ΔΙΑΦΟΡΕΣ - ΠΑΡΑΓΟΝΤΙΚΑ ΠΟΛΥΩΝΥΜΑ ΔΙΩΝΥΜΟ ΤΟΥ ΝΕΥΤΩΝΑ

Έστω h σταθερός αριθμός. Για κάθε συνάρτηση y/A ορίζεται μια άλλη συνάρτηση $\Delta y/A$ ως εξής:

$$\Delta y(x) = y(x+h) - y(x)$$

η οποία ονομάζεται (πρώτη) **διαφορά της** y ή **διαφορά πρώτης τάξεως**.

Έτσι ορίζεται ένας τελεστής

$$\Delta : y \to \Delta y$$

ο οποίος ονομάζεται **τελεστής διαφοράς**.

Παράδειγμα: Αν $y(x) = 3x^2 + 4x + 5$ τότε

$$\begin{aligned}\Delta y(x) &= y(x+h) - y(x) \\ &= 3(x+h)^2 + 4(x+h) + 5 - (3x^2 + 4x + 5) \\ &= 6xh + 3h^2 + 4h.\end{aligned}$$

Ιδιότητες

1. $\Delta(y_1 + y_2) = \Delta y_1 + \Delta y_2$.
2. $\Delta(cy) = c\Delta y$, για κάθε $c \in \mathbb{R}$.

Επαγωγικά ορίζεται η n-οστή διαφορά

$$\Delta^n y(x) = \Delta(\Delta^{n-1} y(x)).$$

Στα επόμενα θα θεωρείται $h = 1$.

Οι διαφορές εκφράζονται ως γραμμικός συνδυασμός διαδοχικών τιμών του $y(x)$.

- $\Delta y(x) = y(x+1) - y(x)$
- $$\begin{aligned}\Delta^2 y(x) &= \Delta(\Delta(y(x)) = \Delta(y(x+1) - y(x)) \\ &= \Delta y(x+1) - \Delta y(x) \\ &= y(x+2) - y(x+1) - (y(x+1) - y(x)) \\ &= y(x+2) - 2y(x+1) + y(x).\end{aligned}$$

Γενικά ισχύει

$$\Delta^n y(x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} y(x+n-k).$$

Απόδειξη. Θα αποδειχθεί με τη μέθοδο της επαγωγής. Για $n = 1$ ισχύει, διότι

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{1}(-1)^k\binom{1}{k}y(x+1-k) &= (-1)^0\binom{1}{0}y(x+1-0)+(-1)^1\binom{1}{1}y(x+1-1)\\ &= y(x+1)-y(x) = \Delta y(x).\end{aligned}$$

Έστω ότι ισχύει για $n = m$, δηλαδή

$$\Delta^m y(x) = \sum_{k=0}^{m}(-1)^k\binom{m}{k}y(x+m-k).$$

Θα αποδειχθεί ότι ισχύει και για $n = m+1$, δηλαδή

$$\Delta^{m+1}y(x) = \sum_{k=0}^{m+1}(-1)^k\binom{m+1}{k}y(x+m+1-k).$$

Πράγματι, από τον ορισμό της διαφοράς και την υπόθεση της επαγωγής ισχύει ότι

$$\Delta^{m+1}y(x) = \Delta(\Delta^m y(x)) = \Delta(\sum_{k=0}^{m}(-1)^k\binom{m}{k}y(x+m-k)).$$

Λόγω της γραμμικότητας του τελεστή Δ, έπεται ότι

$$\begin{aligned}
\Delta^{m+1} y(x) &= \sum_{k=0}^{m} (-1)^k \binom{m}{k} \Delta y(x+m-k) \\
&= \sum_{k=0}^{m} (-1)^k \binom{m}{k} \big(y(x+m-k+1) - y(x+m-k) \big) \\
&= \sum_{k=0}^{m} (-1)^k \binom{m}{k} y(x+m-k+1) + \sum_{k=0}^{m} (-1)^{k+1} \binom{m}{k} y(x+m-k) \\
&\overset{\lambda=k+1}{=} \sum_{k=0}^{m} (-1)^k \binom{m}{k} y(x+m-k+1) + \sum_{\lambda=1}^{m+1} (-1)^{\lambda} \binom{m}{\lambda-1} y(x+m-\lambda+1)
\end{aligned}$$

Επομένως,

$$\begin{aligned}
\Delta^{m+1}y(x) &= \sum_{k=0}^{m}(-1)^k\binom{m}{k}y(x+m-k+1) + \sum_{k=1}^{m+1}(-1)^k\binom{m}{k-1}y(x+m-k+1) \\
&= (-1)^0\binom{m}{0}y(x{+}m{-}0{+}1){+}\sum_{k=1}^{m}(-1)^k\left(\binom{m}{k}+\binom{m}{k-1}\right)y(x{+}m{-}k{+}1) \\
&\qquad + (-1)^{m+1}\binom{m}{m}y(x{+}m{-}(m{+}1){+}1) \\
&= (-1)^0\binom{m+1}{0}y(x{+}m{-}0{+}1) + \sum_{k=1}^{m}(-1)^k\binom{m+1}{k}y(x{+}m{-}k{+}1) \\
&\qquad + (-1)^{m+1}\binom{m+1}{m+1}y(x+m-(m+1)+1) \\
&= \sum_{k=0}^{m+1}(-1)^k\binom{m+1}{k}y(x+m+1-k),
\end{aligned}$$

αφού $\binom{m}{0}=\binom{m+1}{0}=1=\binom{m}{m}=\binom{m+1}{m+1}$ και $\binom{m}{k}+\binom{m}{k-1}=\binom{m+1}{k}$. $\square$

Προσδιορισμός των διαφορών με τη βοήθεια πινάκων

Παράδειγμα: Να βρεθούν οι διαφορές πρώτης, δευτέρας και τρίτης τάξεως για $x = 0$ της συνάρτησης $y(x)$ όταν $y(0) = 4$, $y(1) = 6$, $y(2) = 9$ και $y(3) = 14$.

x	$y(x)$	$\Delta y(x)$	$\Delta^2 y(x)$	$\Delta^3 y(x)$
3	14			
2	9	5		
1	6	3	2	
0	4	2	1	1

Άρα,

$\Delta y(0) = 2$, $\Delta^2 y(0) = 1$ και $\Delta^3 y(0) = 1$.

