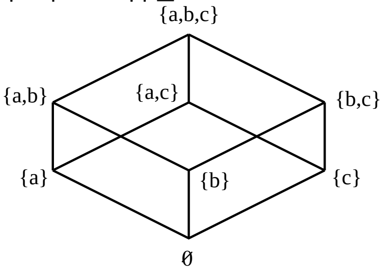
ΔΙΑΛΕΞΕΙΣ 1–2
ΑΛΓΕΒΡΑ BOOLE

- Δικτυωτά
- Δυαδική άλγεβρα Boole
  - Ορισμός - Ιδιότητες
  - Εξισώσεις - Συστήματα
  - Συναρτήσεις Boole
  - Δίπολα
  - Λογική και άλγεβρα Boole

Δικτυωτά

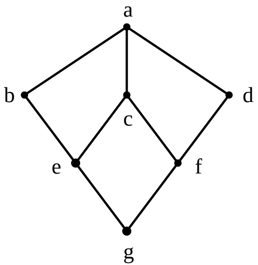
Έστω $(A, \leq)$ ένα μερικώς διατεταγμένο σύνολο.
Λέμε ότι το y **καλύπτει** το x, αν $x < y$ και δεν υπάρχει $z \in A$ με $x < z < y$.
Η σχέση αυτή ονομάζεται **σχέση κάλυψης**.
Το **διάγραμμα Hasse** ενός πεπερασμένου μερικώς διατεταγμένου συνόλου A είναι ένα σχήμα με κορυφές τα στοιχεία του A, οι οποίες συνδέονται όταν υπάρχει σχέση κάλυψης, και τέτοιο ώστε αν $x < y$ τότε το y σχεδιάζεται ``πάνω'' από το x.
Παράδειγμα : Το διάγραμμα Hasse του δυναμοσυνόλου του $\{a, b, c\}$ εφοδιασμένο με την μερική διάταξη $\subseteq$.



Αν κάθε δύο στοιχεία του A έχουν ένα μοναδικό ελάχιστο άνω φράγμα (supremum) και ένα μοναδικό μέγιστο κάτω φράγμα (infimum), τα οποία ανήκουν στο A, τότε το σύνολο λέγεται **δικτυωτό**.

Για κάθε δικτυωτό $(A, \leq)$ υπάρχει ένας φυσικός τρόπος να ορίσουμε μια δομή $(A, \vee, \wedge)$, όπου $\vee, \wedge$ είναι δύο εσωτερικές διμελείς πράξεις στο A, τέτοιες ώστε για κάθε $a, \beta \in A$ το $a \vee \beta$ (αντίστοιχα το $a \wedge \beta$) να ισούται με το supremum τους (αντίστοιχα το infimum τους).

Παράδειγμα 1 Το δικτυωτό που απεικονίζεται στο επόμενο σχήμα, για το σύνολο $A = \{a, b, c, d, e, f, g\}$.

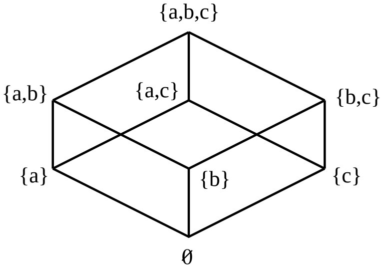


ορίζει τη δομή $(A, \vee, \wedge)$ όπου οι πράξεις $\vee, \wedge$ ορίζονται από τους παρακάτω πίνακες:

$\vee$	a	b	c	d	e	f	g
a	a	a	a	a	a	a	a
b	a	b	a	a	b	a	b
c	a	a	c	a	c	c	c
d	a	a	a	d	a	d	d
e	a	b	c	a	e	c	e
f	a	a	c	d	c	f	f
g	a	b	c	d	e	f	g

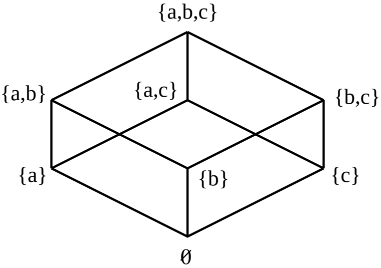
$\wedge$	a	b	c	d	e	f	g
a	a	b	c	d	e	f	g
b	b	b	e	g	e	g	g
c	c	e	c	f	e	f	g
d	d	g	f	d	g	f	g
e	e	e	e	g	e	g	g
f	f	g	f	f	g	f	g
g	g	g	g	g	g	g	g

Παράδειγμα 2 Το δικτυωτό $(\mathcal{P}(S), \subseteq)$, όπου $S = \{a, b, c\}$



Για την αντίστοιχη δομή $(\mathcal{P}(S), \vee, \wedge)$ οι πράξεις $\vee, \wedge$ είναι οι γνωστές πράξεις $\cup, \cap$ αντίστοιχα που δίνονται από τους παρακάτω πίνακες:

