ΙΣΟΔΥΝΑΜΑ ΣΥΝΟΛΑ

Δύο μη κενά σύνολα Α, Β ονομάζονται **ισοδύναμα**, $\mathbf{A \sim B}$ όταν υπάρχει μια αμφιμονοσήμαντη απεικόνιση μεταξύ τους.

Παραδείγματα

1. Τα σύνολα

$$A = \{n \in \mathbb{N}^* : n \text{ πολλαπλάσιο του } 3\} = \{3n : n \in \mathbb{N}^*\}$$

$$B = \{n \in \mathbb{N}^* : n \text{ πολλαπλάσιο του } 4\} = \{4n : n \in \mathbb{N}^*\}$$

είναι ισοδύναμα, αφού η απεικόνιση $f : A \to B$, με

$$f(x) = \frac{4}{3}x$$

είναι αμφιμονοσήμαντη.

2. Τα σύνολα $\mathbb{N}^*$,

$$A = \{2n : n \in \mathbb{N}\} \text{ (άρτιοι)}$$

και

$$B = \{2n+1 : n \in \mathbb{N}\} \text{ (περιττοί)}$$

είναι ισοδύναμα.

Πράγματι, η απεικόνιση $f : \mathbb{N}^* \to A$ με $f(n) = 2n-2$ είναι αμφιμονοσήμαντη, άρα $\mathbb{N}^* \sim A$.

Ανάλογα, η απεικόνιση $g : \mathbb{N}^* \to B$ με $g(n) = 2n-1$ είναι αμφιμονοσήμαντη, άρα $\mathbb{N}^* \sim B$.

Επομένως, ισχύει και $A \sim B$.

Μια αμφιμονοσήμαντη απεικόνιση $h : A \to B$ μπορεί να ορισθεί βάσει του τύπου $h(x) = x+1$.

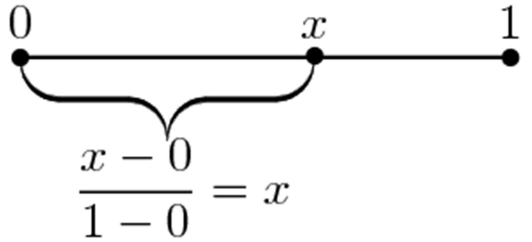
Σημειώνεται ότι $h = g \circ f^{-1}$.

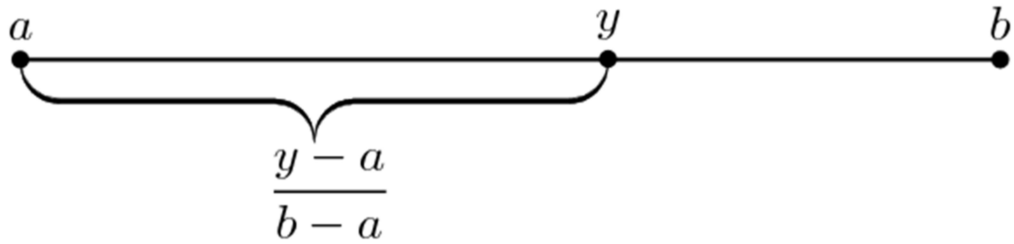
Πράγματι, είναι

$$h(2n) = g(f^{-1}(2n)) = g\left(\frac{2n+2}{2}\right)$$

$$= g(n+1) = 2(n+1) - 1 = 2n+1$$

3. Κάθε διάστημα $[a,b]$ είναι ισοδύναμο με το $[0,1]$. Για την απόδειξη, αρκεί να βρούμε μια αμφιμονοσήμαντη απεικόνιση $f:[0,1]\to[a,b]$. Για τον σκοπό αυτό, σκεφτόμαστε ως εξής: Έστω τυχαίο $x\in[0,1]$. Θα πρέπει το x να απεικονιστεί σε ένα ξεχωριστό $y=f(x)\in[a,b]$. Ένας τρόπος είναι διατηρώντας την αναλογία των μηκών των υποδιαστημάτων που ορίζονται. Το $[0,1]$ έχει μήκος $1-0=1$, ενώ το $[0,x]$ έχει μήκος x. Ο λόγος τους είναι $x/1=x$. Από την άλλη, το $[a,b]$ έχει μήκος $b-a$, το $[a,y]$ έχει μήκος $y-a$ και ο λόγος τους είναι $\dfrac{y-a}{b-a}$.