Παραγοντικά πολυώνυμα

Το **παραγοντικό πολύωνυμο τάξεως** k συμβολίζεται ως $F_k(x)$ και ορίζεται ως εξής:

$$F_0(x) = 1, \qquad F_k(x) = x(x-1)(x-2)\cdots(x-k+1) = (x)_k, \qquad \text{για } k \in \mathbb{N}^*.$$

Ιδιότητες

1. $F_k(k) = k!$.
2. $F_k(n) = 0$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$ με $n < k$.
3. $F_k(n) = P(n,k)$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$ με $n > k$.
4. $\Delta F_k(x) = kF_{k-1}(x)$. Πραγματικά,

$$\begin{aligned}\Delta F_k(x) &= F_k(x+1) - F_k(x) = (x+1)x\cdots(x-k+2) - x(x-1)\cdots(x-k+1)\\ &= x\cdots(x-k+2)((x+1)-(x-k+1)) = kx(x-1)\cdots(x-(k-1)+1)\\ &= kF_{k-1}(x).\end{aligned}$$

5. Γενικά, ισχύει ότι $\Delta^\nu F_k(x) = F_\nu(k)F_{k-\nu}(x)$, για κάθε $\nu, k \in \mathbb{N}^*$ με $\nu \le k$. Η απόδειξη δίνεται στην επόμενη άσκηση.

Άσκηση: Να αποδειχθεί ότι $\Delta^\nu F_k(x) = F_\nu(k)F_{k-\nu}(x)$, για κάθε $\nu, k \in \mathbb{N}^*$ με $\nu \leq k$.

Λύση. Θα αποδειχθεί επαγωγικά ως προς ν.

Για $\nu = 1$, προκύπτει ότι $\Delta^1 F_k(x) = F_1(k)F_{k-1}(x) \Leftrightarrow \Delta F_k(x) = kF_{k-1}(x)$, το οποίο ισχύει.

Υποθέτουμε ότι ισχύει για ν, δηλαδή $\Delta^\nu F_k(x) = F_\nu(k)F_{k-\nu}(x)$, και θα αποδειχθεί για το $\nu + 1$, δηλαδή

$$\Delta^{\nu+1} F_k(x) = F_{\nu+1}(k)F_{k-\nu-1}(x).$$

Είναι

$$\begin{aligned}
\Delta^{\nu+1} F_k(x) &= \Delta(\Delta^\nu F_k(x)) \\
&= \Delta(F_\nu(k)F_{k-\nu}(x)) \\
&= F_\nu(k)\Delta F_{k-\nu}(x) \\
&= F_\nu(k)(k-\nu)F_{k-\nu-1}(x) \\
&= k(k-1)\cdots(k-\nu+1)(k-\nu)F_{k-\nu-1}(x) \\
&= F_{\nu+1}(k)F_{k-\nu-1}(x)
\end{aligned}$$

□

Έκφραση πολυωνύμου ως γραμμικός συνδυασμός παραγοντικών πολυωνύμων

Εκφράσεις μονωνύμων

- $x = F_1(x)$
- $x^2 = F_1(x) + F_2(x)$
- $x^3 = F_1(x) + 3F_2(x) + F_3(x)$
- $x^4 = F_1(x) + 7F_2(x) + 6F_3(x) + F_4(x)$

Πράγματι, $F_1(x) = x$, $F_2(x) = x(x-1) = x^2 - x \Rightarrow x^2 = F_1(x) + F_2(x)$ και

$F_3(x) = x(x-1)(x-2) = x^3 - 3x^2 + 2x$

$\Rightarrow x^3 = F_3(x) + 3x^2 - 2x = F_3(x) + 3(F_1(x) + F_2(x)) - 2F_1(x) = F_1(x) + 3F_2(x) + F_3(x).$

Επειδή κάθε μονώνυμο είναι γραμμικός συνδυασμός των παραγοντικών πολυωνύμων, προκύπτει ότι κάθε πολυώνυμο θα είναι επίσης γραμμικός συνδυασμός των παραγοντικών πολυωνύμων.

Παράδειγμα: Να εκφραστεί το πολυώνυμο $p(x) = 7x^3 - 2x^2 + 6x + 4$ ως γραμμικός συνδυασμός των παραγοντικών πολυωνύμων $F_0(x)$, $F_1(x)$, $F_2(x)$ και $F_3(x)$.

Λύση.

$$\begin{aligned} p(x) &= 7(F_1(x) + 3F_2(x) + F_3(x)) - 2(F_1(x) + F_2(x)) + 6F_1(x) + 4F_0(x) \\ &= 7F_3(x) + 19F_2(x) + 11F_1(x) + 4F_0(x). \end{aligned}$$

$\square$

Γενικά, οι συντελεστές στην έκφραση ενός πολυωνύμου ως γραμμικός συνδυασμός των παραγοντικών πολυωνύμων δίδονται με τη βοήθεια του τελεστή της διαφοράς, σύμφωνα με τον επόμενο τύπο:

Τύπος του Gregory

$$p(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{\Delta^k p(0)}{k!} F_k(x)$$

Απόδειξη. Έστω $p(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k F_k(x)$, όπου $a_k \in \mathbb{R}$, για κάθε $0 \leq k \leq n$. Αρκεί να δειχθεί ότι $a_\nu = \dfrac{\Delta^\nu p(0)}{\nu!}$, για κάθε $\nu \in \mathbb{N}$, με $0 \leq \nu \leq n$. Επειδή

$$\Delta^\nu F_k(x) = \begin{cases} 0, & \nu > k, \\ F_\nu(k) F_{k-\nu}(x), & \nu \leq k, \end{cases}$$

προκύπτει ότι

$$\Delta^\nu p(x) = \Delta^\nu \sum_{k=0}^{n} a_k F_k(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k \Delta^\nu F_k(x) = \sum_{k=\nu}^{n} a_k F_\nu(k) F_{k-\nu}(x)$$

Κατόπιν τούτου, επειδή $F_i(0) = \begin{cases} 0, & i > 0, \\ 1, & i = 0, \end{cases}$, προκύπτει ότι

$$\Delta^\nu p(0) = \sum_{k=\nu}^{n} a_k F_\nu(k) F_{k-\nu}(0) = a_\nu F_\nu(\nu) F_0(0) = \nu! a_\nu.$$

Άρα, $a_\nu = \dfrac{\Delta^\nu p(0)}{\nu!}$. $\square$

Εφαρμογή. Να βρεθεί πολυώνυμο $p(x)$, όταν $p(0) = 3$, $p(1) = 5$, $p(2) = 7$ και $p(3) = 15$.

