4, 9, 5, 8, 1, 3)$, $(6, 2, 4, 9, 5, 8, 1, 3, 7)$, $(2, 4, 9, 5, 8, 1, 3, 7, 6)$, $(4, 9, 5, 8, 1, 3, 7, 6, 2)$, $(9, 5, 8, 1, 3, 7, 6, 2, 4)$, $(5, 8, 1, 3, 7, 6, 2, 4, 9)$, $(8, 1, 3, 7, 6, 2, 4, 9, 1)$.

Αν $\mathcal{K}$ είναι το σύνολο όλων των τρόπων τοποθέτησης των 9 ατόμων στο τραπέζι και $\mathcal{S}$ το σύνολο όλων των μεταθέσεων του [9] τότε ορίζουμε
C_i, $i \in \mathcal{K}$, το σύνολο όλων των μεταθέσεων του $\mathcal{S}$ που προκύπτουν από το i.
Προφανώς, η οικογένεια $(C_i)_{i \in \mathcal{K}}$ είναι μια διαμέριση του $\mathcal{S}$ και $\left|C_i\right| = 9$, για κάθε $i \in \mathcal{K}$. Οπότε προκύπτει ότι :

$$|\mathcal{S}| = \sum_{i \in \mathcal{K}} |C_i| \Leftrightarrow$$

$$9! = \underbrace{9 + 9 + \cdots + 9}_{|\mathcal{K}| \text{ φορές}} \Leftrightarrow$$

$$9! = |\mathcal{K}| \cdot 9 \Rightarrow |\mathcal{K}| = \frac{9!}{9} = 8!$$

Άσκηση 3

Να υπολογισθεί ο αριθμός των διαφόρων τρόπων που μπορούν να καθίσουν σε μια σειρά n αγόρια και k κορίτσια, $k \leq n+1$, έτσι ώστε να μην υπάρχουν δυο κορίτσια που να κάθονται το ένα δίπλα στο άλλο.

Λύση. Καταρχήν τοποθετούμε τα αγόρια. Ο αριθμός τοποθέτησης των αγοριών είναι ίσος με με τον αριθμό των μεταθέσεων των n αγοριών δηλαδή $n!$.

$$\underline{\quad}\ \ \underline{\alpha_1}\ \ \underline{\quad}\ \ \underline{\alpha_2}\ \ \underline{\quad}\ \ \underline{\alpha_3}\ \ \underline{\quad}\ \ \cdots\cdots\ \ \underline{\quad}\ \ \underline{\alpha_{n-1}}\ \underline{\quad}\ \ \underline{\alpha_n}\ \ \underline{\quad}$$

Για κάθε μετάθεση $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ του συνόλου των αγοριών υπάρχουν $n+1$ επιτρεπτές θέσεις για τα κορίτσια. Έτσι ο αριθμός των τρόπων που μπορούν να τοποθετηθούν τα k κορίτσια, για τη μετάθεση αυτή των αγοριών, ισούται με τον αριθμό των διατάξεων των $n+1$ ανά k δηλαδή $P(n+1,k)$.

Άρα, σύμφωνα με την πολλαπλασιαστική αρχή ο ζητούμενος αριθμός θα είναι ίσος με

$$n!P(n+1,k) = \frac{n!(n+1)!}{(n+1-k)!}$$

ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΥΝΔΥΑΣΤΙΚΗΣ
2η ΔΙΑΛΕΞΗ

- **Επαναληπτικοί συνδυασμοί**
- **Μεταθέσεις k ειδών στοιχείων**
- **Ακέραιες λύσεις γραμμικής εξίσωσης**
- **Μονοπάτια**

Επαναληπτικοί συνδυασμοί

Αριθμός επαναληπτικών συνδυασμών

$$E(n, m) = \left[\begin{matrix} n \\ m \end{matrix} \right] = \binom{n+m-1}{m}$$

Συνδυαστική απόδειξη: Θεωρούμε τα σύνολα

$$E = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$$

και

$$T = \{x_1, x_2, \ldots, x_n, x_{n+1}, \ldots, x_{n+m-1}\}$$

Έστω

- $E_m(E)$ το σύνολο των **επαναληπτικών συνδυασμών** των n στοιχείων του E ανά m

  και
- $\Sigma_m(T)$ το σύνολο των (απλών) **συνδυασμών** των $n+m-1$ στοιχείων του T ανά m.

