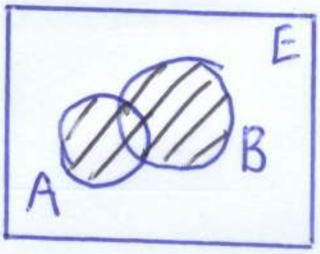
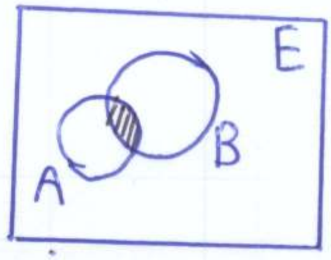
Μαθηματικά των Υπολογιστών -1- Τρίτη 27.10.2020

Επανάληψη στις Πράξεις Συνόλων

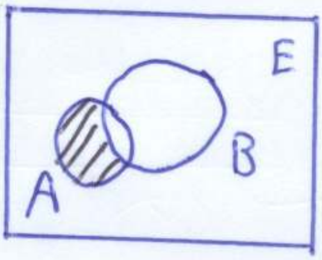
Έστω $A, B \subseteq E$ (Διαγράμμα Venn)



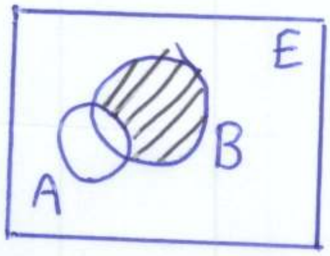
$A \cup B$



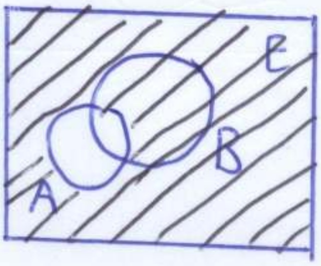
$A \cap B$



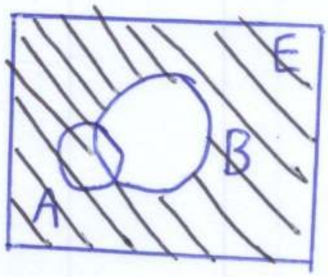
$A \setminus B$



$B \setminus A$



$\overline{A}$



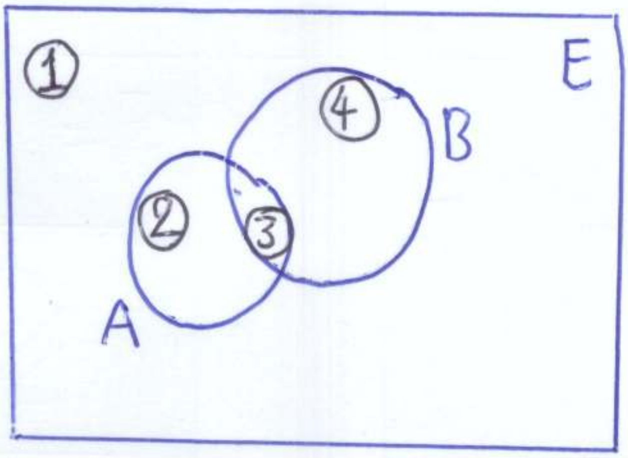
$\overline{B}$

Ιδιότητες

1. $A \cap \overline{A} = \emptyset$
2. $A \cup \overline{A} = E$
3. $A \setminus B = A \cap \overline{B}$
4. $A \cup E = E$
5. $A \cap E = A$
6. $\overline{\overline{A}} = A$
7. $(\overline{A \cap B}) = \overline{A} \cup \overline{B}$
8. $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$

Κανόνες De Morgan

9. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
10. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
11. $A = (A \cap B) \cup (A \cap \overline{B})$



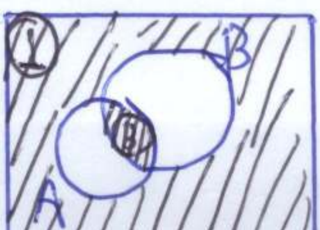
Παρατηρήστε ότι τα διαγράμματα των συνόλων A, B διαμερίζουν το διάγραμμα του E σε 4 περιοχές. Επομένως, κάθε πιθανό υποσύνολο του E που σχετίζεται με τα A, B μπορεί να ορισθεί ως ένωση κάποιων από αυτές τις περιοχές.

Επιπλέον, παρατηρήστε ότι καθε περιοχή ορίζεται ως τομή των $A, \bar{A}$ και $B, \bar{B}$

① $= \bar{A} \cap \bar{B}$ ③ $= A \cap B$

② $= A \cap \bar{B}$ ④ $= \bar{A} \cap B$

Άρα, κάθε υποσύνολο του E που σχετίζεται με τα A, B μπορεί να εκφρασεί ως ένωση κάποιων τομών των A, B ή των συμπληρωμάτων τους



$\underbrace{(\bar{A} \cap \bar{B})}_{①} \cup \underbrace{(A \cap B)}_{③}$

Αν $A_1, A_2, \dots, A_n \subseteq E$ τα οποία αποτελούν μια διαμέριση του E, τότε μπορούμε να υπολογίσουμε το πλήθος των στοιχείων του E υπολογίζοντας το πλήθος των στοιχειων κάθε συνόλου A_i της διαμέρισης.

Συγκεκριμένα,

$$|E| = |A_1| + |A_2| + \cdots + |A_n|$$

Σημαντικές ειδικες περιπτώσεις

- Για κάθε $A \subseteq E$, τα $A, \bar{A}$ είναι διαμέριση του E. Άρα $|E| = |A| + |\bar{A}|$
- Αν $A, B \subseteq E$ με $A \cap B = \emptyset$, τότε τα A, B είναι διαμέριση της ενωσης $A \cup B$. Άρα,

$$|A \cup B| = |A| + |B|$$

Επειδή στα προβλήματα που συναντάμε δεν είναι πάντα εφικτό να δουλευουμε με διαμερίσεις χρειαζόμαστε τις επόμενες ιδέες:

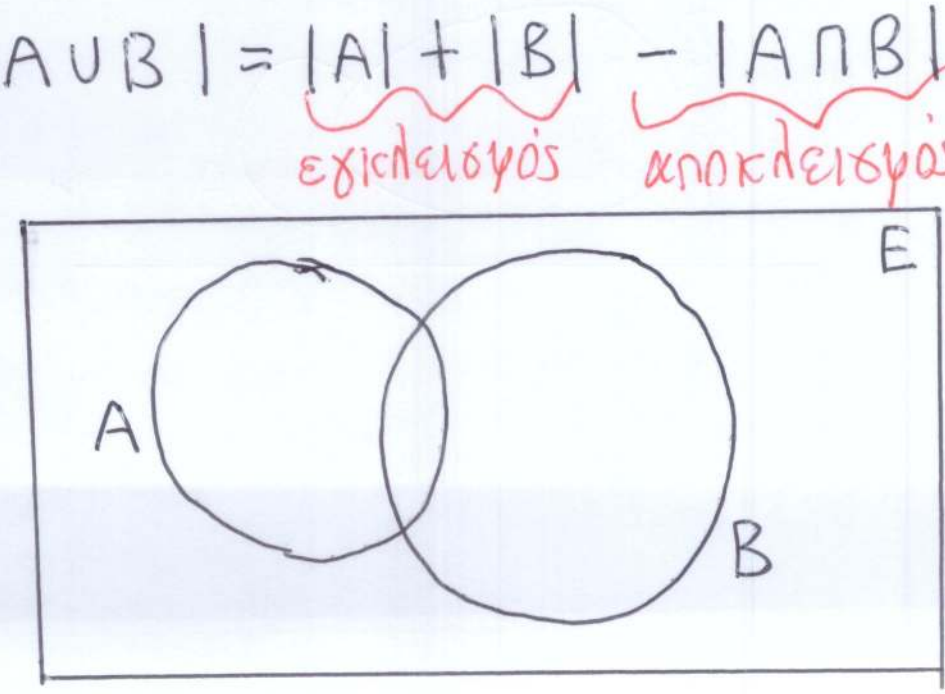
Αρχή εγκλεισμού-αποκλεισμού (Παράγραφος 2.2)

Η αρχή εγκλεισμού-αποκλεισμού (inclusion-exclusion principle, ή PIE) χρησιμοποιείται σε προβλήματα όπου μας ενδιαφέρει να υπολογίσουμε τον αριθμό των στοιχείων κάποιου συνόλου X το οποίο ορίζεται/περιγράφεται μέσω ενώσεων, τομών και συμπληρωμάτων άλλων πεπερασμένων συνόλων.