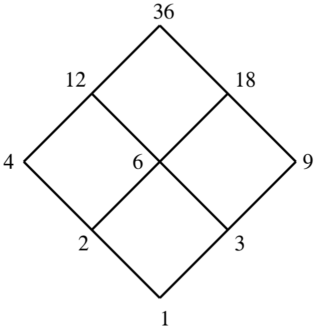
$\cap$	$\{a,b,c\}$	$\{a,b\}$	$\{a,c\}$	$\{b,c\}$	$\{a\}$	$\{b\}$	$\{c\}$	$\emptyset$
$\{a,b,c\}$	$\{a,b,c\}$	$\{a,b\}$	$\{a,c\}$	$\{b,c\}$	$\{a\}$	$\{b\}$	$\{c\}$	$\emptyset$
$\{a,b\}$	$\{a,b\}$	$\{a,b\}$	$\{a\}$	$\{b\}$	$\{a\}$	$\{b\}$	$\emptyset$	$\emptyset$
$\{a,c\}$	$\{a,c\}$	$\{a\}$	$\{a,c\}$	$\{c\}$	$\{a\}$	$\emptyset$	$\{c\}$	$\emptyset$
$\{b,c\}$	$\{b,c\}$	$\{b\}$	$\{c\}$	$\{b,c\}$	$\emptyset$	$\{b\}$	$\{c\}$	$\emptyset$
$\{a\}$	$\{a\}$	$\{a\}$	$\{a\}$	$\emptyset$	$\{a\}$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$
$\{b\}$	$\{b\}$	$\{b\}$	$\emptyset$	$\{b\}$	$\emptyset$	$\{b\}$	$\emptyset$	$\emptyset$
$\{c\}$	$\{c\}$	$\emptyset$	$\{c\}$	$\{c\}$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\{c\}$	$\emptyset$
$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$



$\cup$	$\{a,b,c\}$	$\{a,b\}$	$\{a,c\}$	$\{b,c\}$	$\{a\}$	$\{b\}$	$\{c\}$	$\emptyset$
$\{a,b,c\}$	$\{a,b,c\}$	$\{a,b,c\}$	$\{a,b,c\}$	$\{a,b,c\}$	$\{a,b,c\}$	$\{a,b,c\}$	$\{a,b,c\}$	$\{a,b,c\}$
$\{a,b\}$	$\{a,b,c\}$	$\{a,b\}$	$\{a,b,c\}$	$\{a,b,c\}$	$\{a,b\}$	$\{a,b\}$	$\{a,b,c\}$	$\{a,b\}$
$\{a,c\}$	$\{a,b,c\}$	$\{a,b,c\}$	$\{a,c\}$	$\{a,b,c\}$	$\{a,c\}$	$\{a,b,c\}$	$\{a,c\}$	$\{a,c\}$
$\{b,c\}$	$\{a,b,c\}$	$\{a,b,c\}$	$\{a,b,c\}$	$\{b,c\}$	$\{a,b,c\}$	$\{b,c\}$	$\{b,c\}$	$\{b,c\}$
$\{a\}$	$\{a,b,c\}$	$\{a,b\}$	$\{a,c\}$	$\{a,b,c\}$	$\{a\}$	$\{a,b\}$	$\{a,c\}$	$\{a\}$
$\{b\}$	$\{a,b,c\}$	$\{a,b\}$	$\{a,b,c\}$	$\{b,c\}$	$\{a,b\}$	$\{b\}$	$\{b,c\}$	$\{b\}$
$\{c\}$	$\{a,b,c\}$	$\{a,b,c\}$	$\{a,c\}$	$\{b,c\}$	$\{a,c\}$	$\{b,c\}$	$\{c\}$	$\{c\}$
$\emptyset$	$\{a,b,c\}$	$\{a,b\}$	$\{a,c\}$	$\{b,c\}$	$\{a\}$	$\{b\}$	$\{c\}$	$\emptyset$

Παρατήρηση Το παραπάνω παράδειγμα προφανώς γενικεύεται για οποιοδήποτε σύνολο S.

Παράδειγμα 3 Το δικτυωτό $(E, |)$, όπου $E = \{1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36\}$ και $|$ είναι η σχέση διαιρετότητας, φαίνεται στο παρακάτω σχήμα:



Για την $(E, \vee, \wedge)$ οι πράξεις $\vee, \wedge$ είναι οι γνωστές πράξεις ΕΚΠ (Ελάχιστο Κοινό Πολλαπλάσιο), ΜΚΔ (Μέγιστος Κοινός Διαιρέτης) αντίστοιχα.

Οι πράξεις $\vee, \wedge$ της δομής που αντιστοιχεί σε ένα δικτυωτό, αποδεικνύεται ότι έχουν τις παρακάτω ιδιότητες, για κάθε $a, b, c \in \mathcal{A}$.

$$\left.\begin{aligned} a \vee b &= b \vee a \\ a \wedge b &= b \wedge a \end{aligned}\right\} \quad \text{(αντιμεταθετικές)}$$

$$\left.\begin{aligned} a \vee (b \vee c) &= (a \vee b) \vee c \\ a \wedge (b \wedge c) &= (a \wedge b) \wedge c \end{aligned}\right\} \quad \text{(προσεταιριστικές)}$$

$$\left.\begin{aligned} a \vee a &= a \\ a \wedge a &= a \end{aligned}\right\} \quad \text{(αδύναμες)}$$

$$\left.\begin{aligned} a \vee (a \wedge b) &= a \\ a \wedge (a \vee b) &= a \end{aligned}\right\} \quad \text{(απορροφητικές)}$$

Δυαδική άλγεβρα Boole

Α. Ορισμός Έστω $\mathcal{B} = \{0, 1\}$ και οι εσωτερικές πράξεις $+, \cdot$ (αντί $\vee$, $\wedge$ αντίστοιχα) που ορίζονται ως εξής:

x	y	$x + y$	$x \cdot y$
1	1	1	1
1	0	1	0
0	1	1	0
0	0	0	0

Αποδεικνύεται ότι επιπλέον ισχύουν οι ιδιότητες

$$\left.\begin{aligned} x \cdot (y + z) &= x \cdot y + x \cdot z \\ x + y \cdot z &= (x + y) \cdot (x + z) \end{aligned}\right\} \quad \text{(επιμεριστικές)}$$

Ορίζουμε επίσης την εσωτερική μονομελή πράξη ``συμπλήρωμα'' στο $\mathcal{B}$ η οποία συμβολίζεται με $'$ (ή $\neg$) και ορίζεται ως εξής:

x	x'
1	0
0	1

Η δομή $(\mathcal{B}, +, \cdot)$ ονομάζεται **δυαδική άλγεβρα Boole**.