Διατήρηση του λόγου σημαίνει $x=\dfrac{y-a}{b-a}$, οπότε

$$f(x)=y=a+x(b-a)=(1-x)a+xb.$$

Η απεικόνιση αυτή είναι αμφιμονοσήμαντη, όπως αποδεικνύεται στην επόμενη άσκηση.

ΑΣΚΗΣΗ 27

Να αποδειχθεί ότι κάθε διάστημα $[\alpha,\beta]$ είναι ισοδύναμο με το διάστημα $[0,1]$.

ΛΥΣΗ

Θα αποδειχθεί ότι η συνάρτηση $f:[0,1]\to[\alpha,\beta]$ με

$$f(x)=(1-x)\alpha+x\beta$$

είναι αμφιμονοσήμαντη.

Καταρχήν, για $x_1,x_2\in[0,1]$ αν $f(x_1)=f(x_2)$ προκύπτουν οι παρακάτω ισοδύναμες σχέσεις:

$$(1-x_1)\alpha+x_1\beta=(1-x_2)\alpha+x_2\beta$$

$$(x_2-x_1)\alpha=(x_2-x_1)\beta$$

$$x_1=x_2.$$

Άρα η συνάρτηση f είναι $1-1$.

Αν $y\in[\alpha,\beta]$, ορίζουμε $x=\dfrac{y-\alpha}{\beta-\alpha}$. Τότε θα είναι $x\in[0,1]$ και $f(x)=y$ οπότε η συνάρτηση f θα είναι και επί.

Άρα τελικά, η συνάρτηση f είναι αμφιμονοσήμαντη και επομένως, $[0,1]\sim[\alpha,\beta]$.

ΑΣΚΗΣΗ 28

Να αποδειχθεί ότι τα σύνολο $\mathbb{R}$ και $(-1,1)$ είναι ισοδύναμα.

ΛΥΣΗ

Θεωρούμε την απεικόνιση $f:\mathbb{R}\to(-1,1)$ με

$$f(x)=\frac{x}{1+|x|}.$$

Αρκεί να αποδειχθεί ότι η απεικόνιση αυτή είναι αμφιμονοσήμαντη.

Αρχικά, αποδεικνύεται ότι η $f/\mathbb{R}$ είναι $1-1$.

Πραγματικά, αν $x_1,x_2\in R$ με $f(x_1)=f(x_2)$ τότε ισχύουν διαδοχικά οι σχέσεις:

$$\frac{x_1}{1+|x_1|}=\frac{x_2}{1+|x_2|} \tag{1}$$

$$x_1(1+|x_2|)=x_2(1+|x_1|)$$

$$x_1-x_2=x_2|x_1|-x_1|x_2| \tag{2}$$

Επειδή, λόγω της σχέσης (1) τα x_1,x_2 είναι ομόσημα, το δεύτερο μέλος της σχέσης (2) είναι πάντα ίσο με 0, οπότε $x_1=x_2$ και η απεικόνιση είναι $1-1$.

Τώρα, θα αποδείξουμε ότι η απεικόνιση $f/\mathbb{R}$ είναι επί.

Πραγματικά, αν $y \in (-1,1)$ διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:

(i) Αν $y \in [0,1)$, τότε θα είναι

$$y = \frac{x}{1+x} \Leftrightarrow y + yx = x \Leftrightarrow x = \frac{y}{1-y}.$$

Άρα, για $x = \dfrac{y}{1-y}$ θα είναι $f(x) = y$.