Η βασική ιδέα της αρχής εγκλεισμού-αποκλεισμού είναι η εξής:

Έστω $A, B \subseteq E$, E πεπερασμένο. Τότε

$$|A \cup B| = \underbrace{|A| + |B|}_{\text{εγκλεισμός}} - \underbrace{|A \cap B|}_{\text{αποκλεισμός}} \qquad (1)$$



Από την σχέση $E = (A \cup B) \cup (\overline{A \cup B})$ και επειδή $(A \cup B), (\overline{A \cup B})$ είναι ξένα μεταξύ τους, προκύπτει ότι

$$|E| = |A \cup B| + |\overline{A \cup B}| \Leftrightarrow$$

$$|\overline{A \cup B}| = |E| - |A \cup B| \Leftrightarrow$$

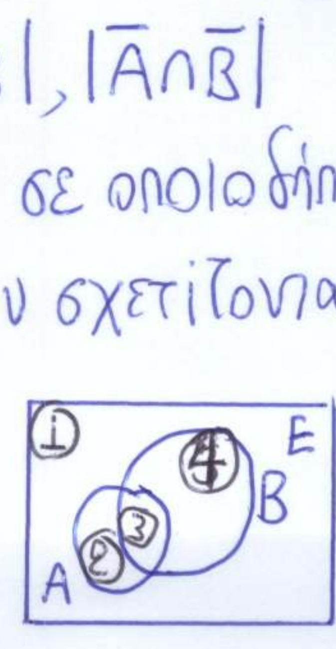
$$|\overline{A \cup B}| = |E| - |A| - |B| + |A \cap B|$$

Ισοδύναμα, επειδή $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$ έχουμε ότι

$$|\bar{A} \cap \bar{B}| = \underbrace{|E|}_{\text{εγκλεισμός}} \underbrace{- |A| - |B|}_{\text{αποκλεισμός}} \underbrace{+ |A \cap B|}_{\text{εγκλεισμός}} \qquad (2)$$

Σημαντική παρατήρηση

Παρατηρήστε ότι αν γνωρίζουμε τους πληθαρίθμους $|E|, |A|, |B|$ και $|A \cap B|$ τότε μπορούμε να υπολογίσουμε και τους πληθαρίθμους $|A \cap \bar{B}|, |\bar{A} \cap B|, |\bar{A} \cap \bar{B}|$ επομένως μπορούμε να απαντήσουμε σε οποιοδήποτε ερώτημα αφορά υποσύνολα του E που σχετίζονται με τα A, B



② $|A \cap \bar{B}| = |A| - |A \cap B|$

④ $|\bar{A} \cap B| = |B| - |A \cap B|$

① $|\bar{A} \cap \bar{B}| = |E| - |A| - |B| + |A \cap B|$

Γενικότερα, αν $A_1, A_2, \ldots, A_n$ είναι υποσύνολα του E τότε

$$|A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n| = |A_1| + |A_2| + \cdots + |A_n|$$
$$- \Big(|A_1 \cap A_2| + |A_1 \cap A_3| + \cdots + \underset{1 \le i < j \le n}{|A_i \cap A_j|} + \cdots + |A_{n-1} \cap A_n| \Big)$$
$$+ \Big(|A_1 \cap A_2 \cap A_3| + \cdots + \underset{1 \le i < j < k \le n}{|A_i \cap A_j \cap A_k|} + \cdots + |A_{n-2} \cap A_{n-1} \cap A_n| \Big)$$
$$- \cdots + (-1)^{n-1} |A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n| \qquad (3)$$

Πιο συνοπτικά

$$|A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n| = S_1 - S_2 + S_3 - \cdots + (-1)^{\nu-1} S_\nu + \cdots + (-1)^{n-1} S_n$$

όπου

S_1 είναι το άθροισμα των $|A_i|$, $1 \le i \le n$

S_2 είναι το άθροισμα των $|A_i \cap A_j|$, $1 \le i < j \le n$

S_3 είναι το άθροισμα των $|A_i \cap A_j \cap A_k|$ $1 \le i < j < k \le n$

S_ν είναι το άθροισμα όλων των πληθαρίθμων των τομών ν οποιωνδήποτε από τα $A_1, A_2, \ldots, A_n$

S_n είναι ίσο με $|A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n|$

Ο υπολογισμός του πληθαρίθμου $|\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \cdots \cap \overline{A_n}|$ μπορεί να γίνει χρησιμοποιώντας τις σχέσεις

$$\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \cdots \cap \overline{A_n} = \overline{A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n}$$

και

$$|E| = |A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n| + |\overline{A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n}|$$

οπότε προκύπτει

$$|\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \cdots \cap \overline{A_n}| = |E| - S_1 + S_2 - \cdots + (-1)^{\nu} S_{\nu} + \cdots + (-1)^{n} S_{n} \qquad (4)$$

Παρατήρηση

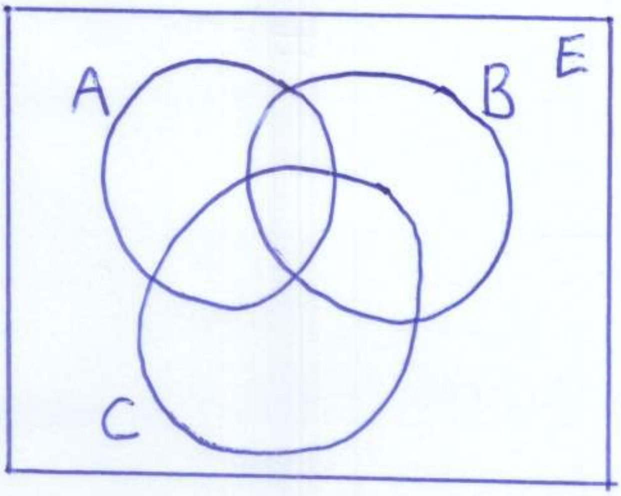
- Όταν ζητείται ο πληθάριθμος ενός συνόλου του οποίου όλα τα στοιχεία έχουν τουλάχιστον μια ιδιότητα από n δοσμένες ιδιότητες, τότε εφαρμόζεται ο τύπος (3)

$$|A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n| = S_1 - S_2 + \cdots + (-1)^{\nu-1} S_{\nu} + \cdots + (-1)^{n-1} S_n$$

- Όταν ζητείται ο πληθάριθμος ενός συνόλου του οποίου τα στοιχεία δεν έχουν καμία από n δοσμένες ιδιότητες, τότε εφαρμόζεται ο τύπος (4)

$$|\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \cdots \cap \overline{A_n}| = E - S_1 + S_2 + \cdots + (-1)^{\nu} S_{\nu} + \cdots + (-1)^{n} S_n$$

Συνήθως στις ασκήσεις χρησιμοποιείται ο τύπος για 3 (ή ~~4~~ σύνολα). Έστω $A, B, C \subseteq E$



$$\begin{aligned}|A\cup B\cup C| = {} & |A|+|B|+|C| \\ & -|A\cap B|-|A\cap C|-|B\cap C| \\ & +|A\cap B\cap C|\end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned}|\overline{A}\cap\overline{B}\cap\overline{C}| = {} & |E|-|A|-|B|-|C| \\ & +|A\cap B|+|A\cap C|+|B\cap C| \\ & -|A\cap B\cap C|\end{aligned}$$

2.2 Αρχή εγκλεισμού-αποκλεισμού

Οι παρακάτω κανόνες μεταξύ συνόλων ισχύουν για **πεπερασμένα σύνολα**.

Πρόταση 2.4 (Κανόνας αθροίσματος). *Αν A, B είναι ξένα σύνολα ισχύει ότι*

$$|A \cup B| = |A| + |B|.$$

Γενικότερα, αν A_i είναι ανά δύο ξένα σύνολα ισχύει ότι

$$\left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| = \sum_{i=1}^{n} |A_i|.$$

Στη περίπτωση όπου τα σύνολα δεν είναι κατ' ανάγκην ξένα ανά δύο εφαρμόζεται η αρχή εγκλεισμού-αποκλεισμού.

Πρόταση 2.5 (Αρχή εγκλεισμού-αποκλεισμού).

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|. \tag{2.1}$$

Γενικότερα, για $n \geq 2$ ισχύει ότι

$$|A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n| = S_1 - S_2 + S_3 - \cdots + (-1)^{n-1} S_n, \tag{2.2}$$

όπου
S_1 είναι το άθροισμα των $|A_i|$, όπου $1 \leq i \leq n$,
S_2 είναι το άθροισμα των $|A_i \cap A_j|$, όπου $1 \leq i < j \leq n$,
S_3 είναι το άθροισμα των $|A_i \cap A_j \cap A_k|$, όπου $1 \leq i < j < k \leq n$,
$\vdots$
S_n είναι $|A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n|$.

Απόδειξη. (Με επαγωγή ως προς n.)
Για $n = 2$ (δηλ. ο τύπος (2.1)) ισχύει (βλέπε παράγραφο 1.4.1).
Υποθέτουμε ότι ισχύει γα το n, δηλαδή

$$|A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n| = \sum_{1 \leq i \leq n} |A_i| - \sum_{1 \leq i < j \leq n} |A_i \cap A_j| + \sum_{1 \leq i < j < k \leq n} |A_i \cap A_j \cap A_k| - \cdots + (-1)^{n-1} |A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n|$$

και θα αποδείξουμε ότι ισχύει για το $n + 1$, δηλαδή

$$|A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n \cup A_{n+1}| = \sum_{1 \leq i \leq n+1} |A_i| - \sum_{1 \leq i < j \leq n+1} |A_i \cap A_j| + \sum_{1 \leq i < j < k \leq n+1} |A_i \cap A_j \cap A_k| - \cdots + (-1)^{n} |A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_{n+1}|.$$

Εφαρμόζουμε τον τύπο (2.1) για τα σύνολα

$$A = A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n \text{ και } B = A_{n+1},$$

οπότε

$$|A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n \cup A_{n+1}| = |A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n| + |A_{n+1}| - |(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n) \cap A_{n+1}|\,.$$

Επιπλέον,

$$|(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n) \cap A_{n+1}| = |(A_1 \cap A_{n+1}) \cup (A_2 \cap A_{n+1}) \cup \cdots \cup (A_n \cap A_{n+1})|,$$

