Σήμερα: Ασκήσεις για Σύνολα, Σχέσεις, Απεικονίσεις

Σύνολα - Σχέσεις - Απεικονίσεις

Μαθηματικά των Υπολογιστών

2024–2025

Σύνολα

Άσκηση 1 (Ταυτότητες συνόλων)

Έστω E ένα μη κενό σύνολο και $A, B, C \subseteq E$. Να δειχθεί ότι

i) $A \setminus B = A \cap \overline{B}$. *(Τύπος διαφοράς συνόλων.)*

ii) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$. *(Κανόνας De Morgan για το συμπλήρωμα της ένωσης.)*

iii) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$. *(Επιμεριστική ιδιότητα της τομής ως προς την ένωση.)*

iv) $A = (A \cap B) \cup (A \cap \overline{B})$. *(Διαμέριση του A ως προς την τομή του με τα B και $\overline{B}$.)*

v) $A \cap (B \setminus C) = (A \cap B) \setminus (A \cap C)$. *(Επιμεριστική ιδιότητα της τομής ως προς την διαφορά.)*

Τρόποι απόδειξης της ταυτότητας : $A, B \subseteq E$

$$\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$$ (Κανόνας De Morgan)

<u>1ος τρόπος</u> : Με χρήση ισοδυναμίας

Έστω $x \in \overline{A \cup B}$. Τότε έχουμε ισοδύναμα

$$x \in \overline{A \cup B} \iff x \notin A \cup B \quad (x \in \bar{A} \iff x \notin A)$$

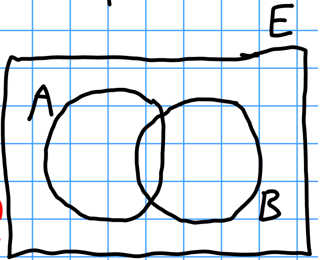
$$\iff x \notin A \text{ και } x \notin B$$

$$\iff x \in \bar{A} \text{ και } x \in \bar{B}$$

$$\iff x \in \bar{A} \cap \bar{B}$$

Επειδή έχουμε χρησιμοποιήσει παντού ισοδυναμίες τα συνολα $\overline{A\cup B}$ και $\bar{A}\cap\bar{B}$ εχουν τα ιδια στοιχεια, αρα ειναι ισα.

<u>2ος τρόπος</u>: Χρησιμοποιωντας πινακες περιπτωσεων (πινακες αληθειας)



Για $x\in E$ υπάρχουν $2^2=4$ διαφορετικες περιπτωσεις ως προς την σχεση του με τα A, B

$x\in A$ $\quad$ $x\in B$
$x\notin A$ $\quad$ $x\notin B$

1: Το x ΑΝΗΚΕΙ ΣΤΟ ΣΥΝΟΛΟ
0: Το x ΔΕΝ ΑΝΗΚΕΙ -||-

A	B	$A\cup B$	$\overline{A\cup B}$	$\bar{A}$	$\bar{B}$	$\bar{A}\cap\bar{B}$
1	1	1	0	0	0	0
1	0	1	0	0	1	0
0	1	1	0	1	0	0
0	0	0	1	1	1	1

Επειδή σε καθε μια απο τις 4 περιπτωσεις τα συνολα $\overline{A \cup B}$ και $\bar{A} \cap \bar{B}$ περιεχουν τα ιδια x. (Οι αντιστοιχες στηλες ειναι ισες) η ταυτοτητα ισχυει

Σχόλιο: Αν σε μια ταυτοτητα εμφανιζονται 2 συνολα ο πινακας εχει $2^2 = 4$ γραμμες (περιπτωσεις)

Αν σε μια ταυτοτητα εμφανιζονται 3 συνολα ο πινακας εχει $2^3 = 8$ γραμμες (περιπτωσεις)

A, B, C $\quad$ $x \in A$ ή $x \notin A$
$x \in B$ ή $x \notin B$
$x \in C$ ή $x \notin C$

Γενικότερα, αν σε μια ταυτοτητα εμφανιζονται n σύνολα (n σταθερα) τότε χρειάζονται 2^n γραμμες

3ος τρόπος: Χρησιμοποιώντας την μέθοδο του διπλού εγκλεισμού

Όταν θέλουμε να δείξουμε ότι $A = B$ αρκεί να δείξουμε ότι $A \subseteq B$ και $B \subseteq A$