(ii) Αν $y \in (-1,0)$, τότε θα είναι

$$y = \frac{x}{1-x} \Leftrightarrow y - yx = x$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{y}{1+y}.$$

Άρα, για $x = \dfrac{y}{1+y}$ θα είναι $f(x) = y$.

Παρατήρηση

Η ισοδυναμία συνόλων είναι σχέση ισοδυναμίας, αφού ικανοποιεί τις τρεις ιδιότητες:

1. Ανακλαστική: $A \sim A$, αφού η ταυτοτική απεικόνιση $1_A : A \to A$ είναι αμφιμονοσήμαντη.
2. Συμμετρική: $A \sim B \Rightarrow B \sim A$. Πράγματι,

$A \sim B \Rightarrow$ Υπάρχει $f : A \to B$ αμφιμονοσήμαντη

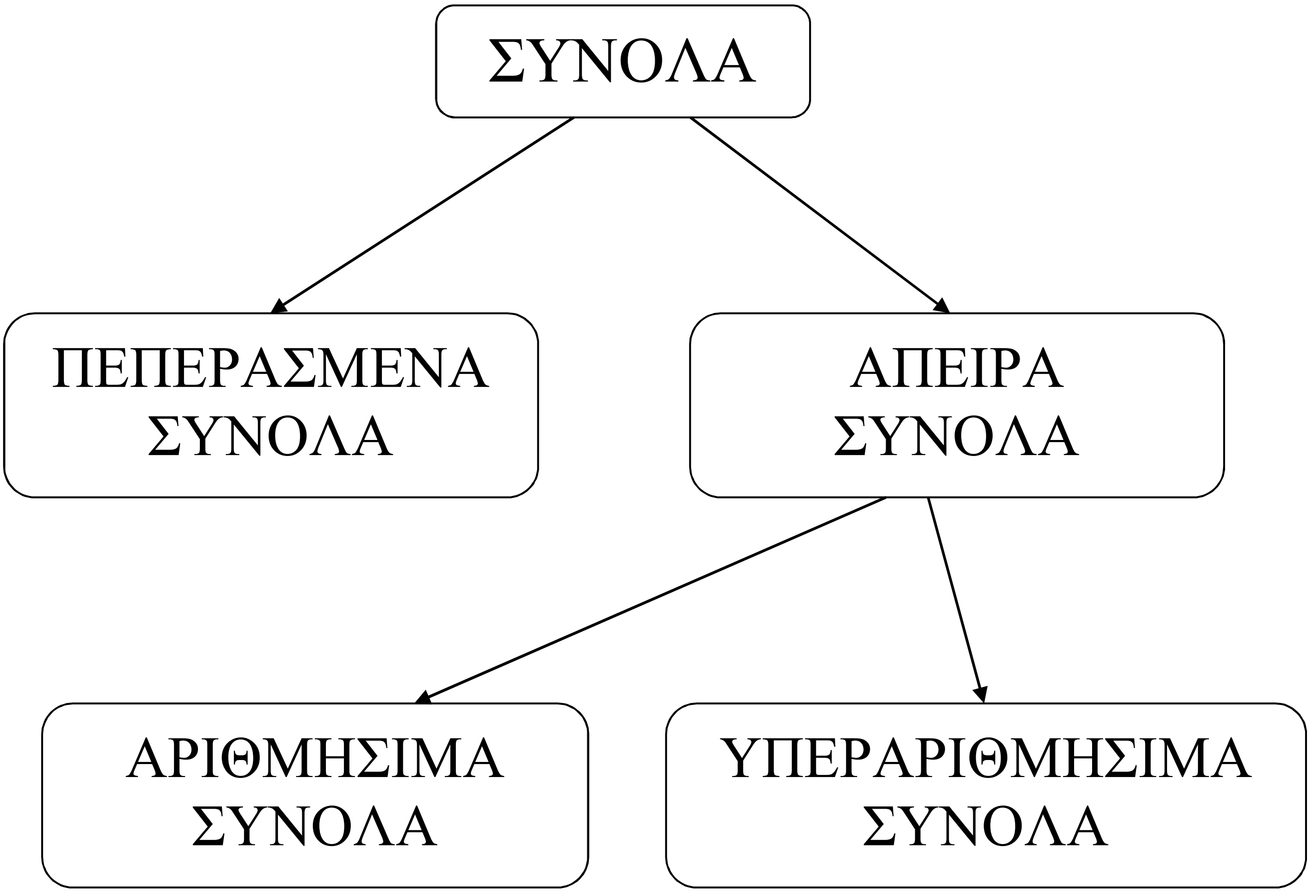
$$\Rightarrow f^{-1} : B \to A \text{ αμφιμονοσήμαντη} \Rightarrow B \sim A$$