το οποίο από την υπόθεση της επαγωγής ισούται με

$$\sum_{1\le i\le n} |A_i \cap A_{n+1}| - \sum_{1\le i<j\le n} |(A_i \cap A_{n+1}) \cap (A_j \cap A_{n+1})| + \sum_{1\le i<j<k\le n} |(A_i \cap A_{n+1}) \cap (A_j \cap A_{n+1}) \cap (A_k \cap A_{n+1})| - \cdots + (-1)^{n-1}|(A_1 \cap A_{n+1}) \cap (A_2 \cap A_{n+1}) \cap \cdots \cap (A_n \cap A_{n+1})|$$

ή, ισοδύναμα, με

$$\sum_{1\le i\le n} |A_i \cap A_{n+1}| - \sum_{1\le i<j\le n} |A_i \cap A_j \cap A_{n+1}| + \sum_{1\le i<j<k\le n} |A_i \cap A_j \cap A_k \cap A_{n+1}| - \cdots + (-1)^{n-1}|A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n \cap A_{n+1}|.$$

Συνεπώς, έχουμε ότι

$$|A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n \cup A_{n+1}| = |A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n| + |A_{n+1}| - \Bigg(\sum_{1\le i\le n} |A_i \cap A_{n+1}| - \sum_{1\le i<j\le n} |A_i \cap A_j \cap A_{n+1}| + \sum_{1\le i<j<k\le n} |A_i \cap A_j \cap A_k \cap A_{n+1}| - \cdots + (-1)^{n-1}|A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n \cap A_{n+1}| \Bigg)$$

οπότε, από την υπόθεση της επαγωγής προκύπτει ότι

$$\begin{aligned}
&|A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n \cup A_{n+1}| \\
&= \sum_{1\le i\le n} |A_i| - \sum_{1\le i<j\le n} |A_i \cap A_j| + \sum_{1\le i<j<k\le n} |A_i \cap A_j \cap A_k| - \cdots + (-1)^{n-1}|A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n| + |A_{n+1}| \\
&-\Bigg(\sum_{1\le i\le n} |A_i \cap A_{n+1}| - \sum_{1\le i<j\le n} |A_i \cap A_j \cap A_{n+1}| + \sum_{1\le i<j<k\le n} |A_i \cap A_j \cap A_k \cap A_{n+1}| - \cdots + (-1)^{n-1}|A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n \cap A_{n+1}| \Bigg) \\
&= \sum_{1\le i\le n+1} |A_i| - \sum_{1\le i<j\le n+1} |A_i \cap A_j| + \sum_{1\le i<j<k\le n+1} |A_i \cap A_j \cap A_k| - \cdots + (-1)^{n}|A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n \cap A_{n+1}|.
\end{aligned}$$ □

Υπενθυμίζουμε ότι ισχύουν οι παρακάτω σχέσεις (**Κανόνες De Morgan**):

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}, \qquad \overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}.$$

Γενικότερα,

$$\overline{A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n} = \overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \cdots \cap \overline{A_n},$$
$$\overline{A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n} = \overline{A_1} \cup \overline{A_2} \cup \cdots \cup \overline{A_n}.$$

Η αρχή εγκλεισμού-αποκλεισμού πολλές φορές δίνεται στην επόμενη ισοδύναμη μορφή:

Πρόταση 2.6 (Αρχή εγκλεισμού αποκλεισμού για συμπληρώματα). *Έστω $A, B \subseteq \mathcal{E}$. Τότε ισχύει ότι*

$$|\overline{A} \cap \overline{B}| = |\mathcal{E}| - (|A| + |B|) + |A \cap B| \tag{2.3}$$

και γενικότερα

$$|\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \cdots \cap \overline{A_n}| = |\mathcal{E}| - S_1 + S_2 - \cdots + (-1)^n S_n. \tag{2.4}$$

Απόδειξη. Παρατηρούμε ότι, αφού

$$(A \cup B) \cup (\overline{A \cup B}) = \mathcal{E},$$

παίρνουμε

$$\begin{aligned} |A \cup B| + |\overline{A \cup B}| &= |\mathcal{E}| \Leftrightarrow \\ |\overline{A \cup B}| &= |\mathcal{E}| - |A \cup B| \Leftrightarrow \\ |\overline{A} \cap \overline{B}| &= |\mathcal{E}| - (|A| + |B| - |A \cap B|) \end{aligned}$$

και γενικότερα,

$$\begin{aligned} |\overline{A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n}| &= |\mathcal{E}| - |A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n| \Leftrightarrow \\ |\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \cdots \cap \overline{A_n}| &= |\mathcal{E}| - (S_1 - S_2 + S_3 - \cdots + (-1)^{n-1} S_n) \\ &= |\mathcal{E}| - S_1 + S_2 - S_3 + \cdots + (-1)^n S_n. \end{aligned}$$

□

Εφαρμογές

1. Όταν ζητείται ο πληθάριθμος ενός συνόλου, του οποίου τα στοιχεία *έχουν μια τουλάχιστον ιδιότητα* από n δοσμένες ιδιότητες, τότε εφαρμόζεται ο πρώτος τύπος:

$$|A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n| = S_1 - S_2 + S_3 - \cdots + (-1)^{n-1} S_n.$$

2. Όταν ζητείται ο πληθάριθμος ενός συνόλου, του οποίου τα στοιχεία *δεν έχουν καμιά ιδιότητα* από n δοσμένες ιδιότητες, τότε εφαρμόζεται ο δεύτερος τύπος:

$$|\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \cdots \cap \overline{A_n}| = |\mathcal{E}| - S_1 + S_2 - S_3 + \cdots + (-1)^n S_n.$$

Παράδειγμα 2.2.1. *Πόσοι φυσικοί αριθμοί μικρότεροι ή ίσοι του* 100 *διαιρούνται από τουλάχιστον έναν από τους αριθμούς* 2, 5*;*

Λύση. Θεωρούμε τα σύνολα:

A_1: αριθμοί του [100] που είναι διαιρετοί με το 2.

A_2: αριθμοί του [100] που είναι διαιρετοί με το 5.

Ζητείται ο πληθάριθμος του συνόλου $A_1 \cup A_2$.

Προφανώς,

$$|A_1| = \lfloor \frac{100}{2} \rfloor = 50, \; |A_2| = \lfloor \frac{100}{5} \rfloor = 20 \text{ και } |A_1 \cap A_2| = \lfloor \frac{100}{10} \rfloor = 10.$$

Από τον τύπο (2.1) προκύπτει ότι

$$|A_1 \cup A_2| = |A_1| + |A_2| - |A_1 \cap A_2| = 50 + 20 - 10 = 60.$$

□

Παράδειγμα 2.2.2. *Σε ένα σχολείο υπάρχουν 100 μαθητές και από αυτούς οι 50 μιλάνε Γαλλικά, οι 40 Γερμανικά, και οι 20 μιλάνε και τις δύο γλώσσες. Πόσοι μαθητές δεν μιλάνε καμία από τις 2 γλώσσες;*

Λύση. Θεωρούμε τα σύνολα

A_1: μαθητές που μιλάνε Γαλλικά.

A_2: μαθητές που μιλάνε Γερμανικά.

Ζητείται ο πληθάριθμος του συνόλου $\overline{A_1} \cap \overline{A_2}$.

Προφανώς, $|\mathcal{E}| = 100$, $|A_1| = 50$, $|A_2| = 40$ και $|A_1 \cap A_2| = 20$.

Από τον τύπο (2.3) της αρχής εγκλεισμού αποκλεισμού προκύπτει ότι

$$|\overline{A_1} \cap \overline{A_2}| = \mathcal{E} - (|A_1| + |A_2|) + |A_1 \cap A_2| = 100 - (50 + 40) + 20 = 30.$$

Παρατήρηση. Επιπλέον προκύπτει ότι οι μαθητές του σχολείου οι οποίοι μιλάνε τουλάχιστον μία από τις δύο γλώσσες είναι 70. Πράγματι, ισχύει ότι

$$\mathcal{E} = (A_1 \cup A_2) \cup (\overline{A_1 \cup A_2}).$$

Άρα, (κανόνας αθροίσματος)

$$\begin{aligned} |\mathcal{E}| &= |A_1 \cup A_2| + |\overline{A_1 \cup A_2}| \\ |\mathcal{E}| &= |A_1 \cup A_2| + |\overline{A_1} \cap \overline{A_2}| \\ 100 &= |A_1 \cup A_2| + 30, \end{aligned}$$

οπότε

$$|A_1 \cup A_2| = 100 - 30 = 70.$$ □

Παράδειγμα 2.2.3. *Μια έρευνα αγοράς για ένα προϊόν έδωσε τα παρακάτω αποτελέσματα:*

	Ερωτηθέντα άτομα: 2000	*Άτομα που γνωρίζουν το προϊόν:* 1150
Παντρεμένοι	1281	632
Γυναίκες	1048	410
Παντρεμένες γυναίκες	838	218

Πόσα από τα ερωτηθέντα άτομα έχουν ***τουλάχιστον μια*** *από τις παρακάτω ιδιότητες:*

Γνωρίζουν το προϊόν.

Είναι παντρεμένοι.

Είναι γυναίκες.

Λύση. Θεωρούμε τα σύνολα

A_1 : άτομα που γνωρίζουν το προϊόν,

A_2 : άτομα που είναι παντρεμένοι, και

A_3 : άτομα που είναι γυναίκες.