Εδώ δουλεύουμε με συνεπαγωγές και όχι ισοδυναμίες

Θα δείξουμε ότι $\overline{A \cup B} \subseteq \bar{A} \cap \bar{B}$

$x \in \overline{A \cup B} \Rightarrow x \notin A \cup B \Rightarrow x \notin A$ και $x \notin B$

$\Rightarrow x \in \bar{A}$ και $x \in \bar{B} \Rightarrow x \in \bar{A} \cap \bar{B}$

Άρα, $\overline{A \cup B} \subseteq \bar{A} \cap \bar{B}$ (*)

Επίσης, θα δείξουμε $\bar{A} \cap \bar{B} \subseteq \overline{A \cup B}$

$x \in \overline{A} \cap \overline{B} \Rightarrow x \in \overline{A}$ και $x \in \overline{B} \Rightarrow x \notin A$ και $x \notin B$

$\Rightarrow x \notin A \cup B \Rightarrow x \in \overline{A \cup B}$

Άρα, $\overline{A} \cap \overline{B} \subseteq \overline{A \cup B}$ $(**)$

Άρα, από $(*)$ και $(**)$ έχουμε ότι

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$$

Ερώτηση:

Πως μπορούμε να αποδείξουμε για ταυτότητα η οποία περιέχει n αριθμό συνόλων (n μεταβλητός φυσικός αριθμός)

Παράδειγμα

Ταυτότητα De Morgan για το συμπλήρωμα της ένωσης n συνόλων

$$\overline{A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n} = \bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 \cap \cdots \cap \bar{A}_n \qquad n \geq 2$$

Ένας τρόπος απόδειξης είναι με επαγωγή ως προς το n

Για $n=2$ έχουμε να δείξουμε ότι

$$\overline{A_1 \cup A_2} = \bar{A}_1 \cap \bar{A}_2$$

Αυτό αποδεικνύεται με μία από τις 3 μεθόδους

Άρα, για $n=2$ η ταυτότητα ισχύει.

Για οποιαδήποτε 2 σύνολα A, B έχουμε

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B} \qquad (1)$$

Έστω ότι η ταυτότητα ισχύει για k σύνολα για κάποιο $k \geq 2$

$$\overline{A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_k} = \overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \cdots \cap \overline{A_k} \qquad (2)$$

Θα δείξουμε ότι η ταυτότητα ισχύει για $k+1$ σύνολα δηλαδή

$$\overline{A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_k \cup A_{k+1}} = \overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \cdots \cap \overline{A_k} \cap \overline{A_{k+1}}$$

Ξεκινάμε από το αριστερό μέλος

$$\overline{A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_k \cup A_{k+1}}$$

Θέτουμε

$$A = A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_k \quad \text{και} \quad B = A_{k+1}$$

οπότε

$$\overline{A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_k \cup A_{k+1}} = \overline{A \cup B} \overset{(1)}{=\!=} \overline{A} \cap \overline{B}$$

$$= \left(\overline{A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_k}\right) \cap \overline{A_{k+1}}$$

$$\overset{(2)}{=} \left(\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \dots \cap \overline{A_k}\right) \cap \overline{A_{k+1}}$$

$$\underset{\text{ιδιότητα τομής}}{\overset{\text{προσεταιριστική}}{=}} \overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \dots \cap \overline{A_k} \cap \overline{A_{k+1}}$$

Άρα, ισχύει η ταυτότητα για $k+1$ σύνολα. Άρα, από την αρχή της επαγωγής ισχύει για κάθε $n \geq 2$

Διάλειμμα μέχρι 10:20

Λύση της (i) με τη χρήση ισοδυναμιών.

Θέλουμε να δείξουμε ότι $A \setminus B = A \cap \overline{B}$.
Για κάθε $x \in A \setminus B$ ισχύει ότι

$$\begin{aligned} x \in A \setminus B &\Leftrightarrow x \in A \text{ και } x \notin B \\ &\Leftrightarrow x \in A \text{ και } x \in \overline{B} \\ &\Leftrightarrow x \in A \cap \overline{B}, \end{aligned}$$

οπότε, επειδή χρησιμοποιήθηκαν παντού ισοδυναμίες,

$$A \setminus B = A \cap \overline{B}. \qquad \square$$

Λύση της (*ii*) με τη χρήση ισοδυναμιών.