Παρατήρηση Ο ορισμός της δυαδικής άλγεβρας Boole επεκτείνεται (γενικεύοντας την έννοια του συμπληρώματος) και στην περίπτωση όπου το $\mathcal{B}$ έχει πάνω από δύο στοιχεία.

Β. Ιδιότητες

Στη δυαδική άλγεβρα Boole ισχύουν τα παρακάτω

$$\left.\begin{array}{l} x + y = y + x \\ x \cdot y = y \cdot x \end{array}\right\} \quad \text{(αντιμεταθετικότητα)}$$

$$\left.\begin{array}{l} x + (y + z) = (x + y) + z \\ x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z \end{array}\right\} \quad \text{(προσεταιριστικότητα)}$$

$$\left.\begin{array}{l} x + x = x \\ x \cdot x = x \end{array}\right\} \quad \text{(αδυναμία)}$$

$$\left.\begin{array}{l} x + (x \cdot y) = x \\ x \cdot (x + y) = x \end{array}\right\} \quad \text{(απορροφητικότητα)}$$

και επιπλέον

$$\left.\begin{array}{l} x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z \\ x + y \cdot z = (x + y) \cdot (x + z) \end{array}\right\} \quad \text{(επιμεριστικότητα)}$$

Ισχύουν επίσης οι παρακάτω ιδιότητες:

i. $(x')' = x$

ii. $x + 0 = x$ και $x + 1 = 1$.

iii. $x \cdot 0 = 0$ και $x \cdot 1 = x$.

iv. $x + x' = 1$ και $x \cdot x' = 0$.

v. $x + x' \cdot y = x + y$.

vi. $\left.\begin{array}{l} (x + y)' = x' \cdot y' \\ (x \cdot y)' = x' + y' \end{array}\right\}$ (τύποι De Morgan).

Οι αποδείξεις των ιδιοτήτων γίνονται με πίνακες ή χρησιμοποιώντας προηγούμενες ιδιότητες.

Παραδείγματα αποδείξεων με ιδιότητες:

$$
\begin{aligned}
&x + xy = x1 + xy = x(1 + y) = x1 = x \\
&x(x + y) = xx + xy = x + xy = x \\
&x + x'y = (x + x')(x + y) = 1(x + y) = x + y \\
&x' + xy = (x' + x)(x' + y) = 1(x' + y) = x' + y
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(vi) \qquad &(x + y)x'y' = xx'y + yx'y' = 0 + 0 = 0 \\
&(x + y) + x'y' = x + (y + x'y') = \\
&x + (y + x')(y + y') = x + y + x' = 1 + y = 1
\end{aligned}
$$

οπότε το άθροισμα $x + y$ έχει συμπλήρωμα το γινόμενο $x'y'$, δηλαδή $(x + y)' \; = \; x'y'$.

Παραδείγματα:

1. Απόδειξη της προσεταιριστικής ιδιότητας

$$x + (y + z) = (x + y) + z$$

x	y	z	$y+z$	$x+(y+z)$	$x+y$	$(x+y)+z$
1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	1	1	1	1
1	0	1	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	1
0	1	1	1	1	1	1
0	1	0	1	1	1	1
0	0	1	1	1	0	1
0	0	0	0	0	0	0

2. Απόδειξη των επιμεριστικών ιδιοτήτων

$$x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$$

x	y	z	$y+z$	$x(y+z)$	xy	xz	$xy+xz$
1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	1	1	1	0	1
1	0	1	1	1	0	1	1
1	0	0	0	0	0	0	0
0	1	1	1	0	0	0	0
0	1	0	1	0	0	0	0
0	0	1	1	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0

$$x+y\cdot z=(x+y)\cdot(x+z)$$

x	y	z	yz	$x+yz$	$x+y$	$x+z$	$(x+y)(y+z)$
1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	0	1	1	1	1
1	0	1	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	1	1
0	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	0	1	0	0
0	0	1	0	0	0	1	0
0	0	0	0	0	0	0	0

3. Απόδειξη των ιδιοτήτων iv

$$x + x' = 1 \text{ και } x \cdot x' = 0$$

x	x'	$x + x'$	xx'
0	1	1	0
1	0	1	0

4. Απόδειξη της απορροφητικής ιδιότητας $x + x \cdot y = x$:
$x + xy = x1 + xy = x(1 + y) = x1 = x.$
5. Απόδειξη της ιδιότητας v. $x' + x \cdot y = x' + y$:
$x' + xy = (x' + x)(x' + y) = 1(x' + y) = x' + y$

Γ. Εξισώσεις

Θέλουμε να βρούμε τις τιμές του x, ή των x, y, ή των $x, y, z, \ldots$ για τις οποίες επαληθεύονται οι εξισώσεις. (Φυσικά $x, y, z, \ldots \in \mathcal{B} = \{0, 1\}$.)