Προφανώς,

$$|A_1| = 1150,\ \ |A_2| = 1281,\ \ |A_3| = 1048,$$

$$|A_1 \cap A_2| = 632, |A_1 \cap A_3| = 410,\ \ |A_2 \cap A_3| = 838,$$

$$|A_1 \cap A_2 \cap A_3| = 218.$$

Άρα ο τύπος (1) της αρχής εγκλεισμού-αποκλεισμού (για $n = 3$) δίνει:

$$\begin{aligned}|A_1 \cup A_2 \cup A_3| &= |A_1| + |A_2| + |A_3| - |A_1 \cap A_2| - |A_1 \cap A_3| - |A_2 \cap A_3| + |A_1 \cap A_2 \cap A_3| \\ &= 1150 + 1281 + 1048 - 632 - 410 - 838 + 218 \\ &= 1817.\end{aligned}$$

□

Παράδειγμα 2.2.4. *Μια διαφημιστική εταιρεία ενδιαφέρεται να συγκεντρώσει στοιχεία για τις προτιμήσεις 3500 πελατών ενός τουριστικού γραφείου σχετικά με τις διακοπές που επιθυμούν: 2000 άτομα δήλωσαν ότι προτιμούν διακοπές στην Ελλάδα. 1600 άτομα δήλωσαν ότι προτιμούν διακοπές σε κάποιο παραθαλάσσιο μέρος. 1300 άτομα δήλωσαν ότι προτιμούν διακοπές με οργανωμένη ομάδα. Επίσης, 700 άτομα δήλωσαν ότι προτιμούν οργανωμένες διακοπές στην Ελλάδα, 500 άτομα δήλωσαν ότι επιθυμούν οργανωμένες διακοπές σε κάποιο παραθαλάσσιο μέρος και 1300 άτομα δήλωσαν ότι επιθυμούν διακοπές σε κάποιο Ελληνικό παραθαλάσσιο μέρος. Τέλος, 300 άτομα δήλωσαν ότι επιθυμούν οργανωμένες διακοπές σε κάποιο Ελληνικό παραθαλάσσιο μέρος.*

i) *Να βρεθεί ο αριθμός των ατόμων που επιθυμούν μη οργανωμένες διακοπές σε μη παραθαλάσσιο μέρος του εξωτερικού.*

ii) *Να βρεθεί ο αριθμός των ατόμων που επιθυμούν οργανωμένες διακοπές στην Ελλάδα ή/και σε κάποιο παραθαλάσσιο μέρος.*

iii) *Να βρεθεί ο αριθμός των ατόμων που επιθυμούν μη οργανωμένες διακοπές στην Ελλάδα ή/και σε κάποιο παραθαλάσσιο μέρος.*

Λύση. Έστω

E το σύνολο όλων των ατόμων.

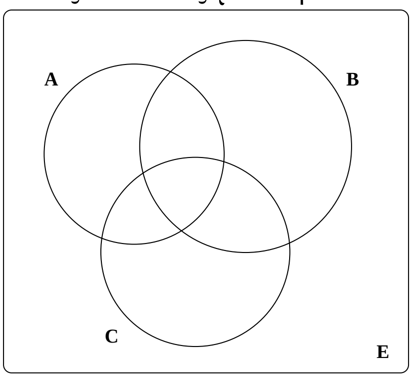
A το σύνολο των ατόμων που προτιμούν διακοπές στην Ελλάδα.

B το σύνολο των ατόμων που προτιμούν διακοπές σε παραθαλάσσιο μέρος.

C το σύνολο των ατόμων που προτιμούν διακοπές με οργανωμένη ομάδα.

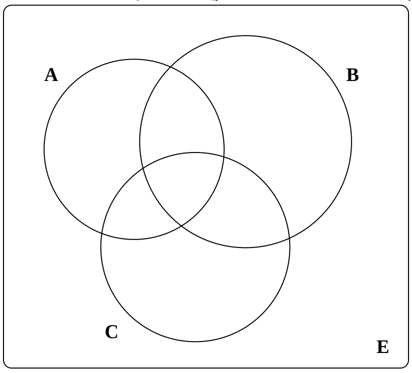
Γνωρίζουμε ότι $|E| = 3500$, $|A| = 2000$, $|B| = 1600$, $|C| = 1300$, $|A \cap B| = 1300$, $|A \cap C| = 700$, $|B \cap C| = 500$ και $|A \cap B \cap C| = 300$.

Θα απαντήσουμε στα ερωτήματα της άσκησης με τη βοήθεια του επόμενου διαγράμματος Venn.

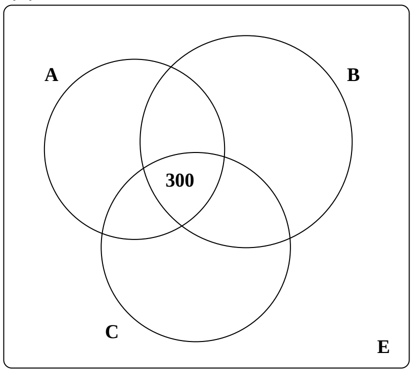


Κάθε μια από τις 8 περιοχές που ορίζονται στο διάγραμμα αντιστοιχεί σε κάποιο σύνολο της μορφής $A^* \cap B^* \cap C^*$, όπου X^* είναι είτε το X είτε το $\overline{X}$. Θα αρχίσουμε να υπολογίζουμε τους πληθαρίθμους κάθε περιοχής ξεκινώντας από την κεντρική περιοχή, έπειτα θα ασχοληθούμε με τις περιοχές που γειτονεύουν με την κεντρική. Στη συνέχεια, με τις περιοχές που γειτονεύουν με αυτές και τέλος με την εξωτερική περιοχή.

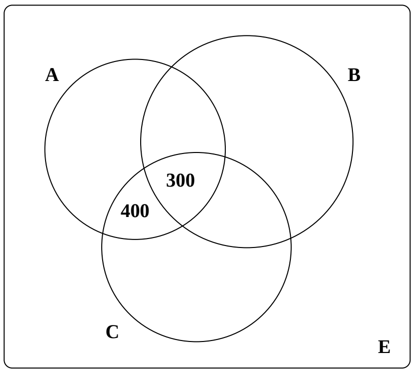
Προκειμένου να γίνει πιο κατανοητή η διαδικασία στα επόμενα σχήματα απεικονίζονται τα στάδια της συμπλήρωσης του διαγράμματος.