Λύση. Με τη βοήθεια του επόμενου πίνακα, βρίσκουμε $\Delta P(0) = 2$, $\Delta^2 P(0) = 0$, $\Delta^3 P(0) = 6$.

x	*p(x)*	Δ *p(x)*	Δ^2*p(x)*	Δ^3*p(x)*
3	*15*			
2	*7*	*8*		
1	*5*	*2*	*6*	
0	*3*	*2*	*0*	*6*

Άρα, από τον τύπο του Gregory, είναι

$$
\begin{aligned}
p(x) &= p(0) + \frac{\Delta^1 p(0)}{1!} F_1(x) + \frac{\Delta^2 p(0)}{2!} F_2(x) + \frac{\Delta^3 p(0)}{3!} F_3(x) \\
&= 3 + 2x + 0x(x-1) + \frac{6}{3!} x(x-1)(x-2) = x^3 - 3x^2 + 4x + 3 \qquad \square
\end{aligned}
$$

Προσδιορισμός πολυωνύμων Στη συνέχεια θα δοθεί μια μέθοδος για τον προσδιορισμό ενός πολυωνύμου από τη διαφορά του. Για τον σκοπό αυτό, θα χρησιμοποιηθούν τα δύο επόμενα αποτελέσματα:

1. **Βασική ιδιότητα:** Για δύο πολυώνυμα $p_1(x)$, $p_2(x)$, ισχύει:
   Αν $\Delta p_1(x) = \Delta p_2(x)$, τότε υπάρχει $c \in R$ ώστε $p_1(x) - p_2(x) = c$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
   Πράγματι,
   $$\begin{aligned} \Delta p_1(x) = \Delta p_2(x) &\Leftrightarrow \Delta p_1(x) - \Delta p_2(x) = 0 \\ &\Leftrightarrow \Delta(p_1(x) - p_2(x)) = 0 \\ &\Leftrightarrow p_1(x) - p_2(x) = c, \text{για κάποιο } c \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

2. **Βασικός τύπος:** $F_k(x) = \dfrac{\Delta F_{k+1}(x)}{k+1}$.
   Πρόκειται για την τέταρτη ιδιότητα των παραγοντικών πολυωνύμων, θέτοντας $k+1$ αντί k.

Παράδειγμα: Να βρεθεί πολυώνυμο $p(x)$ για το οποίο ισχύουν
$$P(x+1)-P(x)=x(x+1)(x+2) \text{ και } P(1)=0.$$
Λύση. 1ο βήμα: Εκφράζουμε το πολυώνυμο του 2ου μέλους συναρτήσει των παραγοντικών πολυωνύμων.
$$\begin{aligned} x(x+1)(x+2) &= x^3+3x^2+2x = F_1(x)+3F_2(x)+F_3(x)+3(F_1(x)+F_2(x))+2F_1(x) \\ &= F_3(x)+6F_2(x)+6F_1(x) \end{aligned}$$
2ο βήμα: Εφαρμόζουμε τον τύπο $F_k(x)=\dfrac{\Delta F_{k+1}(x)}{k+1}$.
$$x(x+1)(x+2)=\frac{\Delta F_4(x)}{4}+6\frac{\Delta F_3(x)}{3}+6\frac{\Delta F_2(x)}{2}=\Delta(\frac{1}{4}F_4(x)+2F_3(x)+3F_2(x))$$
Άρα, από την υπόθεση προκύπτει ότι $\Delta P(x)=\Delta(\dfrac{1}{4}F_4(x)+2F_3(x)+3F_2(x))$ και επομένως υπάρχει $c\in\mathbb{R}$ ώστε
$$P(x)=\frac{1}{4}F_4+2F_3(x)+3F_2(x)+c=\frac{x(x-1)(x-2)(x-3)}{4}+2x(x-1)(x-2)+3x(x-1)+c.$$
Για $x=1$, προκύπτει $0=P(1)=c$, οπότε $P(x)=\dfrac{x(x-1)(x-2)(x-3)}{4}+2x(x-1)(x-2)+3x(x-1)$. □

Εφαρμογή: Να βρεθεί η τιμή του αθροίσματος

$$S_n = 1 \cdot 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot 4 + \cdots + (n-1)n(n+1) + n(n+1)(n+2).$$

Λύση. Σύμφωνα με το προηγούμενο παράδειγμα βρίσκουμε πολυώνυμο $P(x)$ με

$$\Delta P(x) = x(x+1)(x+2),$$

οπότε είναι

$$\begin{aligned} S_n &= \Delta P(1) + \Delta P(2) + \cdots + \Delta P(n-1) + \Delta P(n) \\ &= (P(2) - P(1)) + (P(3) - P(2)) + \cdots + (P(n) - P(n-1)) + (P(n+1) - P(n)) \\ &= P(n+1) - P(1) \\ &= \frac{(n+1)n(n-1)(n-2)}{4} + 2(n+1)n(n-1) + 3(n+1)n \end{aligned}$$

Παράδειγμα: Να βρεθεί πολυώνυμο $p(x)$ για το οποίο ισχύουν $p(x+1) - p(x) = x^2$ και $p(0) = 0$. Στη συνέχεια, να βρεθεί η τιμή του αθροίσματος $S_n = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2$.