Παράδειγμα 1 Να λυθεί η εξίσωση

$$x'y + xy' = 0.$$

x	y	x'	$x'y$	y'	xy'	$x'y + xy'$
1	1	0	0	0	0	0
1	0	0	0	1	1	1
0	1	1	1	0	0	1
0	0	1	0	1	0	0

Άρα $\begin{cases} x = y = 1 \\ \text{ή} \\ x = y = 0. \end{cases}$

Παράδειγμα 2 Να λυθεί η εξίσωση

$$xz' + x'yz + y'z' = 1.$$

Έστω $F = xz' + x'yz + y'z'$.

x	y	z	z'	xz'	x'	yz	$x'yz$	y'	$y'z'$	$xz' + x'yz$	F
1	1	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0
1	1	0	1	1	0	0	0	0	0	1	1
1	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0
1	0	0	1	1	0	0	0	1	1	1	1
0	1	1	0	0	1	1	1	0	0	1	1
0	1	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	0
0	0	0	1	0	1	0	0	1	1	0	1

$$\text{Άρα, } \begin{cases} x = y = 1, z = 0, \text{ ή} \\ x = 1, y = z = 0, \text{ ή} \\ x = 0, y = z = 1, \text{ ή} \\ x = y = z = 0. \end{cases}$$

Παράδειγμα 3 Να λυθεί (και διερευνηθεί) η εξίσωση

$$ax + bx' = 0, \text{ όπου } a, b \in \mathcal{B}.$$

a	b	$ax + bx'$	
1	1	$x + x'$ (=1)	$\rightarrow$ Άρα αδύνατη.
1	0	x	$\rightarrow$ Άρα $x = 0$.
0	1	x'	$\rightarrow$ Άρα $x' = 0$, (δηλαδή $x = 1$).
0	0	0	$\rightarrow$ Άρα ταυτότητα, δηλαδή ισχύει για κάθε x, (δηλαδή ισχύει για $x = 0$ και για $x = 1$).

Δ. Συστήματα

Να λυθεί το σύστημα $\left\{ \begin{array}{ll} x' + xy' & = 1 \\ x + xy & = 0 \end{array} \right\}$.

x	y	x'	y'	xy'	xy	$x' + xy'$	$x + xy$
1	1	0	0	0	1	0	1
1	0	0	1	1	0	1	1
0	1	1	0	0	0	1	0
0	0	1	1	0	0	1	0

Άρα $(x, y) = (0, 1)$ ή $(x, y) = (0, 0)$.

Ε. Συναρτήσεις Boole

Κάθε συνάρτηση $f : \mathcal{B}^n \to \mathcal{B}$ λέγεται **συνάρτηση Boole**.

Παράδειγμα 1

$$f : \mathcal{B}^2 \to \mathcal{B} \text{ με } f(x, y) = xy' + x'y.$$

Η f παίρνει τις τιμές:

$f(1, 1) = 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 = 0 + 0 = 0,$
$f(1, 0) = 1 \cdot 1 + 0 \cdot 0 = 1 + 0 = 1,$
$f(0, 1) = 0 \cdot 0 + 1 \cdot 1 = 0 + 1 = 1,$
$f(0, 0) = 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0 = 0 + 0 = 0,$
ή (με πίνακα)

x	y	y'	xy'	x'	$x'y$	f
1	1	0	0	0	0	0
1	0	1	1	0	0	1
0	1	0	0	1	1	1
0	0	1	0	1	0	0

Παράδειγμα 2

$$f : \mathcal{B}^3 \to \mathcal{B} \text{ με } f(x, y, z) = xy + z'.$$

Η f παίρνει τις τιμές:

$f(1, 1, 1) = 1 \cdot 1 + 0 = 1 + 0 = 1.$

$f(1, 1, 0) = 1 \cdot 1 + 1 = 1 + 1 = 1.$

$f(1, 0, 1) = 1 \cdot 0 + 0 = 0 + 0 = 0.$ κ.λπ.

E.1 Απλοποίηση συναρτήσεων Boole

Παράδειγμα 1 Να απλοποιηθεί η συνάρτηση

$$f(x, y, z, w) = (x' + y)(z' + w)(y' + w')z$$

Ισχύει ότι

$$\begin{aligned} f(x, y, z, w) &= (x' + y)(z' \cdot z + w \cdot z)(y' + w') \\ &= (x' + y)(0 + wz)(y' + w') \\ &= (x' + y)(y'wz + wzw') \\ &= (x' + y)(y'wz + 0) \\ &= x'y'wz + yy'wz \\ &= x'y'wz. \end{aligned}$$

Παράδειγμα 2 Να απλοποιηθεί η συνάρτηση

$$f(x,y,z,w) = xy' + yz + z'w + x'y'z.$$

Ισχύει ότι

$$\begin{aligned}
f(x,y,z,w) &= y'(x + x'z) + yz + z'w \\
&= y'(x + z) + yz + z'w \text{ (ιδιότητα v.)} \\
&= y'x + y'z + yz + z'w \\
&= y'x + (y' + y)z + z'w \\
&= y'x + z + z'w \\
&= y'x + z + w \text{ (ιδιότητα v.)} \\
&= xy' + z + w.
\end{aligned}$$

Παράδειγμα 3 Να απλοποιηθεί η συνάρτηση

$$f(x, y, z) = x'yz + xy'z + xyz' + xyz$$

Ισχύει ότι

$$\begin{aligned}
f(x, y, z) &= x'yz + xy'z + xy(z' + z) \\
&= x'yz + xy'z + xy \\
&= (x'z + x)y + xy'z \\
&= (x + z)y + xy'z \\
&= xy + zy + xy'z \\
&= xy + z(y + xy') \\
&= xy + z(y + x) \\
&= xy + zy + xz.
\end{aligned}$$

E.2 Εύρεση τύπου συνάρτησης από τον πίνακα τιμών

Όταν δίδεται ο πίνακας των τιμών μιας συνάρτησης Boole και ζητείται ο τύπος της, τότε εφαρμόζονται οι ακόλουθοι δύο αλγόριθμοι.

Αλγόριθμος κανονικής διαζευκτικής μορφής DNF:

B_0: Διάβασε τον πίνακα τιμών της συνάρτησης.