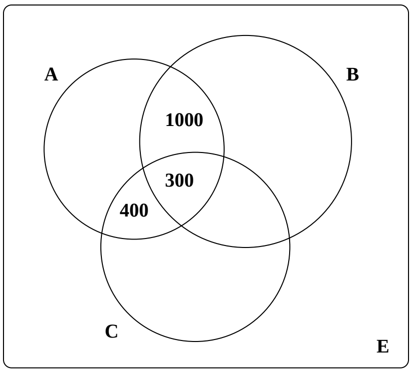
στάδιο 0



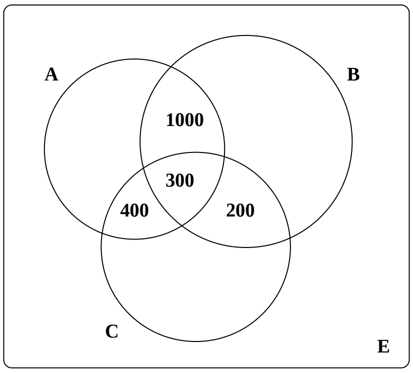
στάδιο 1



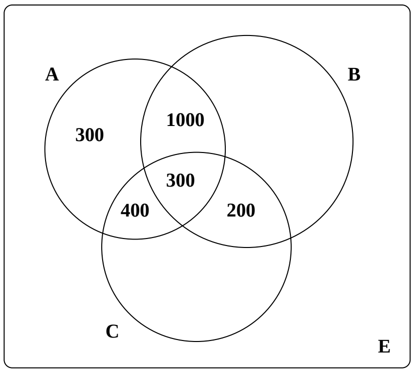
στάδιο 2



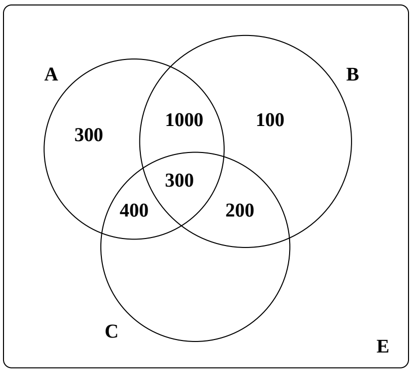
στάδιο 3



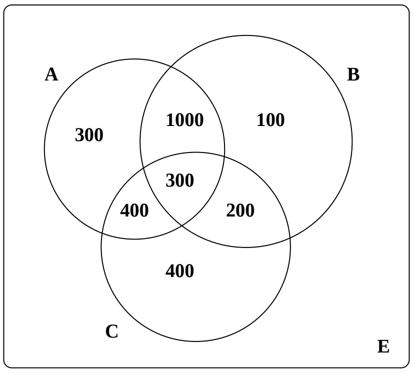
στάδιο 4



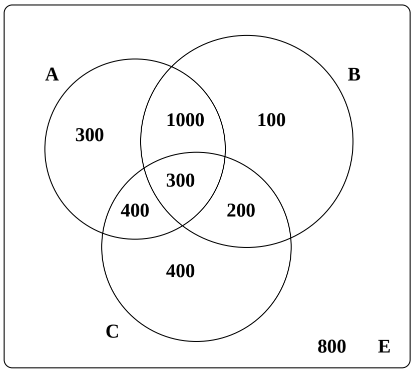
στάδιο 5



στάδιο 6



στάδιο 7

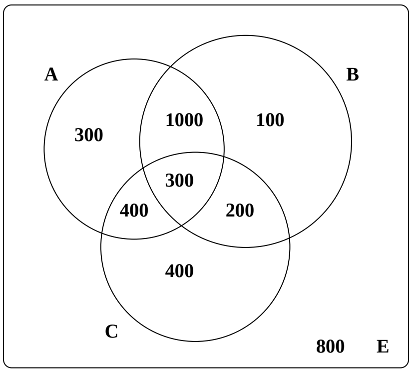


στάδιο 8

- $|A \cap B \cap C| = 300$ (βλέπε στάδιο 1)
- $|A \cap \overline{B} \cap C| = |A \cap C| - |A \cap B \cap C| = 700 - 300 = 400$ (βλέπε στάδιο 2).
- $|A \cap B \cap \overline{C}| = |A \cap B| - |A \cap B \cap C| = 1300 - 300 = 1000$ (βλέπε στάδιο 3).
- $|\overline{A} \cap B \cap C| = |B \cap C| - |A \cap B \cap C| = 500 - 300 = 200$ (βλέπε στάδιο 4).
- $|A \cap \overline{B} \cap \overline{C}| = |A| - |A \cap \overline{B} \cap C| - |A \cap B \cap \overline{C}| - |A \cap B \cap C| = 2000 - 400 - 1000 - 300 = 300.$ (βλέπε στάδιο 5).

- $|\overline{A} \cap B \cap \overline{C}| = |B| - |A \cap B \cap \overline{C}| - |\overline{A} \cap B \cap C| - |A \cap B \cap C| = 1600 - 1000 - 200 - 300 = 100$. (βλέπε στάδιο 6).
- $|\overline{A} \cap \overline{B} \cap C| = |C| - |A \cap \overline{B} \cap C| - |\overline{A} \cap B \cap C| - |A \cap B \cap C| = 1300 - 400 - 200 - 300 = 400$. (βλέπε στάδιο 7).
- $|\overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C}| = |E| - |A \cap \overline{B} \cap \overline{C}| - |\overline{A} \cap \overline{B} \cap C| - |\overline{A} \cap B \cap \overline{C}| - |\overline{A} \cap B \cap C| - |A \cap \overline{B} \cap C| - |A \cap B \cap \overline{C}| - |A \cap B \cap C| = 3500 - 300 - 400 - 100 - 200 - 400 - 1000 - 300 = 800$. (βλέπε στάδιο 8).

Όλες οι απαντήσεις που αφορούν τα παραπάνω στοιχεία μπορούν να βρεθούν εύκολα με τη βοήθεια του τελευταίου διαγράμματος:



i) Ο ζητούμενος αριθμός ισούται με τον πληθάριθμο $|E \setminus (A \cup B \cup C)| = |\overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C}| = 800$.

ii) Ο ζητούμενος αριθμός ισούται με τον πληθάριθμο $|C \cap (A \cup B)| = |A \cap \overline{B} \cap C| + |\overline{A} \cap B \cap C| + |A \cap B \cap C| = 400 + 200 + 300 = 900$.

iii) Ο ζητούμενος αριθμός ισούται με τον πληθάριθμο $|(A \cup B) \setminus C| = |A \cap \overline{B} \cap \overline{C}| + |A \cap B \cap \overline{C}| + |\overline{A} \cap B \cap \overline{C}| = 300 + 1000 + 100 = 1400$. □

Παράδειγμα 2.2.5. *Να βρεθεί το πλήθος των αριθμών του συνόλου* [1000] *που δεν είναι διαιρετοί ούτε με το* 2, *ούτε με το* 3, *ούτε με το* 5.

Λύση. Έστω τα σύνολα:

A_1: αριθμοί του [1000] που είναι διαιρετοί με το 2.
A_2: αριθμοί του [1000] που είναι διαιρετοί με το 3.
A_3: αριθμοί του [1000] που είναι διαιρετοί με το 5.

Τότε,

$$|A_1| = \lfloor \frac{1000}{2} \rfloor = 500, \ |A_2| = \lfloor \frac{1000}{3} \rfloor = 333, \ |A_3| = \lfloor \frac{1000}{5} \rfloor = 200.$$

$$|A_1 \cap A_2| = \lfloor \frac{1000}{6} \rfloor = 166, \ |A_1 \cap A_3| = \lfloor \frac{1000}{10} \rfloor = 100, \ |A_2 \cap A_3| = \lfloor \frac{1000}{15} \rfloor = 66,$$

$$|A_1 \cap A_2 \cap A_3| = \lfloor \frac{1000}{30} \rfloor = 33.$$

Άρα ο τύπος (2.4) της αρχής εγκλεισμού-αποκλεισμού (για $n = 3$) δίνει:

$$\begin{aligned} |\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \overline{A_3}| &= |\mathcal{E}| - (|A_1| + |A_2| + |A_3|) + (|A_1 \cap A_2| + |A_1 \cap A_3| + |A_2 \cap A_3|) - |A_1 \cap A_2 \cap A_3| \\ &= 1000 - (500 + 333 + 200) + (166 + 100 + 66) - 33 \\ &= 266. \end{aligned}$$

□

Παράδειγμα 2.2.6. *Σε μια αίθουσα βρίσκονται n άτομα τα οποία κάθονται σε n διακεκριμένες θέσεις. Να βρεθεί ο αριθμός των τρόπων που μπορούν να αλλάξουν θέσεις τα n άτομα έτσι ώστε κανείς να μην κάθεται στην αρχική του θέση.*

Λύση. Οι τρόποι που μπορούν να καθίσουν τα n άτομα στις θέσεις τους χωρίς περιορισμό είναι $n!$.

Έστω A_i το σύνολο όλων των τρόπων να καθίσουν τα n άτομα έτσι ώστε το i-στό άτομο να κάθεται στην αρχική του θέση (και οι υπόλοιποι να μην έχουν κανένα περιορισμό).

Ζητείται να βρεθεί ο πληθάριθμος

$$|\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \cdots \cap \overline{A_{n-1}} \cap \overline{A_n}|.$$

Παρατηρούμε ότι για κάθε $i \in [n]$ ισχύει ότι

$$|A_i| = (n-1)!$$

διότι το i-στό άτομο έχει μόνο ένα τρόπο να καθίσει και για τα υπόλοιπα $n-1$ άτομα υπάρχουν $(n-1)!$ τρόποι να καθίσουν.

Επίσης, για κάθε ζεύγος άτομων i, j ισχύει ότι

$$|A_i \cap A_j| = (n-2)!$$

διότι τα άτομα i, j έχουν ένα τρόπο να καθίσουν, και για τα υπόλοιπα $n-2$ άτομα υπάρχουν $(n-2)!$ τρόποι να καθίσουν.

Αντίστοιχα, για κάθε τριάδα ατόμων i, j, k ισχύει ότι

$$|A_i \cap A_j \cap A_k| = (n-3)!$$

κ.ο.κ. Για κάθε m-άδα ατόμων $i_1, i_2, \ldots, i_m$ με $1 \le i_1 < i_2 < \cdots < i_m \le n$ ισχύει ότι

$$|A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \cdots \cap A_{i_m}| = (n-m)!$$

Από την αρχή εγκλεισμού-αποκλεισμού ισχύει ότι

$$\begin{aligned}
&|\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \cdots \cap \overline{A_{n-1}} \cap \overline{A_n}| \\
&= |\mathcal{E}| - S_1 + S_2 - S_3 + \cdots + (-1)^n S_n \\
&= |\mathcal{E}| - \sum_{1\le i\le n} |A_i| + \sum_{1\le i<j\le n} |A_i \cap A_j| - \sum_{1\le i<j<k\le n} |A_i \cap A_j \cap A_k| - \cdots \\
&\qquad + (-1)^m \sum_{1\le i_1<i_2<\cdots<i_m\le n} |A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \cdots \cap A_{i_m}| + \cdots + (-1)^n |A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n|.
\end{aligned}$$

Επειδή το πλήθος των ζευγών ισούται με τους συνδυασμούς $\binom{n}{2}$, το πλήθος των τριάδων ισούται με τους συνδυασμούς $\binom{n}{3}$, και γενικά, το πλήθος των m-αδων είναι ίσο με τους συνδυασμούς $\binom{n}{m}$, προκύπτει ότι

$$\begin{aligned}
&|\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \cdots \cap \overline{A_{n-1}} \cap \overline{A_n}| \\
&= n! - \binom{n}{1}(n-1)! + \binom{n}{2}(n-2)! - \binom{n}{3}(n-3)! + \cdots + (-1)^m \binom{n}{m}(n-m)! + \cdots + (-1)^n \binom{n}{n}(n-n)! \\
&= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k}(n-k)!.
\end{aligned}$$

□

2.2.1 Έλεγχος συνέπειας δεδομένων και εκτίμηση φραγμάτων

Η αρχή εγκλεισμού-αποκλεισμού μπορεί να χρησιμοποιηθεί σε ορισμένες περιπτώσεις για τον έλεγχο στατιστικών δεδομένων.