Λύση. Αρχικά, βρίσκουμε πολυώνυμο $p(x)$, τέτοιο ώστε $p(x+1)-p(x) = x^2$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Εκφράζουμε το πολυώνυμο του δεύτερου μέλους ως διαφορά παραγοντικών πολυωνύμων

$$x^2 = F_1(x) + F_2(x) = \frac{\Delta F_2(x)}{2} + \frac{\Delta F_3(x)}{3} = \Delta\left(\frac{1}{2}F_2(x) + \frac{1}{3}F_3(x)\right)$$

Άρα, από την υπόθεση προκύπτει ότι $p(x+1) - p(x) = \Delta p(x) = \Delta\left(\frac{1}{2}F_2(x) + \frac{1}{3}F_3(x)\right)$ και επομένως υπάρχει $c \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε

$$\begin{aligned} p(x) &= \frac{1}{2}F_2(x) + \frac{1}{3}F_3(x) + c = \frac{x(x-1)}{2} + \frac{x(x-1)(x-2)}{3} + c \\ &= \frac{x(x-1)(3+2(x-2))}{6} + c = \frac{x(x-1)(2x-1)}{6} + c \end{aligned}$$

Επομένως,

$$\begin{aligned} S_n &= \Delta P(1) + \Delta P(2) + \cdots + \Delta P(n-1) + \Delta P(n) \\ &= P(n+1) - P(1) = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}. \end{aligned}$$

□

Παράδειγμα: Να υπολογισθεί η τιμή του αθροίσματος $S_n = 1^3 + 2^3 + \cdots + n^3$, $n \in \mathbb{N}^*$.

Λύση. Αρχικά βρίσκουμε πολυώνυμο $p(x)$ τέτοιο ώστε

$$p(x+1) - p(x) = x^3, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}. \tag{1}$$

Γνωρίζουμε ότι $x^3 = F_3(x) + 3F_2(x) + F_1(x)$. Για να ισχύει η σχέση (1) πρέπει

$$\Delta p(x) = F_3(x) + 3F_2(x) + F_1(x) = \frac{\Delta F_4(x)}{4} + 3\frac{\Delta F_3(x)}{3} + \frac{\Delta F_2(x)}{2} = \Delta(\frac{F_4(x)}{4} + F_3(x) + \frac{F_2(x)}{2})$$

Άρα, υπάρχει σταθερά $c \in \mathbb{R}$, τέτοια ώστε

$$\begin{aligned} p(x) &= \frac{1}{4}F_4(x) + F_3(x) + \frac{1}{2}F_2(x) + c \\ &= \frac{1}{4}x(x-1)(x-2)(x-3) + x(x-1)(x-2) + \frac{1}{2}x(x-1) + c \\ &= \frac{1}{4}(x(x-1))^2 + c. \end{aligned} \tag{2}$$

Από τις σχέσεις (1) και (2) προκύπτει ότι

$$\begin{aligned} S_n &= (p(2) - p(1)) + (p(3) - p(2)) + \cdots + (p(n+1) - p(n)) \\ &= p(n+1) - p(1) = \frac{(n+1)^2 n^2}{4} + c - (0 + c) = \frac{(n+1)^2 n^2}{4}. \end{aligned}$$

□

Ασκήσεις:

1. Να βρεθεί πολυώνυμο $p(x)$ τέτοιο ώστε

$$p(x+1) - p(x) = (3x-7)x$$

   για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $p(1) = 3$.

2. Να υπολογισθεί η τιμή του αθροίσματος

$$S_n = 1 \cdot 3 \cdot 5 + 3 \cdot 5 \cdot 7 + \cdots + (2n-1)(2n+1)(2n+3),$$

   όπου $n \in \mathbb{N}^*$.

Ο τύπος του Vandermonde

$$F_n(x+y)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}F_k(x)F_{n-k}(y), \tag{1}$$

για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$ και $n \in \mathbb{N}^*$.

Απόδειξη. Η απόδειξη θα γίνει όταν η μια μεταβλητή εκ των x, y είναι θετικός ακέραιος αριθμός. Έτσι υποθέτουμε ότι $x \in \mathbb{N}^*$ και θα δείξουμε με επαγωγή ως προς x τον τύπο (1).

Για $x = 1$, είναι $F_k(1) = \begin{cases} 1, & k \leq 1, \\ 0, & k > 1, \end{cases}$ οπότε ο τύπος (1) γράφεται ως

$$F_n(y{+}1) = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}F_k(1)F_{n-k}(y) = \binom{n}{0}1F_n(y){+}\binom{n}{1}1F_{n-1}(y){=}F_n(y){+}nF_{n-1}(y), \tag{2}$$

Ο τύπος (2) ισχύει, διότι γράφεται ισοδύναμα ως $\Delta F_n(y) = nF_{n-1}(y)$ (ιδιότητα 4).

Υποθέτουμε τώρα ότι ο τύπος (1) ισχύει για $x = \nu$, δηλαδή

$$F_n(\nu+y)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}F_k(\nu)F_{n-k}(y) \tag{3}$$

και θα δειχθεί για $x = \nu + 1$, δηλαδή

$$F_n(\nu + 1 + y) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} F_k(\nu + 1) F_{n-k}(y) \tag{4}$$

Πραγματικά εφαρμόζοντας την (2) για $\nu + y$ αντί y προκύπτει:

$$F_n(\nu + 1 + y) = F_n(\nu + y) + nF_{n-1}(\nu + y)$$

Λόγω της (3) έχουμε

$$F_n(\nu + 1 + y) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} F_k(\nu) F_{n-k}(y) + n \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} F_k(\nu) F_{n-1-k}(y)$$

Χρησιμοποιώντας την ταυτότητα

$$n\binom{n-1}{k} = (k+1)\binom{n}{k+1},$$

προκύπτει

$$F_n(\nu + 1 + y) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} F_k(\nu) F_{n-k}(y) + \sum_{k=0}^{n-1} (k+1) \binom{n}{k+1} F_k(\nu) F_{n-1-k}(y)$$

Αν τεθεί $\lambda = k+1$, τότε

$$
\begin{aligned}
F_n(\nu+1+y) &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} F_k(\nu) F_{n-k}(y) + \sum_{\lambda=1}^{n} \lambda \binom{n}{\lambda} F_{\lambda-1}(\nu) F_{n-\lambda}(y) \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} F_k(\nu) F_{n-k}(y) + \sum_{k=0}^{n} k \binom{n}{k} F_{k-1}(\nu) F_{n-k}(y) \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} F_{n-k}(y) (F_k(\nu) + k F_{k-1}(\nu))
\end{aligned}
$$

Λόγω της (2), προκύπτει τελικά ότι

$$F_n(\nu+1+y) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} F_k(\nu+1) F_{n-k}(y).$$

□

Ασκήσεις:

1. Να δειχθεί ότι
$$F_n(y) = (-1)^n F_n(n-y-1)$$
για κάθε $y \in \mathbb{R}$ και $n \in \mathbb{N}^*$.