B_1: Για κάθε γραμμή με $f = 1$ σχημάτισε το γινόμενο $x_1^* x_2^* \cdots x_n^*$ με

$$x_i^* = \begin{cases} x_i & \text{όταν } x_i = 1 \\ x_i' & \text{όταν } x_i = 0 \end{cases}$$

B_2: Πρόσθεσε τα προηγούμενα γινόμενα.

Έτσι, από τον πίνακα

x	y	z	f
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	1
1	0	0	0
0	1	1	0
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	0

προκύπτει η ακόλουθη συνάρτηση

$$f = x'y'z + x'yz' + xy'z = (x' + x)y'z + x'yz' = y'z + x'yz'.$$

Αλγόριθμος κανονικής συζευκτικής μορφής CNF:

B_0: Διάβασε τον πίνακα τιμών της συνάρτησης.

B_1: Για κάθε γραμμή με $f = 0$ σχημάτισε το άθροισμα $x_1^* + x_2^* + \cdots + x_n^*$ με

$$x_i^* = \begin{cases} x_i & \text{όταν } x_i = 0 \\ x_i' & \text{όταν } x_i = 1 \end{cases}$$

B_2: Πολλαπλασίασε τα προηγούμενα αθροίσματα.

Έτσι, από τον πίνακα

x	y	z	f
1	1	1	0
1	1	0	1
1	0	1	0
1	0	0	0
0	1	1	1
1	0	1	1
0	1	0	0
0	0	0	1

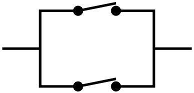
προκύπτει η ακόλουθη συνάρτηση

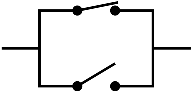
$$f = (x' + y' + z')(x' + y + z')(x' + y + z)(x + y' + z).$$

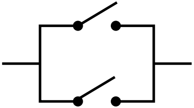
ΣΤ. Εφαρμογές

ΣΤ.1. Διακόπτες

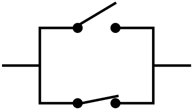
Διακόπτες 'παράλληλοι' $\longrightarrow$ **+**





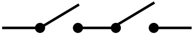


$1 + 1 = 1 \qquad 1 + 0 = 1 \qquad 0 + 0 = 0$

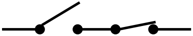


$0 + 1 = 1$

Διακόπτες 'σε σειρά' $\longrightarrow \cdot$



$1 \cdot 1 = 1 \qquad 1 \cdot 0 = 0 \qquad 0 \cdot 0 = 0$

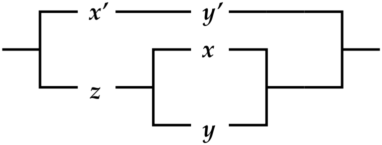


$0 \cdot 1 = 0$

ΣΤ.2. Δίπολα

Σε κάθε συνάρτηση Boole αντιστοιχεί ένα δίπολο και αντίστροφα:

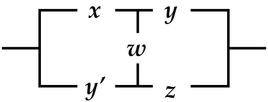
Στο δίπολο



αντιστοιχεί η συνάρτηση

$$f(x, y, z) = x'y' + z(x + y).$$

Στο δίπολο



αντιστοιχεί η συνάρτηση

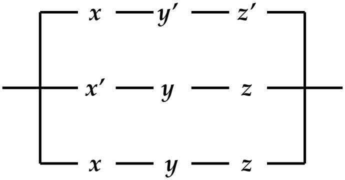
$$
\begin{aligned}
f(x, y, z, w) &= xy + xwz + y'wy + y'z \\
&= xy + xwz + y'yw + y'z \\
&= xy + xwz + 0w + y'z \\
&= xy + xwz + y'z.
\end{aligned}
$$

Αντίστροφα:

Στη συνάρτηση

$$f(x,y,z) = xy'z' + x'yz + xyz$$

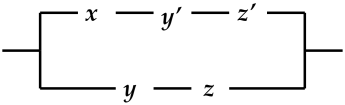
αντιστοιχεί το δίπολο



Αλλά

$$\begin{aligned} f(x,y,z) &= xy'z' + (x' + x)yz \\ &= xy'z' + 1 \cdot yz \\ &= xy'z' + yz, \end{aligned}$$

οπότε παίρνουμε το αντίστοιχο (απλούστερο) δίπολο



ΣΤ.3. Λογική και άλγεβρα Boole

Η σχέση Λογικής και Άλγεβρας Boole περιγράφεται από την ακόλουθη βασική πρόταση

Πρόταση Η άλγεβρα των λογικών προτάσεων είναι μια δυαδική άλγεβρα του Boole.

Πραγματικά, αν για κάθε άτομο αντιστοιχεί μια μεταβλητή της άλγεβρας Boole και για κάθε λογική πράξη αντιστοιχεί μια συνάρτηση της άλγεβρας Boole, έτσι ώστε για κάθε αληθή πρόταση η αντίστοιχη συνάρτηση να λαμβάνει την τιμή 1 και για κάθε ψευδή πρόταση η αντίστοιχη συνάρτηση να λαμβάνει την τιμή 0 τότε:

1. Από τους πίνακες

p	$\neg p$
Α	Ψ
Ψ	Α

x	x'
1	0
0	1

$$f = x'$$

προκύπτει ότι η άρνηση αντιστοιχεί στο συμπλήρωμα.

2. Από τους πίνακες

p	q	$p \vee q$
Α	Α	Α
Α	Ψ	Α
Ψ	Α	Α
Ψ	Ψ	Ψ

x	y	f
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

$$f = x + y$$

προκύπτει ότι η διάζευξη αντιστοιχεί στην πρόσθεση.