Παράδειγμα 2.2.7. *Σε μια έρευνα που συμμετείχαν 600 φοιτητές καταγράφηκαν τα παρακάτω στατιστικά δεδομένα:*

Αριθμός γυναικών	*312*
Αριθμός τελειόφοιτων	*187*
Αριθμός εργαζόμενων φοιτητών	*265*
Αριθμός τελειόφοιτων γυναικών	*24*
Αριθμός εργαζόμενων γυναικών	*90*
Αριθμός εργαζόμενων τελειόφοιτων	*49*
Αριθμός εργαζόμενων τελειόφοιτων γυναικών	*14*

Δεν είναι προφανές αν τα παράπανω στατιστικά δεδομένα είναι συνεπή ή όχι. Χρησιμοποιώντας την αρχή εγκλεισμού-αποκλεισμού θα δείξουμε ότι στην πραγματικότητα δεν είναι συνεπή!

Λύση. Έστω

E: το σύνολο όλων των φοιτητών,

A_1: το σύνολο των φοιτητών που είναι γυναίκες,

A_2: το σύνολο των τελειόφοιτων,

A_3: το σύνολο των εργαζόμενων φοιτητών.

Από την αρχή εγκλεισμού-αποκλεισμού ισχύει ότι

$$\begin{aligned}\left|\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \overline{A_3}\right| &= |E| - |A_1 \cup A_2 \cup A_3| \\ &= |E| - (|A_1| + |A_2| + |A_3| - |A_1 \cap A_2| - |A_1 \cap A_3| - |A_2 \cap A_3| + |A_1 \cap A_2 \cap A_3|) \\ &= 600 - 312 - 187 - 265 + 24 + 90 + 49 - 14 \\ &= -15.\end{aligned}$$

Άρα, τα δεδομένα που δίδονται είναι ασυνεπή. □

Με τη βοήθεια της αρχής εγκλεισμού-αποκλεισμού μπορούμε να υπολογίσουμε φράγματα για τις δυνατές τιμές των πληθαρίθμων ορισμένων συνόλων στην περίπτωση που τα δεδομένα που είναι διαθέσιμα είναι ελλιπή.

Στην παρακάτω πρόταση παρουσιάζονται μερικές ανισότητες που ισχύουν για τρία σύνολα, οι οποίες μπορούν να χρησιμοποιηθούν για το σκοπό αυτό.

Πρόταση 2.7. *Έστω $A, B, C \subseteq E$. Ισχύουν οι παρακάτω ανισότητες:*

(i) $|A \cap B| + |A \cap C| + |B \cap C| \geq |A| + |B| + |C| - |A \cup B \cup C|$.

(ii) $|A \cap B| + |A \cap C| - |B \cap C| \leq |A|$.

Απόδειξη. Από την αρχή εγκλεισμού-αποκλεισμού ισχύει ότι

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - (|A \cap B| + |A \cap C| + |B \cap C|) + |A \cap B \cap C|$$

ή, ισοδύναμα

$$|A \cup B \cup C| - (|A| + |B| + |C|) + (|A \cap B| + |A \cap C| + |B \cap C|) \geq |A \cap B \cap C| \geq 0$$

από την οποία προκύπτει ότι

$$|A \cap B| + |A \cap C| + |B \cap C| \geq |A| + |B| + |C| - |A \cup B \cup C| .$$

Επιπλέον, επειδή $|A| \geq |A \cap (B \cup C)|$ και $|A \cap B \cap C| \leq |B \cap C|$ ισχύει ότι

$$|A| \geq |A \cap (B \cup C)| = |A \cap B| + |A \cap C| - |A \cap B \cap C| \geq |A \cap B| + |A \cap C| - |B \cap C| . \qquad \square$$

Άσκηση

Εσηω E ενα σύνολο με 1000 στοιχεία και $A, B, C \subseteq E$ για τα οποία ισχυουν $|A|=400$, $|B|=370$, $|C|=600$, $|A\cap B|=180$, $|A\cap C|=250$, $|B\cap C|=200$, $|A\cap B\cap C|=80$

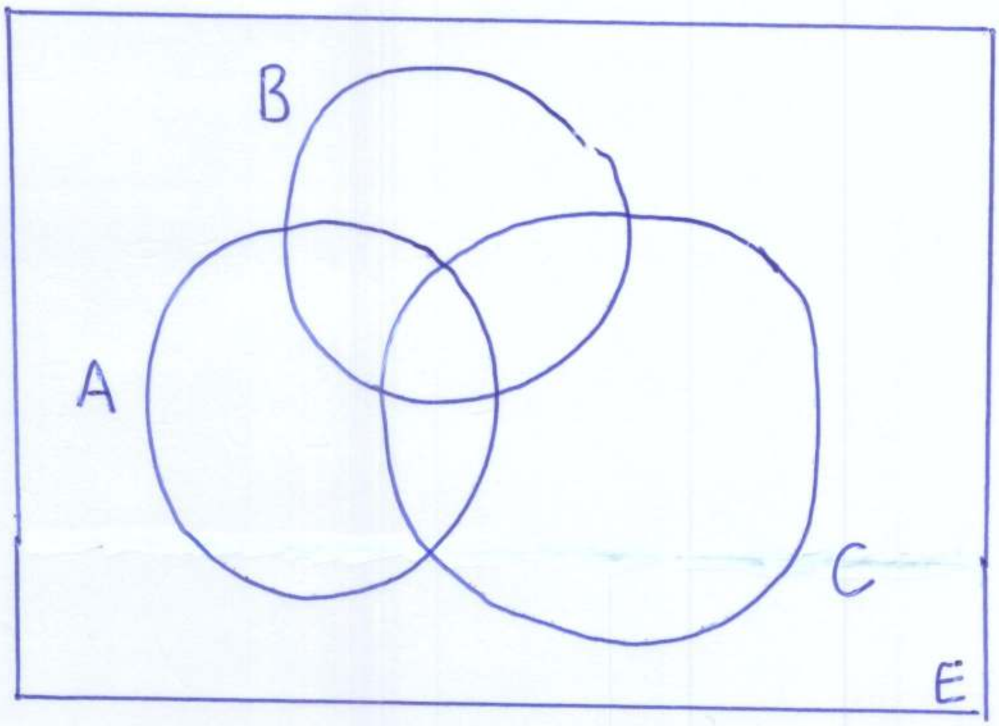
Να βρεθούν

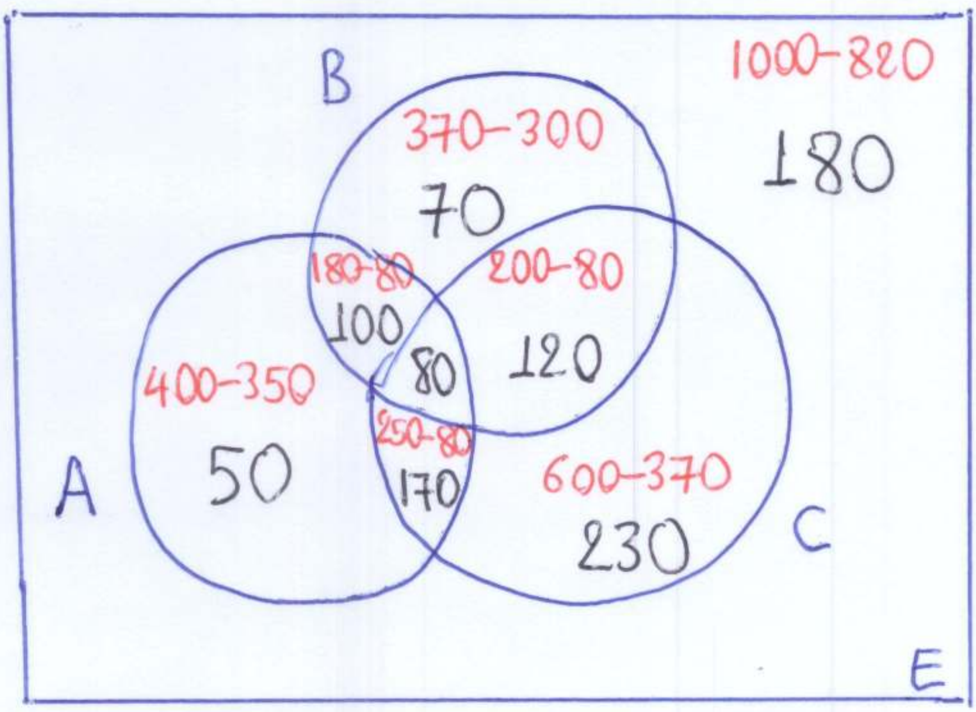
α) $|A\cup B|$ β) $|A\cup C|$ γ) $|B\cup C|$

δ) $|A\cup B\cup C|$ ε) $|\overline{A}\cap\overline{B}\cap\overline{C}|$

στ) # στοιχείων του E που ανήκουν ακριβώς σε ένα απο τα A, B, C

ζ) # στοιχείων του E που ανήκουν ακριβώς σε δύο απο τα A, B, C


B
A
C
E


B
1000-820
180
370-300
70
180-80
100
200-80
120
80
400-350
50
250-80
170
600-370
230
A
C
E

Δεν φταίει ΜΟΝΟ ο φοιτητής αν δεν περνάει τα μαθήματα διότι ο χρόνος έχει ΜΟΝΟ 365 μέρες, από τις οποίες:

1. 52 είναι Κυριακές.
   365 - 52 = 313. Άρα απομένουν 313 μέρες.
2. 50 είναι καλοκαιρινές διακοπές.
   313 – 50 = 263. Άρα απομένουν 263 μέρες.
3. 8 ώρες καθημερινού ύπνου. Συνολικά 122 μέρες.
   263 – 122 = 141. Άρα απομένουν 141 μέρες.
4. 1 ώρα καθημερινά διασκέδαση. Συνολικά 15 μέρες.
   141 – 15 = 126. Άρα απομένουν 126 μέρες.
5. 2 ώρες καθημερινά για φαγητό. Συνολικά 30 μέρες.
   126 – 30 = 96. Άρα απομένουν 96 μέρες.
6. 1 ώρα τουλάχιστον για συζήτηση. Συνολικά 15 μέρες.
   96 – 15 = 81. Άρα απομένουν 81 μέρες.
7. Ημέρες εξεταστικής τον χρόνο τουλάχιστον 35 μέρες.
   81 – 35 = 46. Άρα απομένουν 46 μέρες.
8. Γιορτές και αργίες περίπου 40 μέρες.
   46 – 40 = 6. Άρα απομένουν 6 μέρες.
9. Για αρρώστιες τουλάχιστον 5 μέρες.
   6 – 5 = 1. Άρα απομένει 1 μέρα.
10. Αυτή η μέρα που απομένει είναι τα γενέθλιά σου!
    Πώς γίνεται να διαβάσεις αυτη τη μέρα;;;
    Μέρες που απομένουν 0 !