3. Μεταβατική: $A \sim B$ και $B \sim \Gamma \Rightarrow A \sim \Gamma$. Πράγματι, $A \sim B$ και $B \sim \Gamma$

$\Rightarrow$ Υπάρχουν $f : A \to B$, $g : B \to \Gamma$ αμφιμονοσήμαντες

$\Rightarrow g \circ f : A \to \Gamma$ αμφιμονοσήμαντη $\Rightarrow A \sim \Gamma$

ΕΙΔΗ ΣΥΝΟΛΩΝ



Ένα μη κενό σύνολο A ονομάζεται **πεπερασμένο** όταν είναι ισοδύναμο με ένα τμήμα του $\mathbb{N}^*$, αν δηλαδή υπάρχει $n \in \mathbb{N}^*$ με $A \sim [n]$.

Ισχύς (ή **πληθάριθμος** ή **πληθικός αριθμός**) ενός πεπερασμένου συνόλου A ονομάζεται ο αριθμός των στοιχείων του και σημειώνεται με $|\mathbf{A}|$ (ή $\mathbf{card}(\mathbf{A})$). Έτσι, είναι

$$|A| = n \Leftrightarrow A \sim [n].$$

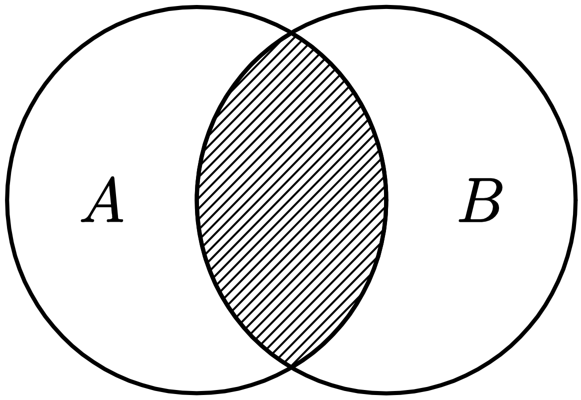
Για παράδειγμα, το σύνολο $A = \left\{-2, \frac{1}{2}, 4, 6, \frac{3}{7}, 12, 0\right\}$ είναι πεπερασμένο με $|A| = 7$.

Το κενό σύνολο θεωρείται πεπερασμένο, με $|\varnothing| = 0$.

Ιδιότητες πεπερασμένων συνόλων

Αν A, B είναι δύο πεπερασμένα μη κενά σύνολα, τότε τα σύνολα $A \cup B$, $A \times B$, B^A και $\mathcal{P}(A)$ είναι πεπερασμένα και ισχύουν οι ισότητες:

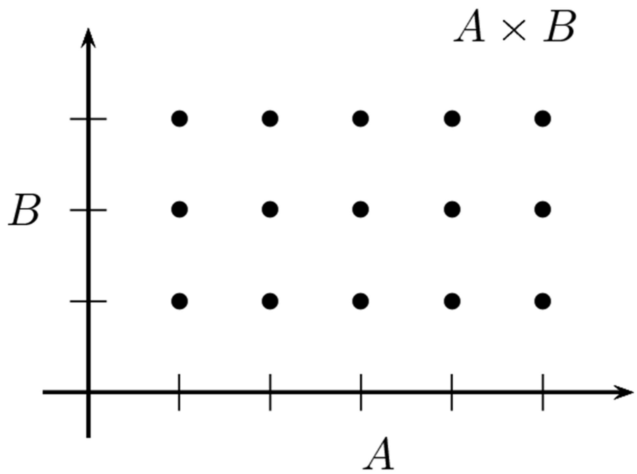
(i) $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$.