2. Να δειχθεί ότι
$$F_n(x+y) = F_k(x+y)F_{n-k}(x+y-k)$$
για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$ και $n, k \in \mathbb{N}^*$ με $k \leq n$.

3. Να δειχθεί ότι
$$\frac{F_n(y)}{F_n(x+y)} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} \frac{F_k(x)}{F_k(x+y)}$$
για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$ και $x, y \in \mathbb{R}$ με
$x + y \neq 0, 1, 2, \ldots, n-1$.

Λύση της 3. Θα αποδειχθεί ότι $\dfrac{F_n(y)}{F_n(x+y)} = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}\dfrac{F_k(x)}{F_k(x+y)}$.

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}\frac{F_k(x)}{F_k(x+y)} &\overset{\mathbf{2}}{=} \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}F_k(x)\frac{F_{n-k}(x+y-k)}{F_n(x+y)} \\
&\overset{\mathbf{1}}{=} \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}F_k(x)\frac{(-1)^{n-k}F_{n-k}(n-k-(x+y-k)-1)}{F_n(x+y)} \\
&= \frac{(-1)^n}{F_n(x+y)}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}F_k(x)F_{n-k}(n-x-y-1) \\
&= \frac{(-1)^n}{F_n(x+y)}F_n(x+(n-x-y-1)) \\
&= \frac{(-1)^n F_n(n-y-1)}{F_n(x+y)} \\
&\overset{\mathbf{1}}{=} \frac{F_n(y)}{F_n(x+y)}
\end{aligned}$$

Τύπος Διωνύμου του Νεύτωνα (Newton)

$$(\alpha+\beta)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \alpha^k \beta^{n-k}$$

όπου $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ και $n \in \mathbb{N}^*$.

Απόδειξη (Με επαγωγή ως προς n). Για $n = 1$ ισχύει, διότι

$$\sum_{k=0}^{1} \binom{n}{k} \alpha^k \beta^{1-k} = \binom{1}{0} \alpha^0 \beta^1 + \binom{1}{1} \alpha^1 \beta^0 = \beta + \alpha.$$

Υποθέτουμε ότι ισχύει για $n = m$, δηλαδή,

$$(\alpha+\beta)^m = \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} \alpha^k \beta^{m-k} \tag{1}$$

και θα δείξουμε ότι ισχύει για $n = m+1$, δηλαδή

$$(\alpha+\beta)^{m+1} = \sum_{k=0}^{m+1} \binom{m+1}{k} \alpha^k \beta^{m+1-k} \tag{2}$$

Πράγματι, είναι

$$\begin{aligned}
(\alpha+\beta)^{m+1} &= (\alpha+\beta)(\alpha+\beta)^m \\
&= (\alpha+\beta)\sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}\alpha^k\beta^{m-k} \\
&= \sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}\alpha^{k+1}\beta^{m-k} + \sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}\alpha^k\beta^{m+1-k} \\
&\overset{\lambda=k+1}{=} \sum_{\lambda=1}^{m+1}\binom{m}{\lambda-1}\alpha^{\lambda}\beta^{m+1-\lambda} + \sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}\alpha^k\beta^{m+1-k} \\
&= \alpha^{m+1} + \sum_{k=1}^{m}\binom{m}{k-1}\alpha^k\beta^{m+1-k} + \beta^{m+1} + \sum_{k=1}^{m}\binom{m}{k}\alpha^k\beta^{m+1-k} \\
&= \alpha^{m+1} + \beta^{m+1} + \sum_{k=1}^{m}\left(\binom{m}{k}+\binom{m}{k-1}\right)\alpha^k\beta^{m+1-k} \\
&= \alpha^{m+1} + \beta^{m+1} + \sum_{k=1}^{m}\binom{m+1}{k}\alpha^k\beta^{m+1-k} = \sum_{k=0}^{m+1}\binom{m+1}{k}\alpha^k\beta^{m+1-k}.
\end{aligned}$$

Συνδυαστική απόδειξη του τύπου

$$(\alpha+\beta)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \alpha^k \beta^{n-k}$$

όταν $a, b \in \mathbb{N}^*$.

Διατυπώνουμε ένα πρόβλημα, το οποίο λύνεται με 2 τρόπους. Ο πρώτος τρόπος δίνει το πρώτο μέλος και ο δεύτερος το δεύτερο μέλος.

Πρόβλημα: Με πόσους τρόπους μπρούμε να φτιάξουμε λέξεις μήκους n, όταν τα γράμματα επιλέγονται από ένα σύνολο με α φωνήεντα και β σύμφωνα;

Λύση. 1ος τρόπος: Όλα τα γράμματα είναι $\alpha+\beta$ στο πλήθος, οπότε πρόκειται για διατάξεις με επανάληψη των $\alpha+\beta$ ανά n, δηλαδή υπάρχουν $(\alpha+\beta)^n$ τρόποι.

2ος τρόπος: Διαμερίζουμε το σύνολο των λέξεων αυτών ως προς το πλήθος k των θέσεων που η λέξη εμφανίζει φωνήεν. Η επιλογή των θέσεων αυτών γίνεται με $\binom{n}{k}$ τρόπους. Τα k φωνήεντα επιλέγονται με α^k τρόπους, ενώ τα $n-k$ σύμφωνα επιλέγονται με β^{n-k} τρόπους. Τελικά, σύμφωνα με την πολλαπλασιαστική αρχή, η λέξη κατασκευάζεται με $\binom{n}{k}\alpha^k\beta^{n-k}$ τρόπους. Αθροίζοντας για όλες τις επιλογές του k, προκύπτει ότι υπάρχουν $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\alpha^k\beta^{n-k}$ τέτοιες λέξεις. □

Οι αριθμοί $\binom{n}{k}$ με $n, k \in \mathbb{N}^*$ και $k \leq n$ ονομάζονται **διωνυμικοί συντελεστές**.