Θέλουμε να δείξουμε ότι $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$.

$$\begin{aligned} x \in \overline{A \cup B} &\Leftrightarrow x \notin A \cup B \\ &\Leftrightarrow x \notin A \text{ και } x \notin B \\ &\Leftrightarrow x \in \overline{A} \text{ και } x \in \overline{B} \\ &\Leftrightarrow x \in \overline{A} \cap \overline{B} \end{aligned}$$

οπότε, επειδή χρησιμοποιήθηκαν παντού ισοδυναμίες,

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}. \qquad \square$$

Λύση της (*iii*) με τη χρήση πινάκων.

Θέλουμε να δείξουμε ότι $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.
Τα A, B, C είναι υποσύνολα του E.
Πού μπορεί να ανήκει κάποιο στοιχείο $x \in E$;
Σημειώνουμε 1 αν το x ανήκει στο σύνολο και 0 αλλιώς.

A	B	C	$B \cup C$	$A \cap (B \cup C)$	$A \cap B$	$A \cap C$	$(A \cap B) \cup (A \cap C)$
1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	1	1	1	0	1
1	0	1	1	1	0	1	1
1	0	0	0	0	0	0	0
0	1	1	1	0	0	0	0
0	1	0	1	0	0	0	0
0	0	1	1	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0

Οι στήλες $A \cap (B \cup C)$ και $(A \cap B) \cup (A \cap C)$ είναι ίδιες. Άρα, τα σύνολα αυτά έχουν τα ίδια στοιχεία του E, δηλαδή είναι ίσα. $\square$

Παρατήρηση

Αν σε ένα τύπο εμφανίζονται:
2 διαφορετικά σύνολα, ο πίνακας έχει $2^2 = 4$ γραμμές (περιπτώσεις),
3 διαφορετικά σύνολα, ο πίνακας έχει $2^3 = 8$ γραμμές (περιπτώσεις),
n διαφορετικά σύνολα, ο πίνακας έχει 2^n γραμμές (περιπτώσεις).
Η μέθοδος των πινάκων είναι πρακτική όταν σε ένα τύπο εμφανίζονται το πολύ 4 διαφορετικά σύνολα.

Λύση της (*iv*) με τη χρήση πινάκων.

Θέλουμε να δείξουμε ότι $A = (A \cap B) \cup (A \cap \overline{B})$.

A	B	$\overline{B}$	$A \cap B$	$A \cap \overline{B}$	$(A \cap B) \cup (A \cap \overline{B})$
1	1	0	1	0	1
1	0	1	0	1	1
0	1	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0

Οι στήλες των A και $(A \cap B) \cup (A \cap \overline{B})$ είναι ίδιες.
Άρα, τα σύνολα A και $(A \cap B) \cup (A \cap \overline{B})$ περιέχουν τα ίδια στοιχεία του E, δηλαδή είναι ίσα. $\square$

Λύση της (v) με τη χρήση ιδιοτήτων.

Θέλουμε να δείξουμε ότι $A \cap (B \setminus C) = (A \cap B) \setminus (A \cap C)$.
Χρησιμοποιώντας τις βασικές ιδιότητες των πράξεων συνόλων, έχουμε τις επόμενες ισότητες:

$$\begin{aligned}
(A \cap B) \setminus (A \cap C) &= (A \cap B) \cap (\overline{A \cap C}) \\
&= (A \cap B) \cap (\overline{A} \cup \overline{C}) \\
&= ((A \cap B) \cap \overline{A}) \cup ((A \cap B) \cap \overline{C}) \\
&= \varnothing \cup (A \cap B \cap \overline{C}) \\
&= A \cap (B \cap \overline{C}) \\
&= A \cap (B \setminus C).
\end{aligned}$$

□

Λύση της (v) με τη μέθοδο διπλού εγκλεισμού.

Για να δείξουμε ότι δύο σύνολα A, B είναι ίσα, αρκεί να δείξουμε ότι $A \subseteq B$ και $B \subseteq A$.