3. Από τους πίνακες

p	q	$p \wedge q$
Α	Α	Α
Α	Ψ	Ψ
Ψ	Α	Ψ
Ψ	Ψ	Ψ

x	y	f
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

$$f = xy$$

προκύπτει ότι η σύζευξη αντιστοιχεί στον πολλαπλασιασμό.

4. Από τους πίνακες

p	q	$p \to q$
Α	Α	Α
Α	Ψ	Ψ
Ψ	Α	Α
Ψ	Ψ	Α

x	y	f
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

προκύπτει ότι στη συνεπαγωγή αντιστοιχεί, σύμφωνα με τον αλγόριθμο της κανονικής συζευκτικής μορφής, η συνάρτηση $f = x' + y$.

5. Από τους πίνακες

p	q	$p \leftrightarrow q$
Α	Α	Α
Α	Ψ	Ψ
Ψ	Α	Ψ
Ψ	Ψ	Α

x	y	f
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

προκύπτει ότι στην ισοδυναμία αντιστοιχεί, σύμφωνα με τον αλγόριθμο της κανονικής συζευκτικής μορφής, η συνάρτηση $f = xy + x'y'$.

Αρχές Λογικής

Αρχή της διπλής άρνησης

Η $(x')' = x$ αντιστοιχεί στην $\sim(\sim p) \leftrightarrow p$.

Αρχή της του τρίτου αποκλείσεως

Η $x + x' = 1$ δίνει ότι $p \vee \sim p :$ Αληθής.

Αρχή της αντίφασης

Η $xx' = 0$ δίνει ότι $p \wedge \sim p :$ Ψευδής.

΄Ελεγχος προτάσεων

1. Ζητείται να μελετηθεί η ακόλουθη απάντηση ενός ύποπτου: ``Θα σας έλεγα την αλήθεια αν και μόνον αν είχα κάνει εγώ την πράξη''. Έστω οι προτάσεις $p$: ``λέω την αλήθεια'' και q: ``έκανα την πράξη''. Ο ύποπτος λέει την αλήθεια αν και μόνο αν αληθεύει η ακόλουθη σύνθετη πρόταση $p \leftrightarrow (p \leftrightarrow q)$. Αντιστοιχίζοντας τις μεταβλητές $x, y \in \mathcal{B}$ στις προτάσεις p και q όταν αυτές αληθεύουν, τότε στην προηγούμενη σύνθετη πρόταση αντιστοιχεί η ακόλουθη συνάρτηση:

$$f = x(xy + x'y') + x'(xy + x'y')'$$

από την οποία προκύπτει

$$\begin{aligned} f &= xy + x'(xy)'(x'y')' \\ &= xy + x'(x' + y')(x + y) \\ &= xy + (x' + x'y')(x + y) \\ &= xy + x'y \\ &= (x + x')y \\ &= y \end{aligned}$$

οπότε ο ύποπτος είναι και ο δράστης.

2. Ζητείται να μελετηθεί η διαδικασία του τρόπου επιλογής μεταξύ τριών αντικειμένων α, β, γ όταν:
   1. Δεν μπορούν να επιλεχθούν και τα τρία.
   2. Αν επιλεχθεί το γ, τότε θα επιλεχθεί και το α.
   3. Αν δεν επιλεχθεί το β, τότε δεν θα επιλεχθεί και το α.
   4. Αν δεν επιλεχθεί το γ, τότε δεν θα επιλεχθεί και το α.

   Έστω οι προτάσεις

   p: ``επιλέγεται το α''.

   q: ``επιλέγεται το β'',

   r: ``επιλέγεται το γ''

   τότε στις προηγούμενες προτάσεις αντιστοιχούν τα εξής:
   1. $\neg(p \wedge q \wedge r) \models\!\mid \neg p \vee \neg q \vee \neg r$.
   2. $r \to p \models\!\mid \neg r \vee p$
   3. $\neg q \to \neg p \models\!\mid q \vee \neg p$
   4. $\neg r \to \neg p \models\!\mid r \vee \neg p$.

   και στο σύνολό τους η σύνθετη πρόταση

$$(\neg p \vee \neg q \vee \neg r) \wedge (\neg r \vee p) \wedge (q \vee \neg p) \wedge (r \vee \neg p)$$

Αντιστοιχίζοντας τις μεταβλητές $x, y, z \in \mathcal{B}$ στις προτάσεις p, q, r όταν αυτές αληθεύουν, τότε στην προηγούμενη σύνθετη πρόταση αντιστοιχεί η ακόλουθη συνάρτηση:

$$f = (x' + y' + z')(z' + x)(y + x')(z + x')$$

από την οποία προκύπτει

$$\begin{aligned} f &= (x' + y' + z')(z' + x)(z + x')(y + x') \\ &= (x' + y' + z')(xz + x'z')(y + x') \\ &= (xy'z + x'z' + x'y'z' + x'z')(y + x') \\ &= (xy'z + x'z' + x'y'z')(y + x') \\ &= x'yz' + x'z' + x'y'z' \\ &= x'z'(y + 1 + y') = x'z'(y + y') \\ &= x'yz' + x'y'z' \end{aligned}$$

οπότε επιλέγεται το β ή τίποτε[1].

[1]Το ίδιο αποτέλεσμα προκύπτει και με τη βοήθεια των πινάκων αληθείας των προτάσεων 1–4.

3. Ζητείται να μελετηθεί το σύνολο των προτάσεων p_1, p_2, p_3, p_4 για τις οποίες ισχύουν τα ακόλουθα:
   1. Αν η p_1 είναι αληθής τότε και η p_2 είναι αληθής.
   2. Δεν είναι ταυτόχρονα η p_3 είναι αληθής και η p_4 ψευδής.
   3. Οι p_2 και p_4 ουδέποτε συναληθεύουν.
   4. Η p_3 είναι αληθής.