Εφαρμογές. Να υπολογισθούν τα αθροίσματα:

$$S_1 = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}, \qquad S_2 = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k},$$

$$S_3 = \sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} \binom{n}{2k}, \qquad S_4 = \sum_{k=0}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]} \binom{n}{2k+1},$$

$$S_5 = \sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k}, \qquad S_6 = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1}\binom{n}{k},$$

$$S_7 = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k+1}\binom{n}{k}, \quad S_8 = \sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} \frac{1}{2k+1}\binom{n}{2k}.$$

Λύσεις

Εφαρμόζοντας τον τύπο του διωνύμου του Νεύτωνα για $\alpha = \beta = 1$, προκύπτει ότι

$$S_1 = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 1^k 1^{n-k} = (1+1)^n = 2^n.$$

Εφαρμόζοντας τον τύπο του διωνύμου του Νεύτωνα για $\alpha = -1$, $\beta = 1$, προκύπτει ότι

$$S_2 = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k 1^{n-k} = (-1+1)^n = 0.$$

Τα S_3, S_4 θα υπολογισθούν όταν $n = 2m$, άρτιος (ανάλογα όταν n περιττός).
Τότε $\left[\frac{n}{2}\right] = m$ και $\left[\frac{n-1}{2}\right] = m - 1$.

$$S_3 + S_4 = \sum_{k=0}^{m} \binom{n}{2k} + \sum_{k=0}^{m-1} \binom{n}{2k+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = S_1 = 2^n.$$

και

$$S_3 - S_4 = \sum_{k=0}^{m}\binom{n}{2k} - \sum_{k=0}^{m-1}\binom{n}{2k+1} = \sum_{k=0}^{m}(-1)^{2k}\binom{n}{2k} + \sum_{k=0}^{m-1}(-1)^{2k+1}\binom{n}{2k+1}$$
$$= \sum_{k=0}^{n}(-1)^{k}\binom{n}{k} = S_2 = 0.$$

Άρα $S_3 = S_4 = 2^{n-1}$.

Για το S_5, θα χρησιμοποιήσουμε την ταυτότητα

$$k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1} \tag{1}$$

$$S_5 = \sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k} = \sum_{k=1}^{n} n\binom{n-1}{k-1} = n\sum_{\lambda=0}^{n-1}\binom{n-1}{\lambda} = n2^{n-1}.$$

Άρα, $S_5 = n2^{n-1}$.

Για το S_6, θα χρησιμοποιήσουμε την (1) με $n+1$ αντί n και $k+1$ αντί k, δηλαδή

$$(k+1)\binom{n+1}{k+1} = (n+1)\binom{n}{k} \Leftrightarrow$$

$$\frac{1}{k+1}\binom{n}{k} = \frac{1}{n+1}\binom{n+1}{k+1} \tag{2}$$

$$\begin{aligned} S_6 &= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1}\binom{n}{k} = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{n+1}\binom{n+1}{k+1} = \frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n+1}\binom{n+1}{k} \\ &= \frac{1}{n+1}\left(\sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k} - 1\right) = \frac{1}{n+1}(2^{n+1}-1). \end{aligned}$$

Άρα, $S_6 = \dfrac{2^{n+1}-1}{n+1}$.

Για τον υπολογισμό του S_7, χρησιμοποιούμε την (2) οπότε είναι:

$$S_7=\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^{k+1}}{k+1}\binom{n}{k}=\sum_{k=0}^{n}(-1)^{k+1}\frac{1}{n+1}\binom{n+1}{k+1}=\frac{1}{n+1}\sum_{\lambda=1}^{n+1}(-1)^{\lambda}\binom{n+1}{\lambda}$$
$$=\frac{1}{n+1}\left(\sum_{\lambda=0}^{n+1}(-1)^{\lambda}\binom{n+1}{\lambda}-1\right)=\frac{1}{n+1}(0-1).$$

Άρα $S_7=-\dfrac{1}{n+1}$.

Για το S_8, χρησιμοποιούμε την (2) με $2k$ αντί για k, οπότε είναι:

$$S_8=\sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}\frac{1}{2k+1}\binom{n}{2k}=\sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}\frac{1}{n+1}\binom{n+1}{2k+1}\overset{m=n+1}{=}\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{\left[\frac{m-1}{2}\right]}\binom{m}{2k+1}=\frac{2^{m-1}}{n+1}=\frac{2^{n}}{n+1}.$$

Άρα $S_8=\dfrac{2^n}{n+1}$.

Επανάληψη

1. $k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}$.
2. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$.
3. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} = n2^{n-1}$.
4. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1}\binom{n}{k} = \frac{2^{n+1}-1}{n+1}$.

Ασκήσεις:

1. Να αποδειχθούν οι τύποι 3 και 4 με παραγώγιση και ολοκλήρωση αντίστοιχα του $(1+x)^n$ και εφαρμογή του διωνύμου του Νεύτωνα.

   Λύση. Παραγωγίζοντας και ολοκληρώνοντας τα δύο μέλη του τύπου του Διωνύμου του Νεύτωνα, και στη συνέχεια θέτοντας $x = 1$, προκύπτουν αντίστοιχα οι σχέσεις

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k = (1+x)^n$$
$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{n} k \binom{n}{k} x^{k-1} = n(1+x)^{n-1}$$
$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{n} k \binom{n}{k} = n2^{n-1}$$

και

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}t^k = (1+t)^n \\
\Rightarrow &\int_0^x \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}t^k dt = \int_0^x (1+t)^n dt \\
\Rightarrow &\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\int_0^x t^k dt = \left[\frac{(1+t)^{n+1}}{n+1}\right]_0^x \\
\Rightarrow &\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{x^{k+1}}{k+1} = \frac{(1+x)^{n+1}-1}{n+1} \\
\Rightarrow &\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{1}{k+1} = \frac{2^{n+1}-1}{n+1}.
\end{aligned}$$

$\square$

2. Να αποδειχθούν οι τύποι 1 και 3 συνδυαστικά.

Η λύση στηρίζεται στην επίλυση ενός προβλήματος με 2 διαφορετικούς τρόπους. Ο πρώτος τρόπος δίνει το πρώτο μέλος της ισότητας, ενώ ο δεύτερος τρόπος δίνει το δεύτερο μέλος.