Θέλουμε να δείξουμε ότι $A \cap (B \setminus C) = (A \cap B) \setminus (A \cap C)$.

Έστω $x \in A \cap (B \setminus C)$. Τότε,

$$\begin{aligned} x \in A \cap (B \setminus C) &\Leftrightarrow x \in A \text{ και } x \in B \setminus C \\ &\Leftrightarrow x \in A \text{ και } x \in B \text{ και } x \notin C \\ &\Leftrightarrow x \in A \cap B \text{ και } x \notin C \\ &\overset{1}{\Rightarrow} x \in A \cap B \text{ και } x \notin A \cap C \\ &\Rightarrow x \in (A \cap B) \setminus (A \cap C). \end{aligned}$$

Άρα, $A \cap (B \setminus C) \subseteq (A \cap B) \setminus (A \cap C)$. □

[1] Αν $x \notin C$, τότε $x \notin A \cap C$. (Το αντίστροφο, γενικά, δεν ισχύει.)

Λύση της (v) με τη μέθοδο διπλού εγκλεισμού (συνέχεια).

Έστω $x \in (A \cap B) \setminus (A \cap C)$. Τότε

$$
\begin{aligned}
x \in (A \cap B) \setminus (A \cap C) &\Leftrightarrow x \in A \cap B \text{ και } x \notin A \cap C \\
&\Leftrightarrow x \in B \text{ και } x \in A \text{ και } x \notin A \cap C \\
&\overset{2}{\Rightarrow} x \in B \text{ και } x \in A \text{ και } x \notin C \\
&\Leftrightarrow x \in A \text{ και } x \in B \text{ και } x \notin C \\
&\Leftrightarrow x \in A \text{ και } x \in B \setminus C \\
&\Leftrightarrow x \in A \cap (B \setminus C)
\end{aligned}
$$

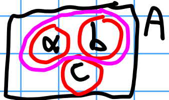
Άρα, $(A \cap B) \setminus (A \cap C) \subseteq A \cap (B \setminus C)$.
Επομένως,

$$A \cap (B \setminus C) = (A \cap B) \setminus (A \cap C). \qquad \square$$

[2] Αν $x \in A$ και $x \notin A \cap C$, τότε $x \in A$ και $x \notin C$.

Υπενθύμιση: Αν A μη κενό σύνολο το δυναμοσύνολο (powerset) του A είναι σύνολο $\mathcal{P}(A)$ όλων των υποσυνόλων του A

Παράδειγμα $A = \{\alpha, b, c\}$



Τότε

$\mathcal{P}(A) = \{\emptyset, \{\alpha\}, \{b\}, \{c\}, \{\alpha, b\}, \{\alpha, c\}, \{b, c\}, A\}$

ο πληθάριθμος του A

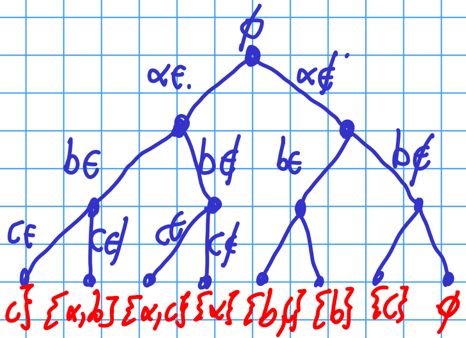
Αν το A έχει n στοιχεία (δηλ. $|A| = n$) τότε το δυναμοσύνολο $\mathcal{P}(A)$ έχει 2^n στοιχεία (άρα $|\mathcal{P}(A)| = 2^n$)

Δένδρο δυναμοσυνόλου του $A = \{\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}\}$

$a \in \quad a \notin$

$b \in \quad b \notin$

$c \in \quad c \notin$



2^3 φύλλα

Άσκηση 2 (Τομές δυναμοσυνόλων)

Έστω A, B μη κενά σύνολα. Να δειχθεί ότι $\mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B) = \mathcal{P}(A \cap B)$.

Λύση.