Θα κατασκευασθεί μια αμφιμονοσήμαντη απεικόνιση μεταξύ τους.

Επαναληπτικοί συνδυασμοί

Παράδειγμα για $n = 8$ και $m = 5$

$$E = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8\}$$

$$T = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_9, x_{10}, x_{11}, x_{12}\}$$

Έστω σ ένας επαναληπτικός συνδυασμός του E, π.χ.

$$\sigma = x_2 x_7 x_2 x_5 x_7$$

Επειδή στους συνδυασμούς δεν παίζει ρόλο η σειρά μπορούμε να γράφουμε:

$$\sigma = x_2 x_2 x_5 x_7 x_7$$

Τότε

$$\sigma' = x_2 x_3 x_7 x_{10} x_{11}$$

είναι ένας συνδυασμός του T.
Η απεικόνιση $\sigma \to \sigma'$ είναι αμφιμονοσήμαντη.

Επαναληπτικοί συνδυασμοί

Κατασκευή μιας αμφιμονοσήμαντης απεικόνισης από το $E_m(E)$ στο $\Sigma_m(T)$
όπου $E = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ και $T = \{x_1, x_2, \ldots, x_{n+m-1}\}$

Τα στοιχεία του $E_m(E)$ μπορούν να γραφούν υπό την μορφή :

$$\sigma = x_{i_1} x_{i_2} \cdots x_{i_m} \text{ όπου } i_1 \leq i_2 \leq \cdots \leq i_m \leq n.$$

Ορίζουμε

$$\sigma' = x_{j_1} x_{j_2} \cdots x_{j_m}$$

όπου $j_k = i_k + k - 1$, για κάθε $k \in [m]$. (Δηλαδή ``δείκτης'' + ``σειρά'' $-$ 1).
Προφανώς για κάθε $k \in [m]$ ισχύουν:

$$j_k \leq n + m - 1$$

και

$$j_1 < j_2 < \cdots < j_m,$$

δηλαδή τα στοιχεία του σ' είναι διακεκριμένα και επομένως $\sigma' \in \Sigma_m(T)$.

Επαναληπτικοί συνδυασμοί

Η απεικόνιση $\sigma \to \sigma'$ είναι μια αμφιμονοσήμαντη απεικόνιση μεταξύ των συνόλων $E_m(E)$ και $\Sigma_m(T)$, οπότε είναι

$$|E_m(E)| = |\Sigma_m(T)| \Leftrightarrow \begin{bmatrix} n \\ m \end{bmatrix} = \binom{n+m-1}{m}$$

Αριθμός μεταθέσεων k ειδών στοιχείων με $n_1, n_2, \ldots, n_k$ στοιχεία αντίστοιχα.

$$M(n_1, n_2, \ldots, n_k) = \frac{n!}{n_1!n_2!\cdots n_k!} \text{ όπου } n = n_1 + n_2 \cdots n_k.$$

Απόδειξη: Κάθε μετάθεση σ, k ειδών που n_1 συμπίπτουν με a_1, n_2 συμπίπτουν με a_2, ..., n_k συμπίπτουν με a_k μπορεί να κατασκευασθεί ως εξής:

Αρχικά τοποθετούμε τα n_1 το πλήθος a_1 σε n_1 από τις n θέσεις

σ __ __ $\underline{\alpha_1}$ __ __ $\underline{\alpha_1}$ __ __ $\underline{\alpha_1}$ __ __ __ __

Τούτο γίνεται με $\binom{n}{n_1}$ τρόπους.

Έπειτα τοποθετούμε τα n_2 το πλήθος a_2 σε n_2 από τις $n - n_1$ θέσεις που περίσσεψαν

σ __ $\underline{\alpha_2}$ $\underline{\alpha_1}$ $\underline{\alpha_2}$ __ $\underline{\alpha_1}$ __ __ $\underline{\alpha_1}$ $\underline{\alpha_2}$ __ $\underline{\alpha_2}$ __

Αυτό γίνεται με $\binom{n-n_1}{n_2}$ τρόπους.

Έπειτα τοποθετούμε τα n_3 το πλήθος a_3 με $\binom{n-n_1-n_2}{n_3}$ τρόπους.