Πρόβλημα: Να ευρεθεί το πλήθος των επιτροπών με πρόεδρο που μπορούν να συσταθούν από n άτομα, όταν: $i)$ η επιτροπή περιέχει k άτομα, και $ii)$ δεν υπάρχει περιορισμός στον αριθμό ατόμων.

Λύση. $i)$ 1ος τρόπος: Επιλέγουμε πρώτα τα k άτομα της επιτροπής με $\binom{n}{k}$ τρόπους, και έπειτα επιλέγουμε τον πρόεδρο με k τρόπους. Σύμφωνα με την πολλαπλασιαστική αρχή, το πλήθος των δυνατών επιτροπών είναι $k\binom{n}{k}$.

2ος τρόπος: Επιλέγουμε πρώτα τον πρόεδρο με n τρόπους, και έπειτα επιλέγουμε τα υπόλοιπα $k-1$ μέλη από τα υπόλοιπα $n-1$ άτομα με $\binom{n-1}{k-1}$ τρόπους. Επομένως, το πλήθος των δυνατών επιτροπών είναι $n\binom{n-1}{k-1}$. Άρα $n\binom{n-1}{k-1} = k\binom{n}{k}$.

$ii)$ 1ος τρόπος: Μια επιτροπή με k άτομα συγκροτείται με $k\binom{n}{k}$ τρόπους. Αθροίζοντας ως προς k προκύπτει ότι ο συνολικός αριθμός επιτροπών με πρόεδρο είναι $\sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k}$.

2ος τρόπος: Αρχικά επιλέγεται ο πρόεδρος με n τρόπους και στη συνέχεια τα υπόλοιπα μέλη με 2^{n-1} τρόπους (όσα είναι και τα υποσύνολα του $[n-1]$). Επομένως, το ζητούμενο πλήθος είναι $n2^{n-1}$. Άρα, $\sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k} = n2^{n-1}$. $\square$

3. Να υπολογισθεί το άθροισμα $S_n = \sum_{k=0}^{n} k^2 \binom{n}{k}$ με 3 διαφορετικούς τρόπους.

Λύση. 1ος τρόπος: Με τη βοήθεια των τύπων

$$k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}, \qquad \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n, \qquad \sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} = n2^{n-1},$$

προκύπτει ότι

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=0}^{n} k \cdot k\binom{n}{k} = \sum_{k=1}^{n} k \cdot n\binom{n-1}{k-1} = n\sum_{k=0}^{n-1}(k+1)\binom{n-1}{k} \\ &= n\sum_{k=0}^{n-1} k\binom{n-1}{k} + n\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k} \\ &= n(n-1)2^{n-2} + n2^{n-1} = n2^{n-2}(n-1+2) = n(n+1)2^{n-2}. \end{aligned}$$

2ος τρόπος: Από τον διωνυμικό τύπο, παραγωγίζοντας δύο φορές, προκύπτουν οι σχέσεις

$$n(1+x)^{n-1} = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} k x^{k-1}, \qquad n(n-1)(1+x)^{n-2} = \sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} k(k-1) x^{k-2}.$$

Θέτοντας $x = 1$ στις παραπάνω δύο σχέσεις, προκύπτουν οι σχέσεις

$$n2^{n-1} = \sum_{k=1}^{n} k \binom{n}{k}, \qquad n(n-1)2^{n-2} = \sum_{k=2}^{n} k(k-1) \binom{n}{k}.$$

Προσθέτοντας κατά μέλη, προκύπτει ότι

$$\sum_{k=1}^{n} (k + k(k-1)) \binom{n}{k} = n2^{n-1} + n(n-1)2^{n-2},$$

οπότε

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} k^2 \binom{n}{k} = n(n+1)2^{n-2}.$$

3ος τρόπος (συνδυαστικός): Υπολογίζουμε με δύο διαφορετικούς τρόπους το πλήθος των διαφορετικών επιτροπών με έναν πρόεδρο ή με έναν πρόεδρο και έναν αντιπρόεδρο, που σχηματίζονται επιλέγοντας από n άτομα.

Αν η επιτροπή αποτελείται από k μέλη, τότε αρχικά επιλέγουμε τα μέλη, με $\binom{n}{k}$ τρόπους. Στη συνέχεια, από τα k μέλη που επιλέξαμε, αν έχει μόνο πρόεδρο, τον επιλέγουμε με k τρόπους, ενώ αν έχει και αντιπρόεδρο, επιλέγουμε και τους δύο με $k(k-1)$ τρόπους. Επομένως, υπάρχουν $(k+k(k-1))\binom{n}{k} = k^2\binom{n}{k}$ διαφορετικές k-μελείς επιτροπές και αθροίζοντας για όλες τις δυνατές τιμές του k, προκύπτει ότι το ζητούμενο πλήθος επιτροπών είναι ίσο με $S_n = \sum_{k=1}^{n} k^2\binom{n}{k}$.

Ο δεύτερος τρόπος σχηματισμού της επιτροπής ξεκινά επιλέγοντας πρώτα τον πρόεδρο, με n τρόπους. Αν δεν υπάρχει αντιπρόεδρος, τότε επιλέγονται τα υπόλοιπα μέλη με 2^{n-1} τρόπους. Αν υπάρχει αντιπρόεδρος, τότε αυτός επιλέγεται με $n-1$ τρόπους και τα υπόλοιπα μέλη με 2^{n-2} τρόπους. Άρα συνολικά υπάρχουν $n2^{n-1} + n(n-1)2^{n-2} = n(n+1)2^{n-2}$ διαφορετικές επιτροπές και το πλήθος αυτό θα πρέπει να είναι ίσο με το προηγούμενο αποτέλεσμα, δηλαδή ίσο με S_n. $\square$

4. Να υπολογισθούν τα αθροίσματα

(i) $\sum_{k=0}^{n} (3k+5)\binom{n}{k}$.

(ii) $\sum_{k=0}^{n} (2k^2-k+3)\binom{n}{k}$.

Υπόδειξη. Για το (ii) να χρησιμοποιηθεί το αποτέλεσμα της προηγούμενης άσκησης.

5. Να υπολογισθούν τα αθροίσματα:

(i) $\sum_{k=1}^{n} \frac{2k+5}{k+1}\binom{n}{k}$.

(ii) $\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(k+1)(k+2)}\binom{n}{k}$.