Για κάθε $X \in \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$ ισχύει ότι

$$\begin{aligned} X \in \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B) &\Leftrightarrow X \in \mathcal{P}(A) \text{ και } X \in \mathcal{P}(B) \\ &\Leftrightarrow X \subseteq A \text{ και } X \subseteq B \\ &\Leftrightarrow X \subseteq A \cap B \\ &\Leftrightarrow X \in \mathcal{P}(A \cap B), \end{aligned}$$

οπότε, επειδή χρησιμοποιήθηκαν παντού ισοδυναμίες,

$$\mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B) = \mathcal{P}(A \cap B).$$

□

Άσκηση 3

Έστω A, B μη κενά σύνολα. Να εξετασθεί αν ισχύει η ισότητα $\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B) = \mathcal{P}(A \cup B)$.

Λύση.

Θα δείξουμε ότι η ισότητα αυτή δεν ισχύει πάντα, με ένα αντιπαράδειγμα. Θεωρούμε τα σύνολα $A = \{1\}$ και $B = \{2\}$, οπότε

$$\mathcal{P}(A) = \{\emptyset, \{1\}\} \quad \text{και} \quad \mathcal{P}(B) = \{\emptyset, \{2\}\}.$$

Επομένως, είναι $\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}\}$.
Επιπλέον, είναι $A \cup B = \{1, 2\}$, οπότε

$$\mathcal{P}(A \cup B) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\},$$

δηλαδή, $\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B) \neq \mathcal{P}(A \cup B)$. ☐

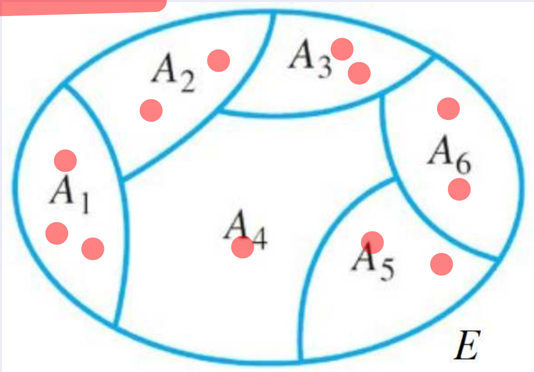
Αντιπαράδειγμα

Διαμερίσεις

Μια οικογένεια $(A_i)_{i\in I}$ μη κενών υποσυνόλων ενός συνόλου E ονομάζεται **διαμέριση** του E αν ισχύουν οι παρακάτω δύο συνθήκες:

(i) τα σύνολα A_i είναι ανά δύο ξένα,

(ii) η ένωσή τους είναι το E.

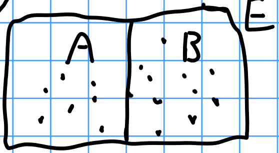


Παραδείγματα

Ε = Το σύνολο όλων των ανθρώπων

Α = Όλοι οι άνθρωποι που γεννήθηκαν πριν το 2000

Β = Όλοι οι άνθρωποι που γεννήθηκαν από το 2000 και μετά (μαζί με το 2000)

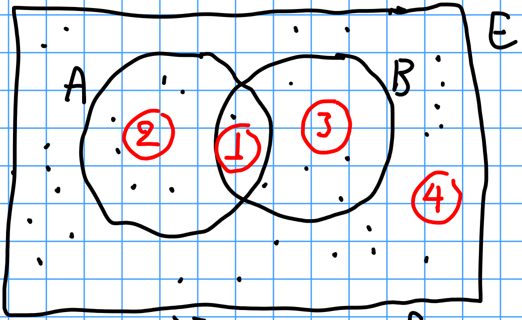


A_1 = Όλοι οι άνθρωποι που γεννήθηκαν στην Αθήνα

A_2 = Όλοι οι άνθρωποι που γεννήθηκαν στην Θεσ/νίκη

A_3 = Όλοι όσοι γεννήθηκαν εκτός Αθήνας και Θεσ/νίκης

Παραδείγματα $A, B \subseteq E$



Μπορούμε να ορίσουμε μια διαμέριση του E χρησιμοποιώντας τα σύνολα A, B

$1 = A \cap B$

$2 = A \setminus B = A \cap \overline{B}$

$3 = B \setminus A = B \cap \overline{A}$

$4 = \overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$

Το Ε διαμερίζεται (*) στα σύνολα

$A \cap B$, $A \cap \overline{B}$, $\overline{A} \cap B$, $\overline{A} \cap \overline{B}$

Παραδείγματα

(i) Έστω E το σύνολο όλων των περιττών φυσικών αριθμών και A_i, $i \in I = \{1, 3, 5, 7, 9\}$, είναι το σύνολο όλων των φυσικών αριθμών που λήγουν σε i, τότε η οικογένεια $(A_i)_{i \in I}$ αποτελεί μια διαμέριση του E.