Ειδικά, αν A, B είναι ξένα (δηλαδή $A \cap B = \varnothing$), τότε $|A \cup B| = |A| + |B|$.

Η ιδιότητα αυτή γενικεύεται ως εξής:

$$\left|\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right| = \sum_{k=1}^{n} |A_k|,$$ όταν $A_1, A_2, \ldots, A_n$ ξένα ανά δύο σύνολα



(ii) $|A \times B| = |A||B|$.

(iii) $|B^A| = |B|^{|A|}$.

(iv) $|\mathcal{P}(A)| = 2^{|A|}$.

όπου $\mathbf{B}^{\mathbf{A}}$ είναι το σύνολο όλων των απεικονίσεων από το A στο B.

Παραδείγματα

1. Σε μια τάξη υπάρχουν 100 φοιτητές που έχουν περάσει το μάθημα Ανάλυση Ι, 50 που έχουν περάσει το μάθημα Ανάλυση ΙΙ και 25 που έχουν περάσει και τα δύο. Πόσοι φοιτητές έχουν περάσει τουλάχιστον ένα από τα 2 μαθήματα;

Λύση. Αν A_1, A_2 είναι τα σύνολα των φοιτητών της τάξης που έχουν περάσει τα μαθήματα Ανάλυση Ι και Ανάλυση ΙΙ αντίστοιχα, τότε ισχύει ότι

$$|A_1| = 100, \quad |A_2| = 50, \quad |A_1 \cap A_2| = 25$$

οπότε για το σύνολο $A_1 \cup A_2$ των φοιτητών που έχουν περάσει τουλάχιστον ένα από τα δύο μαθήματα, ισχύει

$$|A_1 \cup A_2| = |A_1| + |A_2| - |A_1 \cap A_2| = 100 + 50 - 25 = 125$$

2. Κάθε φύλλο μιας τράπουλας έχει δύο ενδείξεις. Η μία αφορά το είδος δηλαδή ♠, ♣, ♥, ♦ και η άλλη το νούμερο 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, J, Q, K, A. Πόσα φύλλα έχει μια τράπουλα;

Λύση. Αν $\Gamma = \{♠, ♣, ♥, ♦\}$ και $\Delta = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, J, Q, K, A\}$, τότε κάθε φύλλο αντιστοιχεί σε ένα στοιχείο του καρτεσιανού γινομένου $\Gamma \times \Delta$. Επομένως υπάρχουν $|\Gamma \times \Delta| = |\Gamma| \cdot |\Delta| = 52$ φύλλα.

3. Με πόσους τρόπους μπορούμε να μοιράσουμε τα φύλλα μιας τράπουλας σε 4 παίκτες ώστε κάθε φύλλο να το πάρει κάποιος παίκτης;

Λύση. Αν $A=\{1,2,3,4\}$ το σύνολο των παικτών, κάθε μοίρασμα αντιστοιχεί σε μια απεικόνιση $f:\Gamma\times\Delta\to A$ και υπάρχουν

$$|A|^{|\Gamma\times\Delta|}=4^{52}=20282409603651670423947251286016$$

τρόποι.

Άπειρα σύνολα

Ένα σύνολο ονομάζεται **άπειρο** όταν δεν είναι πεπερασμένο.
Τα άπειρα σύνολα διακρίνονται σε **αριθμήσιμα** και **υπεραριθμήσιμα**.

Ένα άπειρο σύνολο ονομάζεται **αριθμήσιμο** (αντ. **υπεραριθμήσιμο**) όταν είναι (αντ. δεν είναι) ισοδύναμο προς το $\mathbb{N}^*$.