   Αντιστοιχίζοντας τις μεταβλητές $x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathcal{B}$ στις προτάσεις p_1, p_2, p_3, p_4 όταν αυτές αληθεύουν, τότε στις προηγούμενες προτάσεις 1–4, αντιστοιχούν οι ακόλουθες συναρτήσεις
   1. $x_1' + x_2$ γιατί πρόκειται για συνεπαγωγή.
   2. $(x_3x_4')'$ γιατί πρόκειται για την άρνηση της πρότασης ``Η p_3 είναι αληθής και η p_4 είναι ψευδής'', στην οποία αντιστοιχεί το γινόμενο x_3x_4'.
   3. $(x_2x_4)'$ γιατί πρόκειται για την άρνηση της πρότασης ``οι προτάσεις p_2 και p_4 συναληθεύουν'', στην οποία αντιστοιχεί το γινόμενο x_2x_4.
   4. x_3 γιατί η p_3 είναι αληθής.

   και στο σύνολό τους η συνάρτηση

$$f = (x_1' + x_2)(x_3x_4')'(x_2x_4)'x_3$$

από την οποία προκύπτει ότι

$$\begin{aligned} f &= (x_1' + x_2)(x_3' + x_4)(x_2' + x_4')x_3 \\ &= (x_1' + x_2)(x_2' + x_4')(x_3' + x_4)x_3 \\ &= (x_1'x_2' + x_1'x_4' + x_2'x_4')x_4x_3 \\ &= x_1'x_2'x_4x_3 \end{aligned}$$

οπότε οι προτάσεις p_1, p_2 είναι ψευδείς, ενώ οι προτάσεις p_3, p_4 είναι αληθείς.

Επίλυση προβλημάτων άλγεβρας Boole με χρήση Python

Να λυθεί το σύστημα της Άλγεβρας Boole:

$$\begin{cases} x + ay + b & = 1 \\ bx + ay & = 0 \\ x + bz' & = 1 \end{cases}$$

όπου $a, b, x, y, z \in \{0, 1\}$.
Ισοδύναμα, θεωρούμε την συνάρτηση $f = (x + ay + b)(bx + ay)'(x + bz')$ και αναζητούμε για ποιες πεντάδες (a, b, x, y, z) γίνεται ίση με 1, δηλαδή για ποιες πεντάδες ικανοποιείται η αντίστοιχη λογική έκφραση.

```
import sympy as sm
from pyeda.inter import *

a,b,x,y,z = sm.symbols('a,b,x,y,z')
ex1 = (x | a & y | b & z) & ( ~ (b & x | a & y)) & (x | b & ~z)
print("Find all assignments satisfying:\n", ex1)
print("Simplified expression (CNF):", sm.simplify_logic(ex1))
print("Simplified expression (DNF):", sm.simplify_logic(ex1, form = '
    dnf'))
print("\nSatisfying assignments:") #using pyeda
a, b, x, y, z = map(exprvar, 'abxyz')
ex1 = expr(str(ex1)) #(x | a & y | b & z) & ( ~ (b & x | a & y)) & (x
    | b & ~z)
it = ex1.satisfy_all()
for i in it: print(i)
es = ex1.to_dnf()
print("\nTruth table for %s:\n%s"%(es, expr2truthtable(es)))
```

Output:

```
Find all assignments satisfying:
 (x | (b & ~z)) & ~((a & y) | (b & x)) & (x | (a & y) | (b & z))
Simplified expression (CNF): x & ~b & (~a | ~y)
Simplified expression (DNF): (x & ~a & ~b) | (x & ~b & ~y)

Satisfying assignments:
{x: 1, b: 0, a: 0}
{y: 0, x: 1, b: 0, a: 1}

Truth table for Or(And(~b, x, ~y), And(~a, ~b, x)):
y x b a
0 0 0 0 : 0
0 0 0 1 : 0
0 0 1 0 : 0
0 0 1 1 : 0
0 1 0 0 : 1
0 1 0 1 : 1
0 1 1 0 : 0
0 1 1 1 : 0
1 0 0 0 : 0
1 0 0 1 : 0
1 0 1 0 : 0
1 0 1 1 : 0
1 1 0 0 : 1
1 1 0 1 : 0
1 1 1 0 : 0
1 1 1 1 : 0
```

Ασκήσεις προς επίλυση

1. Στο σύνολο $\mathbb{N}^*$ ορίζεται η μερική διάταξη $\mid$ (διαιρετότητα), με $x \mid y$ αν και μόνο αν ο x διαιρεί τον y. Αν E είναι το σύνολο των διαιρετών του 24, να δειχθεί ότι το $(E, \mid)$ είναι ένα δικτυωτό, για το οποίο να δοθεί και το αντίστοιχο σχήμα.
2. Στο σύνολο $\mathbb{N}^2$ ορίζεται η μερική διάταξη $\leq$ (**διάταξη γινόμενο**), με
$$(x_1, y_1) \leq (x_2, y_2) \text{ αν και μόνο αν } x_1 \leq x_2 \text{ και } y_1 \leq y_2.$$
Αν $E = \{(1,1), (1,2), (1,3), (2,1), (2,2), (2,3)\}$, να δειχθεί ότι το $(E, \leq)$ είναι ένα δικτυωτό, για το οποίο να δοθεί και το αντίστοιχο σχήμα.
3. Να αποδειχθούν οι ιδιότητες v και vi (De Morgan) της Άλγεβρας Boole.
4. Με χρήση των ιδιοτήτων, να απλοποιηθούν οι παραστάσεις:
    1. $xy' + yz + z'w + x'y'z$.
    2. $x(x' + y)(z' + w)z$.
    3. $x(x + yz'w) + w(x + x'y'z)$.
    4. $(x' + yz')(xw + yz)(y + z')$.
    5. $y'(u + uw)(x + z) + y'u + yz(y + x + u(u + x))$.