(ii) Έστω $E = \mathbb{R}$ και $A_i = [i, i+1)$, όπου $i \in \mathbb{Z}$, τότε η οικογένεια $(A_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ αποτελεί μια διαμέριση του $\mathbb{R}$.

(iii) Έστω E το σύνολο των φοιτητών που φοιτούν στο Πα.Πει., A_1 το σύνολο των φοιτητών του 1ου έτους, A_2 το σύνολο των φοιτητών του 2ου έτους, A_3 το σύνολο των φοιτητών έτους μεγαλύτερου ή ίσου του 3. Τα σύνολα A_1, A_2, A_3 αποτελούν μια διαμέριση του E.

Μια άλλη διαμέριση του E ορίζεται από τα σύνολα A (αντ. $\overline{A}$) των ατόμων που φοιτούν στο Πα.Πει και γεννήθηκαν (αντ. δεν γεννήθηκαν) στην πόλη της Αθήνας.

Έστω A το σύνολο των φοιτητών που έχουν αυτοκίνητο, B το σύνολο των φοιτητών που έχουν ποδήλατο. Τα A, B δεν είναι διαμέριση του E (γιατί;) Διότι $A \cap B \neq \emptyset$ και $A \cup B \neq E$

Τα σύνολα $A \cap B$, $A \cap B$, $\overline{A} \cap B$, $\overline{A} \cap \overline{B}$ είναι διαμέριση του E

Άσκηση 4 (Διαμερίσεις του $\{1, 2, \ldots, n\}$)

Να γραφούν όλες οι δυνατές διαμερίσεις του $[n]$ για $n = 1, 2, 3, 4$

Λύση:

Η μοναδική διαμέριση του $[1]$ είναι η $\{1\}$.
Οι 2 διαμερίσεις του $[2]$ είναι οι εξής: $\{1\}, \{2\}$ και $\{1, 2\}$.
Οι 5 διαμερίσεις του $[3]$ είναι οι εξής:

$$\{1\}, \{2\}, \{3\} \quad \{1, 2\}, \{3\} \quad \{1, 3\}, \{2\} \quad \{1\}, \{2, 3\} \quad \{1, 2, 3\}$$

Υπάρχουν 15 τρόποι να διαμερίσουμε το σύνολο $[4]$:

{1},{2},{3},{**4**}	{1,2},{3},{**4**}	{1,3},{2},{**4**}	{1},{2,3},{**4**}
{1,2,3},{**4**}	{1},{2},{**3,4**}	{1,2},{**3,4**}	{1},{**2,4**},{3}
{1,3},{**2,4**}	{**1,4**},{2},{3}	{**1,4**},{2,3}	{1},{**2,3,4**}
{**1,3,4**},{2}	{**1,2,4**},{3}	{**1,2,3,4**}	

Διάλειμμα μέχρι 11:10

Υπενθυμίζεται ότι μια σχέση R στο σύνολο E είναι ένα υποσύνολο του καρτεσιανού γινομένου

$$E \times E := \{(x, y) : x, y \in E\},$$

δηλαδή κάθε υποσύνολο $R \subseteq E \times E$ είναι μια σχέση στο E.

	1	2	3	4
1	(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)
2	(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)
3	(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)
4	(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)

$E = \{1, 2, 3, 4\}$

R: Μια σχεση (Η πρωτη συντεταγμενη < δευτερης συντεταγμενη)

R: Μια αλλη σχεση

Το $E \times E$ εχει 16 στοιχεια

Αρα, υπαρχουν 2^{16} υποσυνολα του $E \times E$

Αρα, και 2^{16} διαφορετικες σχεσεις σε ενα συνολο με 4 στοιχεια.

Συμβολισμος: $(x,y) \in R \iff xRy$

συμβολισμος

Ορισμός (Σχέση μερικής διάταξης)

Μια σχέση R στο E ονομάζεται (**μερική**) **διάταξη** όταν ικανοποιεί τις ιδιότητες:

(i) $\alpha R \alpha$, για κάθε $\alpha \in E$ (**ανακλαστική**).