Μεταθέσεις k ειδών στοιχείων

Άρα τελικά για να κατασκευάσουμε όλες τις μεταθέσεις αυτές των k ειδών υπάρχουν

$$\binom{n}{n_1}\binom{n-n_1}{n_2}\binom{n-n_1-n_2}{n_3}\cdots\binom{n-n_1-n_2-\cdots-n_{k-1}}{n_k}$$

τρόποι. Έτσι,

$$\begin{aligned} M(n_1, n_2, \ldots, n_k) &= \frac{n!}{n_1!(n-n_1)!} \cdot \frac{(n-n_1)!}{n_2!(n-n_1-n_2)!} \cdot \frac{(n-n_1-n_2)!}{n_3!(n-n_1-n_2-n_3)!} \\ &\quad \cdots \frac{n_k!}{n_k!0!} \\ &= \frac{n!}{n_1!n_2!\cdots n_k!} \end{aligned}$$

Μεταθέσεις k ειδών στοιχείων

Παράδειγμα 1

Πόσες είναι οι μεταθέσεις των γραμμάτων της λέξης :

$$M\,A\,\Theta\,H\,M\,A\,T\,I\,K\,A$$

Λύση. Το πλήθος των μεταθέσεων των γραμμάτων της δοσμένης λέξης ισούται με τον αριθμό των μεταθέσεων 7 ειδών (όσων δηλαδή είναι τα διαφορετικά γράμματά της) δηλαδή,

$$M(2,3,1,1,1,1,1) = \frac{10!}{2!3!1!1!1!1!1!} = 302400$$

Παράδειγμα 2

Να δοθεί μια συνδυαστική ερμηνεία του αριθμού $\dfrac{(4n)!}{2^{3n}3^n}$.

Λύση. Ο αριθμός των τρόπων διάταξης των αντικειμένων $A_1, A_2, \ldots, A_n$, τα οποία εμφανίζονται 4 φορές το καθένα ισούται με τον αριθμό των μεταθέσεων n ειδών στοιχείων με $4, 4, \ldots, 4$ στοιχεία αντίστοιχα, δηλαδή είναι ίσος με

$$\frac{(4+4+\cdots+4)!}{4!4!\cdots4!} = \frac{(4n)!}{(4!)^n} = \frac{(4n)!}{4^n3^n2^n} = \frac{(4n)!}{2^{2n}3^n2^n} = \frac{(4n)!}{2^{3n}3^n}.$$

Ακέραιες Λύσεις Γραμμικής Εξίσωσης

$$x_1 + x_2 \cdots + x_n = m \qquad (1)$$

όπου $m, n \in \mathbb{N}^*$ και $x_i \in \mathbb{N}$.

Πρόταση 1

1. *Ο αριθμός των λύσεων της (1) με $x_i \in \{0, 1\}$ για κάθε $i \in [n]$ είναι ίσος με $\binom{n}{m}$.*
2. *Ο αριθμός των λύσεων της (1) είναι ίσος με $\left[{n \atop m}\right]$.*

Απόδειξη

1. Αρκεί να κατασκευασθεί μια αμφιμονοσήμαντη απεικόνιση f μεταξύ του συνόλου όλων των λύσεων $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ της (1) με $x_i \in \{0, 1\}$, και του συνόλου όλων των υποσυνόλων A του $[n]$ με $|A| = m$.
   Πραγματικά, θέτουμε
   $$f(\mathbf{x}) = A_{\mathbf{x}} = \{i \in [n] : x_i = 1\}$$
   Για παράδειγμα αν $n = 10$, $m = 4$ και $\mathbf{x} = (1, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 1, 1, 0)$ τότε $f(\mathbf{x}) = \{1, 4, 8, 9\}$.
   Προφανώς $A_{\mathbf{x}} \subseteq [n]$ με $|A_{\mathbf{x}}| = m$, οπότε η f είναι καλά ορισμένη.

Ακέραιες Λύσεις Γραμμικής Εξίσωσης

Εύκολα αποδεικνύεται ότι η συνάρτηση f είναι αμφιμονοσήμαντη με

$$f^{-1}(A) = (\mu_A(1), \mu_A(2), \dots, \mu_A(n))$$

για κάθε $A \subseteq [n]$ με $|A| = m$, όπου μ_A είναι η χαρακτηριστική συνάρτηση του A.