Ύστερα από όλα αυτα, πως ειναι δυνατον να περάσει ένας φοιτητής;;;

2.2.2 Ασκήσεις προς επίλυση

1) Να βρεθεί ο $|A_1 \cup A_2|$ αν $|A_1| = 12$, $|A_2| = 18$ και:

   i) $A_1 \cap A_2 = \emptyset$, iii) $|A_1 \cap A_2| = 6$,
   ii) $|A_1 \cap A_2| = 1$, iv) $A_1 \subseteq A_2$.

2) Να βρεθεί πόσα στοιχεία περιέχονται στο σύνολο $\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \overline{A_3}$ όπου $A_1, A_2, A_3 \subseteq E$, $|E| = 500$, $|A_1| = 200$, $|A_2| = 200$, $|A_3| = 250$, $|A_1 \cap A_2| = 80$, $|A_1 \cap A_3| = 120$, $|A_2 \cap A_3| = 90$, $|A_1 \cap A_2 \cap A_3| = 50$.

3) 345 φοιτητές ενός Πανεπιστημίου επέλεξαν το μάθημα της Ανάλυσης, 212 τα Διακριτά Μαθηματικά και 188 επέλεξαν και τα δύο αυτά μαθήματα. Πόσοι επέλεξαν τουλάχιστον ένα από τα δύο μαθήματα;

4) Μια έρευνα αγοράς διαπίστωσε ότι 96% των νοικοκυριών της Αθήνας έχουν τουλάχιστον μια τηλεόραση, 98% έχουν τηλέφωνο και 95% έχουν και τα δύο. Τι ποσοστό νοικοκυριών δεν έχει κανένα από τα δύο;

5) Να βρεθεί ο $|A_1 \cup A_2 \cup A_3|$, όπου $|A_1| = |A_2| = |A_3| = 100$ και

   i) Τα σύνολα είναι ανά δύο ξένα,

   ii) Υπάρχουν 50 κοινά στοιχεία σε κάθε ζεύγος συνόλων, ενώ δεν υπάρχει κανένα κοινό στοιχείο και στα τρία σύνολα,

   iii) $A_1 = A_2 = A_3$.

6) Έστω E ένα σύνολο με 1000 στοιχεία και $A, B, C \subseteq E$ για οποία ισχύουν $|A| = 400$, $|B| = 370$, $|C| = 600$, $|A \cap B| = 180$, $|A \cap C| = 250$, $|B \cap C| = 200$, $|A \cap B \cap C| = 80$.

   Να βρεθεί πόσα από τα στοιχεία του E:

   (i) ανήκουν σε ένα τουλάχιστον από τα A, B, C,

   (ii) δεν ανήκουν σε κανένα από τα A, B, C,

   (iii) ανήκουν στο A και δεν ανήκουν στα B, C,

   (iv) ανήκουν ακριβώς σε ένα από τα A, B, C.

7) Ένα τμήμα Πληροφορικής έχει 2504 φοιτητές. Από αυτούς 1876 έχουν επιλέξει Prolog, 999 έχουν επιλέξει Java και 345 έχουν επιλέξει C++. Επιπλέον, γνωρίζουμε ότι 876 έχουν επιλέξει και Prolog και Java, 231 έχουν επιλέξει και Prolog και C++, και 290 έχουν επιλέξει και Java και C++. Αν 189 από αυτούς τους φοιτητές έχουν επιλέξει και τις τρεις γλώσσες, πόσοι δεν έχουν επιλέξει καμία από αυτές;

8) Να βρεθει, με τη χρήση της αρχής εγκλεισμού-αποκλεισμού, πόσοι πρώτοι αριθμοί είναι μικρότεροι ή ίσοι του 120;

9) Σε μια τάξη υπάρχουν συνολικά 40 μαθητές. Υπάρχουν 18 μαθητές που παίζουν σκάκι και 23 που παίζουν ποδόσφαιρο. Ορισμένοι μαθητές παίζουν μπάσκετ. Οι μαθητές που παίζουν σκάκι και ποδόσφαιρο είναι 9. Οι μαθητές που παίζουν σκάκι και μπάσκετ είναι 7, ενώ οι μαθητές που παίζουν ποδόσφαιρο και μπάσκετ είναι 12. Επίσης, 4 μαθητές ασχολούνται και με τα τρία παιχνίδια. Επιπρόσθετα, κάθε μαθητής ασχολείται τουλάχιστον με ένα παιχνίδι.

   i) Να βρεθεί πόσοι μαθητές παίζουν μπάσκετ.

ii) Να βρεθεί πόσοι μαθητές παίζουν μόνο μπάσκετ.

iii) Να βρεθεί πόσοι μαθητές παίζουν μπάσκετ και ποδόσφαιρο αλλά όχι σκάκι.

iv) Να βρεθεί πόσοι μαθητές παίζουν ακριβώς ένα παιχνίδι.

10) Σε μια έρευνα του Υπουργείου Τουρισμού ρωτήθηκαν 5000 άτομα αν έχουν επισκεφθεί την Κρήτη. Ο παρακάτω πίνακας δίνει κάποια στοιχεία της έρευνας αυτής:

	Ερωτηθέντα άτομα: 5000	Άτομα που είχαν επισκεφθεί την Κρήτη: 3620
Άνδρες	2597	2007
Άτομα άνω των 40 ετών	2957	2089
Άνδρες άνω των 40 ετών	1476	1088

Με χρήση της αρχής εγκλεισμού-αποκλεισμού να βρεθεί πόσες γυναίκες κάτω των 40 ετών δεν έχουν επισκεφθεί την Κρήτη.

11) Σε μια έρευνα σχετικά με τις εκπομπές της τηλεόρασης, 200 άτομα ρωτήθηκαν τις παρακάτω ερωτήσεις. Δίπλα σε κάθε μια, αναγράφεται ο άριθμος αυτών που απάντησαν θετικά:

i) Παρακολουθείτε τις αθλητικές εκπομπές; Απ. 50.

ii) Παρακολουθείτε τις ειδήσεις; Απ. 90.

iii) Παρακολουθείτε τα τηλεπαιχνίδια; Απ. 85.

iv) Παρακολουθείτε και τις αθλητικές εκπομπές και τις ειδήσεις; Απ. 35.

v) Παρακολουθείτε και τις αθλητικές εκπομπές και τα τηλεπαιχνίδια; Απ. 25.

vi) Παρακολουθείτε και τις ειδήσεις και τα τηλεπαιχνίδια; Απ. 45.

vii) Παρακολουθείτε και τις αθλητικές εκπομπές και τις ειδήσεις και τα τηλεπαιχνίδια; Απ. 20.

Να βρεθεί πόσοι από τους ερωτηθέντες:

1) Δεν παρακολουθούν ούτε αθλητικές εκπομπές, ούτε ειδήσεις, ούτε τηλεπαιχνίδια.

2) Παρακολουθούν αθλητικές εκπομπές και ειδήσεις αλλά όχι τηλεπαιχνίδια.

3) Παρακολουθούν μόνο αθλητικές εκπομπές.

12) Από 100 φοιτητές του Τμήματος Πληροφορικής οι οποίοι ρωτήθηκαν αν είχαν επιλέξει τα κατ' επιλογήν μαθήματα: Γραφικά υπολογιστών (Γ), Βιοπληροφορική (Β) και Κρυπτογραφία (Κ), 33 δήλωσαν ότι είχαν επιλέξει το Γ, 43 το Β, 52 το Κ, 15 τα Γ και Κ, 17 τα Β και Κ, 10 και τα τρία, 10 κανένα από τα τρία. Να βρεθεί:

(i) Πόσοι είχαν επιλέξει τα Γ και Β.

(ii) Πόσοι είχαν επιλέξει μόνο το Β.

(iii) Πόσοι είχαν επιλέξει μόνο το Κ.

13) Να βρεθεί ο αριθμός των υποσυνόλων του [1000] με 50 στοιχεία τα οποία δεν περιέχουν κανένα πολλαπλάσιο των αριθμών 2, 3 και 5.

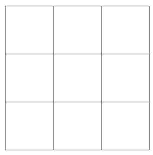
14) Να βρεθεί πόσοι φυσικοί αριθμοί από το 1 μέχρι το 1000 δεν διαιρούνται ούτε με το 2, ούτε με το 5 και δεν περιέχουν στα ψηφία τους τον αριθμό 7.