(ii) $\alpha R \beta$ και $\beta R \alpha \Longrightarrow \boxed{\alpha = \beta}$, για κάθε $\alpha, \beta \in E$ (**αντισυμμετρική**).

(iii) $\alpha R \beta$ και $\beta R \gamma \Longrightarrow \alpha R \gamma$, για κάθε $\alpha, \beta, \gamma \in E$ (**μεταβατική**).

Συνήθως η σχέση διάταξης σημειώνεται με $\leq$.

Η διάταξη ονομάζεται **ολική** ανν ικανοποιεί την ιδιότητα

$$\alpha \leq \beta \text{ ή } \beta \leq \alpha, \text{ για κάθε } \alpha, \beta \in E.$$

Παραδείγματα Σχέση εγκλεισμου $\subseteq$

$2|4$ διότι $4 = 2 \cdot 2$
$3|15$ διότι $15 = 5 \cdot 3$
$7|21$ διότι $21 = 3 \cdot 7$

Δεν ισχύει $2|15$ διότι δεν υπάρχει $k \in \mathbb{N}^*$ ώστε $15 = k \cdot 2$

Άσκηση 5 (Μερική διάταξη διαιρετότητας)

Στο σύνολο $\mathbb{N}^*$, *ορίζουμε την σχέση διαιρετότητας* $|$ *ως εξής*

$$\boxed{\begin{aligned} x \mid y &\Leftrightarrow x \text{ διαιρεί τον } y \\ &\Leftrightarrow \text{υπάρχει } k \in \mathbb{N}^* \text{ ώστε } y = kx. \end{aligned}}$$

$x, y \in \mathbb{N}^*$

i) *Να δειχθεί ότι η σχέση διαιρετότητας* $|$ *είναι σχέση μερικής διάταξης στο* $\mathbb{N}^*$.

ii) *Είναι η σχέση διαιρετότητας* $|$ *σχέση ολικής διάταξης στο* $\mathbb{N}^*$;

Έστω $m, n \in \mathbb{N}^*$ ισχύει

$m|n$ ή/και $n|m$;

Όχι διότι ούτε $2|3$, ούτε $3|2$. Δεν είναι ολική

Η σχέση διαιρετότητας $|$ στο $\mathbb{N}^*$ είναι σχέση μερικής διάταξης στο $\mathbb{N}^*$

- Έστω $n \in \mathbb{N}^*$ τότε $n = 1 \cdot n$ άρα $n | n$
  $1 \in \mathbb{N}^*$

  Άρα, ισχύει η ανακλαστική ιδιότητα

- Έστω $\underline{m, n, \ell \in \mathbb{N}^*}$ ώστε $\underline{m | n}$ και $\underline{n | \ell}$

Αφού $m | n \Leftrightarrow$ Υπάρχει $k_1 \in \mathbb{N}^*$ ώστε $\boxed{n = k_1 \cdot m}$ (1)

Αφού $n | \ell \Leftrightarrow$ Υπάρχει $k_2 \in \mathbb{N}^*$ ώστε $\boxed{\ell = k_2 \cdot n}$ (2)

Από τις ισότητες (1), (2) έχουμε ότι

$\ell = k_2 \cdot n = k_2 \cdot k_1 \cdot m$ όπου $k_2 \cdot k_1 \in \mathbb{N}^*$

Άρα $m \mid l$ δηλαδή ισχύει η μεταβατικότητα

• Έστω $m, n \in \mathbb{N}^*$ ώστε $m \mid n$ και $n \mid m$

Αφού $m \mid n \iff$ Υπάρχει $k_1 \in \mathbb{N}^*$ ώστε $\boxed{n = k_1 m}$ (1)

Αφού $n \mid m \iff$ Υπάρχει $k_2 \in \mathbb{N}^*$ ώστε $\boxed{m = k_2 n}$ (2)

Από τις (1), (2) έπεται ότι

$$n = k_1 m = k_1 k_2 n \iff k_1 k_2 = 1 \iff k_1 = k_2 = 1$$

Άρα $\boxed{n = k_1 m = 1 \cdot m = m}$

Άρα, ισχύει και η αντισυμμετρική ιδιότητα στο $\mathbb{N}^*$

δηλαδή η σχέση διαιρετότητας $\mid$ είναι μερική διάταξη

Λύση του (i).