Για παράδειγμα, αν $n = 10$ και $A = \{1, 4, 8, 9\}$ προκύπτει ότι

$$\begin{aligned} &f^{-1}(A) \\ &= (\mu_A(1), \mu_A(2), \mu_A(3), \mu_A(4), \mu_A(5), \mu_A(6), \mu_A(7), \mu_A(8), \mu_A(9), \mu_A(10)) \\ &= (1, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 1, 1, 0) \end{aligned}$$

Ακέραιες Λύσεις Γραμμικής Εξίσωσης

2. Αρκεί να κατασκευασθεί μια αμφιμονοσήμαντη απεικόνιση g μεταξύ του συνόλου όλων των μη αρνητικών ακεραίων λύσεων της εξίσωσης (1) και του συνόλου όλων των $\{0, 1\}$-λύσεων

$$\mathbf{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_{n+m-1})$$

της εξίσωσης

$$y_1 + y_2 + \cdots + y_{n+m-1} = m \tag{2}$$

Αν $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ είναι μη αρνητική ακέραια λύση, τότε θέτουμε

$$\mathbf{y} = (\underbrace{1, 1, \ldots, 1}_{x_1 \text{ φορές}}, 0, \underbrace{1, 1, \ldots, 1}_{x_2 \text{ φορές}}, 0, \ldots, \underbrace{1, 1, \ldots, 1}_{x_{n-1} \text{ φορές}}, 0, \underbrace{1, 1, \ldots, 1}_{x_n \text{ φορές}})$$

Το πλήθος των στοιχείων του $\mathbf{y}$ είναι $n + m - 1$ διότι $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = m$ (πλήθος μονάδων) και το πλήθος των μηδενικών είναι $n - 1$.
Επειδή το άθροισμα των στοιχείων της $\mathbf{y}$ είναι m έπεται ότι $\mathbf{y}$ ειναι λύση της (2).

Ακέραιες Λύσεις Γραμμικής Εξίσωσης

Με άλλα λόγια ορίζουμε $g(\mathbf{x}) = \mathbf{y}$ με

$$y_t = \begin{cases} 0, & t = x_1 + x_2 + \cdots + x_i + i \\ 1, & t \neq x_1 + x_2 + \cdots + x_i + i \end{cases}$$

όπου $i \in [n-1]$ και $t \in [n+m-1]$.
Αντίστροφα, αν $y = (y_1, y_2, \ldots, y_{n+m-1})$ είναι μια $\{0,1\}$-λύση της (2) τότε υπάρχουν ακριβώς $n-1$ το πλήθος $t \in [n+m-1]$ με $y_t = 0$.
Τότε, βάζοντας ένα μηδενικό στην αρχή και ένα στο τέλος του y για κάθε $i \in [n]$ ορίζουμε x_i το πλήθος μονάδων που περιέχονται μεταξύ του i-στού και $(i+1)$-στού μηδενικού.

Να δειχθεί ότι η $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ είναι η μοναδική λύση της (2) με $g^{-1}(\mathbf{y}) = \mathbf{x}$.

Παράδειγμα

Η $\mathbf{x} = (2, 0, 3, 1, 2)$ λύση της εξίσωσης $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 8$ απεικονίζεται στην

$$\mathbf{y} = (1, 1, 0, 0, 1, 1, 1, 0, 1, 0, 1, 1)$$

$\{0, 1\}$-λύση της εξίσωσης

$$y_1 + y_2 + y_3 + \cdots + y_{12} = 8$$

Ακέραιες Λύσεις Γραμμικής Εξίσωσης

Άσκηση 4

Δίνονται $m, n \in \mathbb{N}^*$ *και οι ακέραιοι αριθμοί* s_i*, όπου* $i \in [n]$*, με*

$$s = s_1 + s_2 + \cdots + s_n \leq m.$$

Να δειχθεί ότι ο αριθμός των ακέραιων (όχι κατ᾽ ανάγκη μη αρνητικών) λύσεων της εξίσωσης

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n = m \tag{3}$$

με τους περιορισμούς $x_i \geq s_i$ *για κάθε* $i \in [n]$ *ισούται με*

$$\binom{n + m - s - 1}{n - 1}$$

Λύση. Αν $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ είναι μια λύση της (3) με $x_i \geq s_i$, για κάθε $i \in [n]$, τότε θέτουμε

$$y_i = x_i - s_i \text{ για κάθε } i \in [n].$$

Εύκολα προκύπτει ότι $y_i \in \mathbb{N}$ για κάθε $i \in [n]$ και

$$y_1 + y_2 + \cdots + y_n = m - s \tag{4}$$

Αντίστροφα, αν $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ είναι μια μη αρνητική λύση της (4) τότε αν θέσουμε