Βασικός τύπος (Cauchy)

$$\binom{r+s}{n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{r}{k}\binom{s}{n-k}, \qquad r, s, n \in \mathbb{N}^*.$$

Απόδειξη. Από τη σχέση $(x+1)^{r+s} = (x+1)^r (x+1)^s$, προκύπτει

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{r+s} \binom{r+s}{n} x^n &= \left(\sum_{k=0}^{r} \binom{r}{k} x^k \right) \left(\sum_{\lambda=0}^{s} \binom{s}{\lambda} x^\lambda \right) \\
&= \sum_{k=0}^{r} \sum_{\lambda=0}^{s} \binom{r}{k}\binom{s}{\lambda} x^{k+\lambda} \\
&\overset{n=k+\lambda}{=} \sum_{n=0}^{r+s} \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{r}{k}\binom{s}{n-k} \right) x^n
\end{aligned}$$

Επειδή τα δύο μέλη είναι ίσα ως πολυώνυμα του x, εξισώνοντας τους συντελεστές του x^n, προκύπτει ότι $\binom{r+s}{n} = \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{r}{k}\binom{s}{n-k}$.

Παρατηρήσεις:

1. Ο προηγούμενος τύπος είναι ισοδύναμος με τον τύπο του Vandermonde. Πράγματι, χρησιμοποιώντας τον τύπο $\binom{x}{k} = \dfrac{F_k(x)}{k!}$, προκύπτει ότι
$$\binom{r+s}{n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{r}{k}\binom{s}{n-k} \Leftrightarrow \frac{F_n(r+s)}{n!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{F_k(r)}{k!} \cdot \frac{F_{n-k}(s)}{(n-k)!}$$
$$\Leftrightarrow F_n(r+s) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} F_k(r) F_{n-k}(s)$$

2. Με το μοντέλο των επιτροπών, μπορεί να δοθεί μια συνδυαστική απόδειξη του τύπου του Cauchy, με τη βοήθεια του παρακάτω προβλήματος:

Πρόβλημα. Να ευρεθεί το πλήθος των διαφορετικών n-μελών επιτροπών, που σχηματίζονται επιλέγοντας μεταξύ r ανδρών και s γυναικών.

Λύση. Επιλέγοντας n μέλη από το σύνολο των $r+s$ ατόμων, προκύπτει ότι το ζητούμενο πλήθος είναι ίσο με $\binom{r+s}{n}$. Από την άλλη, επιλέγοντας k άνδρες και $n-k$ γυναίκες, σχηματίζουμε $\binom{r}{k}\binom{s}{n-k}$ σε πλήθος n-μελείς επιτροπές με ακριβώς k άνδρες. Αθροίζοντας ως προς k, προκύπτει ότι το ζητούμενο πλήθος είναι ίσο με $\sum_{k=0}^{n} \binom{r}{k}\binom{s}{n-k}$. □

Ασκήσεις:

1. Να δειχθεί ότι $\sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$.

2. Να δοθεί μια συνδυαστική απόδειξη του προηγούμενου τύπου, με τη βοήθεια του μοντέλου των επιτροπών.

3. Να δειχθεί ότι $\sum\limits_{k=1}^{n} k\binom{r}{k}\binom{s}{n-k} = r\binom{r+s-1}{n-1}$, όπου $r, s \in \mathbb{N}^*$.

   (Υπόδειξη: Υπενθυμίζεται ο τύπος $k\binom{r}{k} = r\binom{r-1}{k-1}$.)

4. Να δειχθεί ότι $\sum\limits_{k=1}^{n} k\binom{n}{k}^2 = (2n-1)\binom{2n-2}{n-1}$.

Επέκταση των διωνυμικών συντελεστών $\binom{x}{k}$ όταν $x \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}$.

$$\binom{x}{k} = \frac{F_k(x)}{k!} = \frac{x(x-1)\cdots(x-k+1)}{k!}$$

Αν $x = n \in \mathbb{N}$, τότε οι διωνυμικοί συντελεστές εκφράζουν τους αριθμούς των n ανά k συνδυασμών.

Αν $x = -n$, όπου $n \in \mathbb{N}^*$, τότε είναι:

$$\begin{aligned}\binom{-n}{k} &= \frac{(-n)(-n-1)\cdots(-n-k+1)}{k!} = (-1)^k \, \frac{n(n+1)\cdots(n+k-1)}{k!} \\ &= (-1)^k \binom{n+k-1}{k} = (-1)^k \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}.\end{aligned}$$

Επομένως, η απόλυτη τιμή $\left|\binom{-n}{k}\right|$ εκφράζει τον αριθμό των n ανά k επαναληπτικών συνδυασμών.

Επέκταση του τύπου του διωνύμου του Νεύτωνα

$$(\alpha+\beta)^{-n} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-n}{k} \alpha^k \beta^{-n-k},$$

όπου $n \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{\alpha}{\beta} \in (-1,1)$, $\beta \neq 0$.

Εφαρμογή:

$$\binom{r+s+n-1}{n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{r+k-1}{k} \binom{s+n-k-1}{n-k},$$

όπου $r, s, n \in \mathbb{N}^*$.

Απόδειξη. Εφαρμόζοντας τον παραπάνω τύπο για $\alpha = -x$ και $\beta = 1$, έχουμε ότι

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} \binom{r+s+n-1}{n} x^n &= \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-r-s}{n} (-1)^n x^n \\
&= (1-x)^{-r-s} = (1-x)^{-r}(1-x)^{-s} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-r}{k} (-x)^k \sum_{j=0}^{\infty} \binom{-s}{j} (-x)^j \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \binom{r+k-1}{k} \binom{s+j-1}{j} x^{k+j} \\
&\overset{n=k+j}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} \binom{r+k-1}{k} \binom{s+n-k-1}{n-k} x^n
\end{aligned}$$

και το ζητούμενο προκύπτει εξισώνοντας συντελεστές.

Άσκηση: Να δειχθεί με την βοήθεια της προηγούμενης εφαρμογής η σχέση:

$$\binom{r+s+1}{n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{r+k}{k} \binom{s-k}{n-k}, \qquad \text{για κάθε } r, s, n \in \mathbb{N}^*, \text{ με } s \geq n.$$