Ένα σύνολο ονομάζεται **το πολύ αριθμήσιμο** αν είναι πεπερασμένο ή αριθμήσιμο.

Αποδεικνύεται ότι κάθε υποσύνολο ενός αριθμήσιμου συνόλου είναι το πολύ αριθμήσιμο.

Τα σύνολα $\mathbb{Z}$, $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ και $\mathbb{Q}$ είναι αριθμήσιμα. Αντίθετα το διάστημα $[0,1]$ είναι υπεραριθμήσιμο.
Γενικότερα κάθε διάστημα $[\alpha,\beta]$ είναι υπεραριθμήσιμο αφού είναι ισοδύναμο με το $[0,1]$.

Το σύνολο $\mathbb{R}$ των πραγματικών αριθμών είναι επίσης υπεραριθμήσιμο αφού περιέχει το διάστημα $[0,1]$.

Το σύνολο $\mathbb{Z}$ είναι αριθμήσιμο

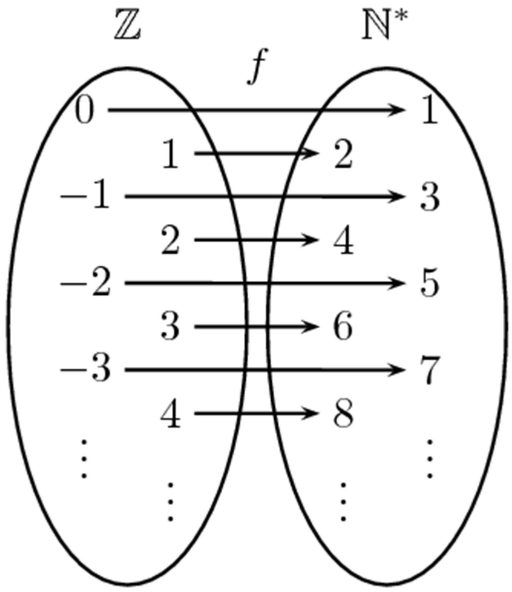
Θέλουμε να ορίσουμε μια αμφιμονοσήμαντη απεικόνιση $f:\mathbb{Z}\to\mathbb{N}^*$.
Επειδή το $\mathbb{Z}$ δεν έχει μέγιστο ούτε ελάχιστο στοιχείο, θα το διαμερίσουμε σε δύο υποσύνολα, τα οποία θα αντιστοιχίσουμε σε δύο υποσύνολα του $\mathbb{N}^*$.
Επιλέγουμε λοιπόν να διαμερίσουμε το $\mathbb{Z}$ στα σύνολα

$$M=\{\dots,-2,-1,0\} \text{ και } \Theta=\{1,2,3,\dots\}$$

των μη θετικών και θετικών ακεραίων αντίστοιχα.
Αντίστοιχα θα πρέπει να διαμερίσουμε το $\mathbb{N}^*$ σε δύο απειροσύνολα, για παράδειγμα τα

$$\Pi=\{1,3,5,\dots\} \text{ και}$$
$$A=\{2,4,6,\dots\}$$

των περιττών και άρτιων αντίστοιχα, και να απεικονίσουμε π.χ. το M στο Π και Θ στο A.



Ένας τρόπος είναι βάσει των τύπων
$f(x)=2x$, όταν $x>0$, και $f(x)=-2x+1$, όταν $x\le 0$.

ΑΣΚΗΣΗ 22

Να αποδειχθεί ότι το σύνολο $\mathbb{Z}$ είναι αριθμήσιμο.

ΛΥΣΗ

Αρκεί να αποδειχθεί ότι η $f:\mathbb{Z}\to\mathbb{N}^*$ με

$$f(x)=\begin{cases}2x, \text{ αν } x>0\\ -2x+1, \quad \text{αν } x\le 0\end{cases}$$

είναι αμφιμονοσήμαντη.