$$x_i = y_i + s_i \text{ για κάθε } i \in [n]$$

προκύπτει ότι $x_i \geq s_i$ για κάθε $i \in [n]$ και $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ είναι λύση της (3). Κατόπιν τούτων προκύπτει ότι υπάρχει μια αμφιμονοσήμαντη απεικόνιση μεταξύ των ακεραίων λύσεων της (3) με $x_i \geq s_i$ για κάθε $i \in [n]$ και των μη αρνητικών λύσεων της (4). Έτσι ο ζητούμενος αριθμός θα είναι ίσος με τον αριθμό των μη αρνητικών λύσεων της (4) δηλαδή

$$\binom{n+m-s-1}{m-s} = \binom{n+m-s-1}{n-1}.$$

Ακέραιες Λύσεις Γραμμικής Εξίσωσης

Άσκηση 5

Να διατυπωθεί και να αποδειχθεί ανάλογο αποτέλεσμα με αυτό της προηγούμενης άσκησης 4 όταν $s = s_1 + s_2 + \cdots + s_n \geq m$ *και* $x_i \leq s_i$ *για κάθε* $i \in [n]$.

Άσκηση 6

Να βρεθεί ο αριθμός των λύσεων της γραμμικής εξίσωσης

$$x_1 + x_2 \cdots + x_n = m$$

με $x_i \in \mathbb{N}^*$ *για κάθε* $i \in [n]$.

Ακέραιες Λύσεις Γραμμικής Εξίσωσης

Άσκηση 7

Να βρεθεί ο αριθμός των μη αρνητικών ακέραιων λύσεων της εξίσωσης

$$x_1 + x_2 + x_3 + 5x_4 = 16.$$

Λύση. Παρατηρούμε ότι για κάθε λύση της εξίσωσης ισχύει ότι $0 \leq x_4 \leq 3$. Διακρίνουμε περιπτώσεις για την τιμή του x_4.

Αν $x_4 = 0$, ο ζητούμενος αριθμός ισούται με τον αριθμό των μη αρνητικών ακέραιων λύσεων της εξίσωσης

$$x_1 + x_2 + x_3 = 16,$$

δηλαδή είναι ίσος με $\left[{3 \atop 16} \right] = \binom{18}{16}$.

Αν $x_4 = 1$, ο ζητούμενος αριθμός ισούται με τον αριθμό των μη αρνητικών ακέραιων λύσεων της εξίσωσης

$$x_1 + x_2 + x_3 = 11,$$

δηλαδή είναι ίσος με $\left[{3 \atop 11} \right] = \binom{13}{11}$.

Ακέραιες Λύσεις Γραμμικής Εξίσωσης

Αν $x_4 = 2$, ο ζητούμενος αριθμός ισούται με τον αριθμό των μη αρνητικών ακέραιων λύσεων της εξίσωσης

$$x_1 + x_2 + x_3 = 6,$$

δηλαδή είναι ίσος με $\left[{3 \atop 6}\right] = \binom{8}{6}$.
Τέλος, αν $x_4 = 3$, ο ζητούμενος αριθμός ισούται με τον αριθμό των μη αρνητικών ακέραιων λύσεων της εξίσωσης

$$x_1 + x_2 + x_3 = 1,$$

δηλαδή είναι ίσος με $\left[{3 \atop 1}\right] = \binom{3}{1}$.
Αρα, ο συνολικός αριθμός των λύσεων της εξίσωσης ισούται με $\binom{18}{2} + \binom{13}{2} + \binom{8}{2} + \binom{3}{2}$.

Ακέραιες Λύσεις Γραμμικής Εξίσωσης

Άσκηση 8

Να βρεθεί ο αριθμός των μη αρνητικών ακέραιων λύσεων της ανίσωσης

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 < 12.$$

Λύση. Επειδή τα x_i, $i \in [4]$ είναι ακέραιοι ισχύει

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 < 12 \Leftrightarrow x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \leq 11$$

Αν τεθεί

$$x_5 = 11 - x_1 - x_2 - x_3 - x_4$$

τότε $x_5 \geq 0$ και η παραπάνω ανίσωση είναι ισοδύναμη με την εξίσωση

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 11$$

Άρα, ο αριθμός των λύσεων της αρχικής ανίσωσης είναι ίσος με τον αριθμό των μη αρνητικών ακέραιων λύσεων της εξίσωσης

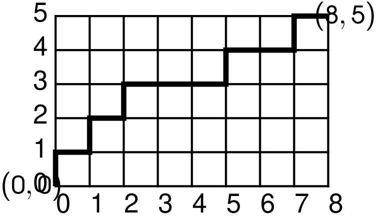
$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 11$$

δηλαδή είναι ίσος με $\left[{5 \atop 11} \right] = \binom{5+11-1}{11} = \binom{15}{11}$.