15) Για μια ομάδα 100 εθελοντών είναι γνωστές οι εξής πληροφορίες: Όλοι οι άνδρες είναι πάνω από 30 χρονών. Υπάρχουν 50 γυναίκες στην ομάδα. Υπάρχουν 60 εργαζόμενα άτομα πάνω από 30 χρονών. Υπάρχουν 25 παντρεμένες γυναίκες. Υπάρχουν 15 παντρεμένα εργαζόμενα άτομα πάνω από 30 ετών. Υπάρχουν 10 παντρεμένες γυναίκες πάνω από 30.

Με βάση τα παραπάνω στοιχεία, να απαντηθούν οι εξής ερωτήσεις:

i) Πόσα είναι τα παντρεμένα εργαζόμενα άτομα;
ii) Πόσες ανύπαντρες γυναίκες είναι πάνω από 30;
iii) Πόσοι ανύπαντροι άνδρες είναι κάτω από 30;
iv) Πόσοι άνδρες είναι παντρεμένοι;
v) Πόσα άτομα κάτω από τα 30 είναι εργαζόμενα;

16) Κάθε μοναδιαίο τετράγωνο του επόμενου σχήματος χρωματίζεται κόκκινο ή μπλε.



Με πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορεί να χρωματισθεί το παραπάνω σχήμα έτσι ώστε να περιέχει τουλάχιστον ένα κόκκινο τετράγωνο με διαστάσεις 2 επί 2;

17) Σε μια στατιστική έρευνα στην οποία συμμετείχαν 100 άτομα καταγράφηκαν 3 χαρακτηριστικά: Φύλο (Άνδρας ή Γυναίκα), Οικογενειακή κατάσταση (Παντρεμένος ή Ανύπανδρος), Εργασιακή κατάσταση (Άνεργος ή Εργαζόμενος). Γνωρίζουμε ότι συμμετείχαν 54 άνδρες, 50 εργαζόμενα άτομα και 57 παντρεμένα άτομα. Επίσης, γνωρίζουμε ότι οι παντρεμένοι άνδρες ήταν 31, τα παντρεμένα εργαζόμενα άτομα ήταν 17 και οι εργαζόμενοι άνδρες 40. Τέλος, οι παντρεμένοι εργαζόμενοι άνδρες ήταν 17. Να βρεθούν οι τύποι (συνδυασμός χαρακτηριστικών) των ατόμων που δεν συμμετείχαν στην έρευνα αυτή.

18) Να δειχθεί ότι δεν υπάρχουν σύνολα A, B, C με $|A \cup B \cup C| = 100$, $|A| = 50$, $|B| = 45$, $|C| = 34$, $|A \cap B| = 20$ και $|A \cap B \cap C| = 10$.

19) Σε μια έρευνα ζητήθηκε η γνώμη των πολιτών για κάποιο σημαντικό ζήτημα. Μαζί με τα αποτελέσματα της έρευνας, δόθηκαν και τα παρακάτω στατιστικά στοιχεία σχετικά με τα άτομα που συμμετείχαν στην έρευνα.

	Άτομα που συμμετείχαν στη έρευνα: 1000	Άτομα με πτυχίο ανώτατης σχολής: 400
Άνδρες	600	300
Άνδρες άνω των 30 ετών	300	100
Άτομα άνω των 30 ετών	700	300

Να εξετασθεί αν τα παραπάνω στατιστικά στοιχεία είναι συνεπή.

20) Σε μία στατιστική έρευνα ζητήθηκε από 100 μαθητές να συμπληρώσουν ένα ερωτηματολόγιο το οποίο μεταξύ άλλων ερευνούσε την γλωσσομάθεια των μαθητών. Όπως συνήθως, για τον έλεγχο της αξιοπιστίας των απαντήσεων, το ερωτηματολόγιο περιείχε αλληλοεπικαλυπτόμενες ερωτήσεις:

    Ερώτηση 9: Γνωρίζετε Γαλλικά; 46 μαθητές απάντησαν θετικά.

    Ερώτηση 12: Γνωρίζετε Ισπανικά; 27 μαθητές απάντησαν θετικά.

    Ερώτηση 13: Γνωρίζετε Γερμανικά; 25 μαθητές απάντησαν θετικά.

    Ερώτηση 19: Γνωρίζετε Γαλλικά και Γερμανικά; 19 μαθητές απάντησαν θετικά.

    Ερώτηση 22: Γνωρίζετε Γαλλικά και Ισπανικά; 8 μαθητές απάντησαν θετικά.

    Ερώτηση 30: Γνωρίζετε Ισπανικά και Γερμανικά; 10 μαθητές απάντησαν θετικά.

    Ερώτηση 42: Γνωρίζετε Γαλλικά, Ισπανικά και Γερμανικά; 3 μαθητές απάντησα θετικά.

    Με βάση τα παραπάνω στοιχεία, να δειχθεί ότι ορισμένοι μαθητές συμπλήρωσαν το ερωτηματολόγιο χωρίς να διαβάσουν τις ερωτήσεις.

21) Σε μία έρευνα που συμμετείχαν 100 φοιτητές καταγράφηκαν τα παρακάτω στατιστικά δεδομένα:

Αριθμός γυναικών	50
Αριθμός τελειόφοιτων	60
Αριθμός εργαζόμενων φοιτητών	55
Αριθμός μη τελειόφοιτων γυναικών	5
Αριθμός ανέργων γυναικών	30

    Να βρεθούν φράγματα για τους αριθμούς των εργαζόμενων τελειόφοιτων γυναικών και των εργαζόμενων τελειόφοιτων.

2.2.3 Παράρτημα: Απαρίθμηση απεικονίσεων επί

Πρόταση 2.8 (Αριθμός απεικονίσεων επί). *Ο αριθμός των απεικονίσεων επί από το $[n]$ στο $[k]$ είναι ίσος με*

$$\sum_{j=0}^{k}(-1)^k\binom{k}{j}(k-j)^n.$$

Απόδειξη. Έστω S το σύνολο όλων των απεικονίσεων από το $[n]$ στο $[k]$. Ισχύει ότι $|S| = k^n$.

Έστω S_j το σύνολο όλων των απεικονίσεων από το $[n]$ στο $[k] \setminus \{j\}$. Ισχύει ότι $|S_i| = (k-1)^n$.

Για κάθε ακολουθία $j_1, j_2, \ldots, j_r$ στο $[k]$, το σύνολο $S_{j_1} \cap S_{j_2} \cap \cdots \cap S_{j_r}$ είναι το σύνολο όλων των απεικονίσεων από το $[n]$ στο $[k] \setminus \{j_1, j_2, \ldots, j_r\}$. Ισχύει ότι $|S_{j_1} \cap S_{j_2} \cap \cdots \cap S_{j_r}| = (k-r)^n$. Υπάρχουν $\binom{n}{r}$ διαφορετικές τομές των S_j με r όρους.

Το ζητούμενο σύνολο των απεικονίσεων επί είναι το σύνολο $\overline{S_1} \cap \overline{S_2} \cap \cdots \overline{S_k}$.

Από την αρχή εγκλεισμού-αποκλεισμού ισχύει ότι

$$\begin{aligned}
\left|\overline{S_1} \cap \overline{S_2} \cap \cdots \overline{S_k}\right| &= |S| - \sum_{j\in[k]} |S_j| + \sum_{\substack{j_1,j_2\in[k]\\ j_1<j_2}} |S_{j_1} \cap S_{j_2}| + \cdots + (-1)^r \sum_{\substack{j_1,j_2,\ldots,j_r\\ j_1<j_2<\cdots<j_r}} |S_{j_1} \cap S_{j_2} \cap \cdots \cap S_{j_r}| + \cdots \\
&\quad + (-1)^k |S_1 \cap S_2 \cap \cdots S_k| \\
&= k^n - \binom{k}{1}(k-1)^n + \binom{k}{2}(k-2)^n + \cdots + (-1)^r\binom{k}{r}(k-r)^n + \cdots + (-1)^k\binom{k}{k}(k-k)^n \\
&= \sum_{j=0}^{k}(-1)^j\binom{k}{j}(k-j)^n.
\end{aligned}$$

□

Ασκήσεις προς επίλυση

1) Να βρεθεί ο αριθμός των τρόπων με τους οποίους μπορεί να γίνει ανάθεση 7 ατομικών εργασιών E_1, E_2, E_3, E_4, E_5, E_6, E_7 σε 4 άτομα A_1, A_2, A_3, A_4 έτσι ώστε κάθε άτομο να αναλάβει τουλάχιστον μια εργασία.

2) Επτά φοιτητές $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6, A_7$ πρέπει να αναλάβουν από μια από τις επτά εργασίες $E_1, E_2, E_3, E_4, E_5, E_6, E_7$. Ο A_1 δεν μπορεί να αναλάβει τις E_1 ή E_3, ο A_2 δεν μπορεί να αναλάβει τις E_1 ή E_5, ο A_4 δεν μπορεί να αναλάβει τις E_3 ή E_6, ο A_5 δεν μπορεί να αναλάβει τις E_2 ή E_7, ο A_7 δεν μπορεί να αναλάβει την E_4 και οι A_3 και A_6 μπορούν να αναλάβουν όλες τις εργασίες. Με πόσους τρόπους μπορεί να ανατεθούν οι επτά εργασίες στους επτά φοιτητές;