Έστω $x_1,x_2\in\mathbb{Z}$ με $f(x_1)=f(x_2)$. Αν $f(x_1)$ είναι άρτιος (αντ. περιττός) τότε από τον ορισμό της f προκύπτει ότι $x_1,x_2>0$ (αντ. $x_1,x_2\le 0$) και $2x_1=2x_2$ (αντ. $-2x_1+1=-2x_2+1$).

Άρα $x_1=x_2$ και η f είναι $1-1$.

Από την άλλη, αν $y\in\mathbb{N}^*$ τότε y είναι άρτιος ή περιττός, δηλαδή $y=2n$ ή $y=2n-1$ όπου $n\in\mathbb{N}^*$. Θέτοντας $x=n$ αν y άρτιος και $x=1-n$ αν y περιττός, προκύπτει και στις δύο περιπτώσεις ότι $f(x)=y$. Επομένως, η f είναι επίσης επί.

Άρα τελικά, η f είναι αμφιμονοσήμαντη επομένως, το σύνολο $\mathbb{Z}$ είναι αριθμήσιμο.

ΑΣΚΗΣΗ 25

Να αποδειχθεί ότι το σύνολο $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ είναι αριθμήσιμο.

ΛΥΣΗ

Αρχικά, θα αποδειχθεί ότι η απεικόνιση $f : \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ με

$$f(n,m) = 2^n 3^m$$

είναι $1-1$.

Πραγματικά, αν $f(n_1, m_1) = f(n_2, m_2)$, τότε προκύπτουν οι παρακάτω ισοδύναμες σχέσεις:

$$2^{n_1} 3^{m_1} = 2^{n_2} 3^{m_2}$$

$$2^{n_1 - n_2} = 3^{m_2 - m_1}$$

$$n_1 - n_2 = 0 \text{ και } m_2 - m_1 = 0$$

$$(n_1, m_1) = (n_2, m_2).$$

Άρα η f είναι $1-1$ και επομένως $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^* \sim R(f)$. Επειδή το σύνολο $R(f)$ περιέχεται στο $\mathbb{N}^*$ θα είναι το πολύ αριθμήσιμο οπότε και το σύνολο $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ θα είναι το πολύ αριθμήσιμο. Επιπλέον, επειδή το σύνολο $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ είναι άπειρο[1] θα είναι τελικά αριθμήσιμο.

---

[1] Αφού περιέχει το άπειρο σύνολο $\{1\} \times \mathbb{N}^*$.

ΑΣΚΗΣΗ 26

Να αποδειχθεί ότι το σύνολο $\mathbb{Q}$ των ρητών αριθμών είναι αριθμήσιμο.

ΛΥΣΗ

Θεωρούμε το σύνολο

$$A = \{(m,n) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^* : \text{ΜΚΔ}(m,n) = 1\}$$

και $\mathbb{Q}^+$ το σύνολο των θετικών ρητών αριθμών, δηλαδή

$$\mathbb{Q}^+ = \left\{x \in \mathbb{R} : x = \frac{m}{n} \text{ όπου } n, m \in \mathbb{N}^*\right\}.$$

Εύκολα αποδεικνύεται ότι η $f : A \to \mathbb{Q}^+$ με $f(m,n) = \dfrac{m}{n}$ είναι αμφιμονοσήμαντη, οπότε $A \sim \mathbb{Q}^+$. Επειδή το σύνολο A είναι άπειρο υποσύνολο του αριθμήσιμου συνόλου $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$, θα είναι και αυτό αριθμήσιμο. Άρα το σύνολο $\mathbb{Q}^+$ είναι αριθμήσιμο.

Θεωρώντας την αμφιμονοσήμαντη απεικόνιση $g : \mathbb{Q}^+ \to \mathbb{Q}^-$ με $g(x) = -x$ προκύπτει ότι $\mathbb{Q}^+, \mathbb{Q}^-$ είναι ισοδύναμα οπότε το $\mathbb{Q}^-$ είναι αριθμήσιμο. Έτσι, και το σύνολο $\mathbb{Q} = \mathbb{Q}^+ \cup \mathbb{Q}^- \cup \{0\}$ είναι αριθμήσιμο.