Μονοπάτια

Ένα **μονοπάτι** με δύο **βήματα** $V = (0,1)$ (**κατακόρυφα**) και $H = (1,0)$ (**οριζόντια**) είναι μια ακολουθία με στοιχεία στο $\{H, V\}$ που ενώνει τα σημεία $(0,0)$ και (n,m).

Παράδειγμα Αν $n = 8$ και $m = 5$



Το μονοπάτι $P = V\ H\ V\ H\ V\ H\ H\ H\ V\ H\ H\ V\ H$

Το **μήκος** (δηλαδή ο αριθμός των βημάτων) ενός μονοπατιού που ενώνει τα σημεία $(0,0)$ και (n,m) είναι ίσο με $n + m$. Συγκεκριμένα το μονοπάτι έχει n οριζόντια και m κατακόρυφα βήματα.

Μονοπάτια

Το πλήθος των μονοπατιών που ενώνουν τα σημεία $(0,0)$ και (n,m) είναι ίσο με $\binom{n+m}{n}$.

Αντιστοιχία μονοπατιών και μη αρνητικών ακέραιων λύσεων εξίσωσης

Κάθε μονοπάτι που ενώνει τα σημεία $(0,0)$ και $(n-1,m)$ αντιστοιχεί σε μια μη αρνητική και ακέραια λύση της εξίσωσης

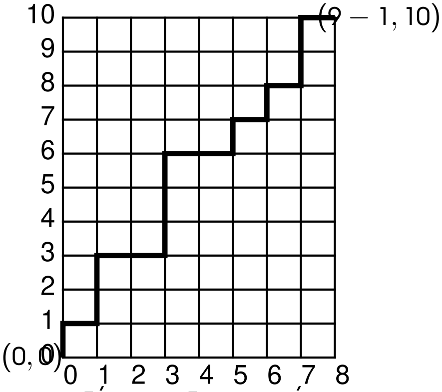
$$x_1 + x_2 \cdots + x_n = m,$$

και αντιστρόφως.
Πράγματι, το μονοπάτι P γράφεται μονοσήμαντα στη μορφή

$$P = V^{x_1} H V^{x_2} H V^{x_3} \cdots V^{x_{n-1}} H V^{x_n}$$

όπου x_{i+1}, $i \in [n-2]$ είναι το πλήθος των κατακόρυφων βημάτων μεταξύ του i-στού και $(i+1)$-οστού οριζόντιου βήματος, x_1 (αντ. x_n) είναι το πλήθος των κατακόρυφων βημάτων πρίν (αντ. μετά) από το πρώτο (αντ. τελευταίο) οριζόντιο βήμα.
Το μονοπάτι P αντιστοιχεί στη λύση $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ της εξίσωσης $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = m$.

Παράδειγμα



Το μονοπάτι P γράφεται μονοσήμαντα στη μορφή

$$P = V^1\ H\ V^2 H\ V^0\ H\ V^3\ H\ V^0\ H\ V^1 H\ V^1 H\ V^2 H\ V^0$$

και αντιστοιχεί στην λύση $(1, 2, 0, 3, 0, 1, 1, 2, 0)$ της εξίσωσης

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 + x_8 + x_9 = 10.$$

Μονοπάτια

Συμπέρασμα

Το πλήθος των μη αρνητικών και ακέραιων λύσεων της εξίσωσης

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n = m$$

είναι ίσο με το πλήθος των μονοπατιών που ενώνουν τα σημεία $(0, 0)$ και $(n-1, m)$, δηλαδή ίσο με

$$\binom{n+m-1}{n-1} = \begin{bmatrix} n \\ m \end{bmatrix}.$$

Μονοπάτια

Άσκηση 9

Για τα μονοπάτια που αποτελούνται από βήματα $(1, 0)$ *και* $(0, 1)$ *να υπολογισθεί*