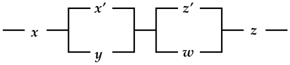
5. Να λυθούν οι εξισώσεις της Άλγεβρας Boole:
    1. $x' + xy' = 1$.
    2. $xy' + x'y + yz' = 0$.
    3. $xyz' + x'yz + xyz = 1$.
6. Να λυθούν οι εξισώσεις της Άλγεβρας Boole:
    1. $ax + by = 1$.
    2. $ax + by = x$.
    3. $ax' + y = b$.
    4. $x + y' + a = x + x'y + bx$.
    5. $ax' = by$.

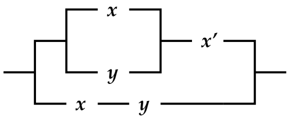
    όπου x, y είναι οι άγνωστοι και a, b είναι παράμετροι.
7. Να λυθούν οι εξισώσεις της Άλγεβρας Boole:
    1. $ax + y = bz + y$.
    2. $a(x + y) = z + b$.
    3. $abx + y + z = bz$.
    4. $x + byz = ax' + yz$.

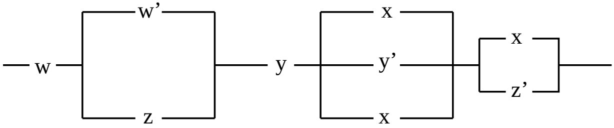
    όπου x, y, z είναι οι άγνωστοι και a, b είναι παράμετροι.

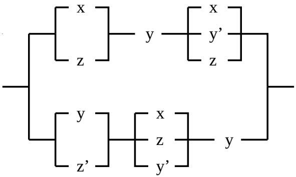
8. Να λυθούν τα συστήματα της Άλγεβρας Boole:
   1. $$\begin{cases} x' + xy' = 1 \\ x + xy = 0. \end{cases}$$
   2. $$\begin{cases} y + x'y + z = 1 \\ y' + xz + y'z = 0. \end{cases}$$
   3. $$\begin{cases} x' + xy' + y' = 0 \\ y + x'y + x = 1. \end{cases}$$
9. Να λυθούν τα συστήματα της Άλγεβρας Boole:
   1. $$\begin{cases} (a+b)x + y = a \\ ax + aby = b \end{cases}$$
   2. $$\begin{cases} x + y + z = x + y' \\ a + yz = b + yz \end{cases}$$
   3. $$\begin{cases} x + ay + bz = 1 \\ bx + ay = 0 \\ x + bz' = 1 \end{cases}$$

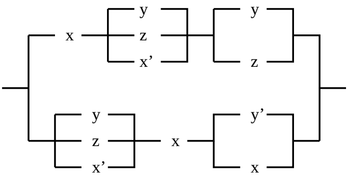
   όπου x, y, z είναι οι άγνωστοι και a, b είναι παράμετροι.
10. Να δειχθεί ότι αριθμός των συναρτήσεων Boole με n μεταβλητές ισούται με 2^{2^n}.

11. Να βρεθούν τα δίπολα που αντιστοιχούν στις συναρτήσεις:
    1. $f(x, y, z) = (x + y)z + x'y'z'$.
    2. $f(x, y, z) = xyz + x'yz + xy'z'$.
    3. $f(x, y, z) = (xyz)' + (x' + yz)'$.
    4. $f(x, y, z) = (x + z + (x + y(x + yz)')')'$.
12. Να απλοποιηθούν τα παρακάτω δίπολα
    1. 

    2. 

    3. 

4. 

5. 

13. Για την ασφάλεια ενός γραφείου ισχύουν οι ακόλουθες οδηγίες:
    i) Τα φώτα του γραφείου θα παραμένουν ανοιχτά την νύχτα, όταν δεν υπάρχει υπάλληλος στο γραφείο και δεν λειτουργεί το κλειστό κύκλωμα παρακολούθησης
    ii) Το κλειστό κύκλωμα παρακολούθησης θα λειτουργεί, αν και μόνον αν δεν υπάρχει υπάλληλος στο γραφείο ή υπάρχει σ᾽ αυτό ένα μεγάλο χρηματικό ποσό.

Ζητείται να μελετηθούν οι οδηγίες.

Υπόδειξη: Να γίνει χρήση των ακόλουθων τριών προτάσεων.

p: Δεν υπάρχει υπάλληλος στο γραφείο.

q: Το κλειστό κύκλωμα παρακολούθησης λειτουργεί.

r: Στο γραφείο υπάρχει ένα μεγάλο χρηματικό ποσό.

14. Για την συγκρότηση μιας επιτροπής, με μέλη από τους α, β, γ, δ, ϵ, ισχύουν οι ακόλουθες προϋποθέσεις:
    1. Είτε ο α, είτε ο β πρέπει να είναι μέλη, αλλά όχι και οι δύο.
    2. Είτε ο γ, είτε ο ϵ, είτε και οι δύο πρέπει να είναι μέλη.
    3. Είτε οι α και γ είναι μέλη, είτε κανείς τους.
    4. Αν είναι μέλος ο δ, τότε πρέπει να είναι και ο β.
    5. Αν είναι μέλος ο ϵ, τότε πρέπει να είναι μέλη και οι γ και δ.

    Ζητείται να ευρεθούν τα μέλη της επιτροπής.