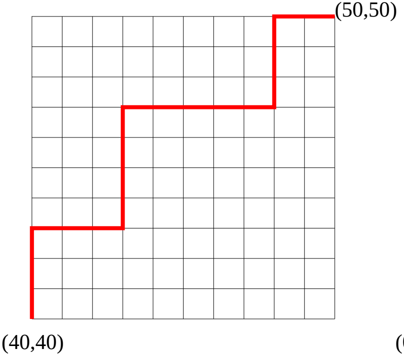
1. *ο αριθμός των μονοπατιών από το σημείο* $(0, 0)$ *στο σημείο* $(50, 50)$,
2. *ο αριθμός των μονοπατιών από το σημείο* $(40, 40)$ *στο σημείο* $(50, 50)$,
3. *ο αριθμός των μονοπατιών από το σημείο* $(0, 0)$ *στο σημείο* $(50, 50)$ *που διέρχονται από το σημείο* $(40, 40)$,
4. *ο αριθμός των μονοπατιών από το σημείο* $(0, 0)$ *στο σημείο* $(50, 50)$ *που δεν διέρχονται από το σημείο* $(40, 40)$.

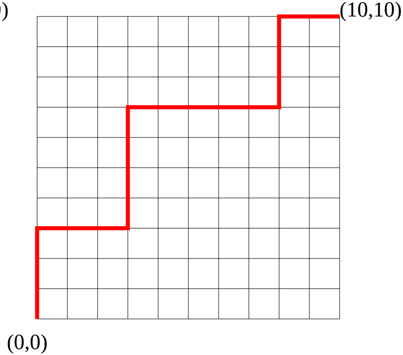
Λύση: *Θα χρησιμοποιηθεί ο τύπος: Ο αριθμός* $M(n, m)$ *όλων των μονοπατιών από* $(0, 0)$ *στο* (n, m) *είναι* $M(n, m) = \binom{n+m}{n}$.

Κατόπιν τούτου έχουμε ότι

Μονοπάτια

1. $M(50,50) = \binom{50+50}{50} = \binom{100}{50}$.
2. Κάθε μονοπάτι από το $(40,40)$ στο $(50,50)$ αντιστοιχεί σε ένα μονοπάτι από το $(0,0)$ στο $(10,10)$ (με παράλληλη μετατόπιση των αξόνων)





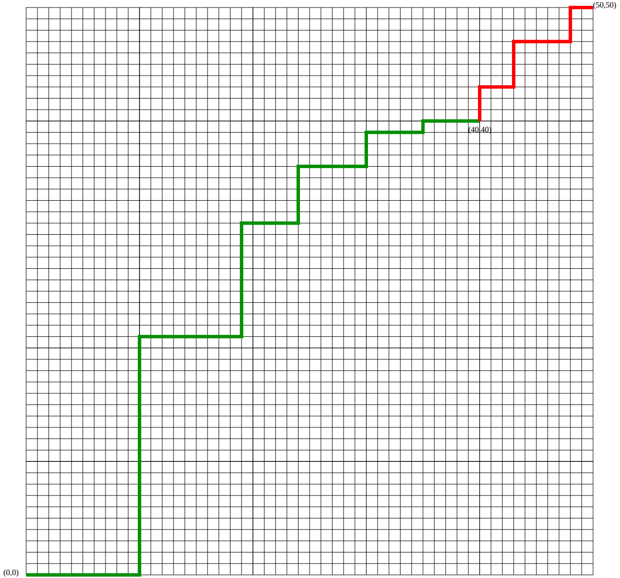
$$V\ V\ V\ H\ H\ H\ V\ V\ V\ V\ H\ H\ H\ H\ H\ V\ V\ V\ H\ H$$

οπότε ο ζητούμενος αριθμός ισούται με $M(10,10) = \binom{20}{10}$.

Μονοπάτια

3. Ο ζητούμενος αριθμός ισούται με $M(40,40)M(10,10)$ αφού κάθε τέτοιο μονοπάτι διασπάται κατά μοναδικό σε δύο μονοπάτια: Το πρώτο από το $(0,0)$ στο $(40,40)$ και το δεύτερο από το $(40,40)$ στο $(50,50)$

Μονοπάτια



Μονοπάτια

4. Ο ζητούμενος αριθμός ισούται με $M(50,50) - M(40,40)M(10,10)$.

Επαναληπτικές Ασκήσεις

1. Πόσους πενταψήφιους αριθμούς μπορούμε να κατασκευάσουμε με τα ψηφία $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$
    1. αν πρέπει να έχουν τα ψηφία τους διαφορετικά,
    2. αν τα ψηφία τους μπορεί να επαναλαμβάνονται,
    3. αν πρέπει να είναι άρτιοι αριθμοί και τα ψηφία τους να είναι διαφορετικά
    4. αν το άθροισμα του πρώτου και του τελευταίου ψηφίου τους είναι ίσο με 4 και τα ψηφία τους μπορούν να επαναλαμβάνονται.
2. Πόσες είναι οι μεταθέσεις των γραμμάτων της λέξης

    Π Α Ν Ε Π Ι Σ Τ Η Μ Ι Ο Υ Π Ο Λ Ι Σ
3. Κατά πόσους τρόπους ένα τριμελές συμβούλιο μπορεί να σχηματισθεί από 4 αντρόγυνα,
    1. αν όλοι είναι εξίσου εκλέξιμοι,
    2. αν το συμβούλιο πρέπει να περιλαμβάνει δύο γυναίκες και ένα άντρα,
    3. αν δεν επιτρέπεται δύο σύζυγοι να περευρίσκονται στο συμβούλιο.

Επαναληπτικές ασκήσεις

4. Πόσες λέξεις μπορούν να κατασκευασθούν χρησιμοποιώντας όλα τα γράμματα της λέξης Ε Φ Α Ρ Μ Ο Γ Η και πόσες από αυτές έχουν τα γράμματα Α και Ρ διαδοχικά.
5. Πέντε άτομα μπαίνουν σε ασανσέρ στο ισόγειο ενός κτιρίου με 4 ορόφους. Με πόσους τρόπους μπορούν να κατανεμηθούν στους ορόφους.
6. Με πόσους τρόπους μπορούν να χωρισθούν 20 φοιτητές σε 3 ομάδες των 10, 6, και 4 ατόμων αντίστοιχα.
7. Από 21 καθηγητές εκ των οποίων 8 είναι μαθηματικοί, 6 φυσικοί και 7 χημικοί θέλουμε να σχηματίσουμε μια επιτροπή από 5 καθηγητές στους οποίους τουλάχιστον ένας πρέπει να είναι φυσικός, για να πάρουν μέρος σε ένα συνέδριο. Πόσες επιτροπές μπορούν να σχηματισθούν.
8. Κατά πόσους τρόπους 4 λευκές, 5 κίτρινες και 9 μαύρες μπάλες μπορούν να διαταχθούν
    1. χωρίς περιορισμό
    2. αν κάθε διάταξή τους αρχίζει με λευκή και τελειώνει με μαύρη μπάλα.

9. Να δειχθεί ότι ο αριθμός των απεικονίσεων $f : [m] \to [n]$ που είναι
   1. γνησίως αύξουσες είναι ίσος με $\binom{n}{m}$
   2. αύξουσες είναι ίσος με $\left[{n \atop m}\right]$
10. Να βρεθεί μια αμφιμονοσήμαντη απεικόνιση μεταξύ του συνόλου των αυξουσών συναρτήσεων $f : [m] \to [n]$ και του συνόλου όλων των μη αρνητικών λύσεων της εξίσωσης : $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = m$.
(**Υπόδειξη** Για $f : [m] \to [n]$ αύξουσα, ορίζουμε $x_i = \left|f^{-1}(\{i\})\right|$, για κάθε $i \in [n]$, τότε $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = m$ κλπ.)
11. Να δειχθεί ότι για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$ ισχύει
$$P(n, n) - 2P(n-1, n-1) - (n-1)!(n-2) = 0.$$
12. Να δειχθεί ότι για κάθε $m, n \in \mathbb{N}$ ισχύει
$$\begin{aligned} n\binom{n}{m} &= (m+1)\binom{n}{m+1} + m\binom{n}{m} \\ &= m\binom{n+1}{m+1} + \binom{n}{m+1} \end{aligned}$$

13. Να λυθούν στο σύνολο $\mathbb{N}$ οι εξισώσεις
    1. $$\frac{1}{\binom{4}{n}} = \frac{1}{\binom{5}{n}} + \frac{1}{\binom{6}{n}}$$
    2. $$\frac{1}{\binom{n}{4}} = \frac{1}{\binom{n}{5}} + \frac{1}{\binom{n}{6}}$$
14. Να βρεθεί ο αριθμός $m \in \mathbb{N}$ για τον οποίο ισχύουν $\binom{n}{m} = 252$ και $P(n, m) = 30240$ για κάποιο $n \in \mathbb{N}^*$.