(Ανακλαστική ιδιότητα.) Για κάθε $x \in \mathbb{N}^*$ ισχύει ότι $x = 1 \cdot x$, άρα $x \mid x$.

(Αντισυμμετρική ιδιότητα.) Θεωρούμε $x, y \in \mathbb{N}^*$ με $x \mid y$ και $y \mid x$. Τότε, υπάρχουν $k_1, k_2 \in \mathbb{N}^*$ ώστε $y = k_1 x$ και $x = k_2 y$, οπότε $y = k_1 k_2 y$ και

$$y = k_1 k_2 y \Rightarrow k_1 k_2 = 1 \Rightarrow k_1 = k_2 = 1 \Rightarrow x = y.$$

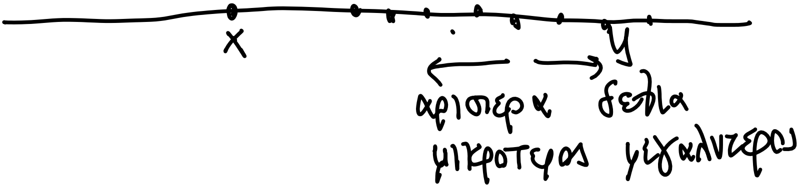
(Μεταβατική ιδιότητα.) Θεωρούμε $x, y, z \in \mathbb{N}^*$ με $x \mid y$ και $y \mid z$. Τότε, υπάρχουν $k_1, k_2 \in \mathbb{N}^*$ ώστε $y = k_1 x$ και $z = k_2 y$, οπότε $z = k_2 k_1 x$. Επειδή $k_2 k_1 \in \mathbb{N}^*$ έπεται ότι $x \mid z$.

Κατόπιν τούτων, η σχέση $\mid$ είναι σχέση μερικής διάταξης στο $\mathbb{N}^*$. □

Λύση του (*ii*).

Δεν είναι ολική διάταξη στο $\mathbb{N}^*$, διότι υπάρχουν αριθμοί στο $\mathbb{N}^*$ που δεν συγκρίνονται. Για παράδειγμα,

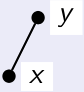
$$3 \nmid 5 \text{ και } 5 \nmid 3. \qquad \square$$



Ορισμός (Διάγραμμα Hasse)

Τα διαγράμματα Hasse αναπαριστούν γεωμετρικά μια μερική διάταξη $\leq$ που ορίζεται σε ένα σύνολο A.

- Τα στοιχεία του A αναπαρίστανται από σημεία.
- Αν $x < y$ και δεν υπάρχει $z \in A$ ώστε $x < z < y$, τότε τα σημεία x και y ενώνονται με μια γραμμή, έτσι ώστε το σημείο x να βρίσκεται χαμηλότερα από το σημείο y.



Άσκηση 6

8 διαιρετες

Έστω A το σύνολο των θετικών διαιρετών του 24, δηλαδή

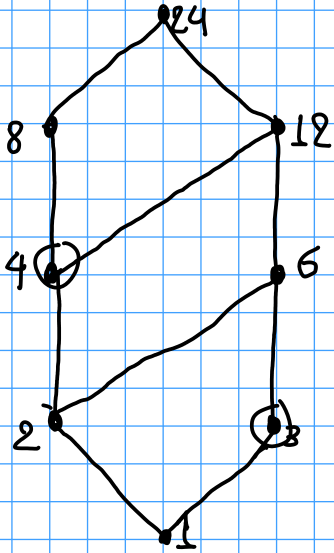
$$A = \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24\},$$

εφοδιασμένο με την σχέση διαιρετότητας $|$.

i) Να σχεδιασθεί το διάγραμμα Hasse του $(A, |)$

$\boxed{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24}$

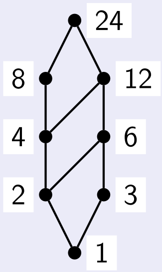
Διαιρέτες του 24



Διάγραμμα Hasse των διαιρετών του 24

Λύση του (i).

Ένα διάγραμμα Hasse για το $A = \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24\}$ είναι το επόμενο

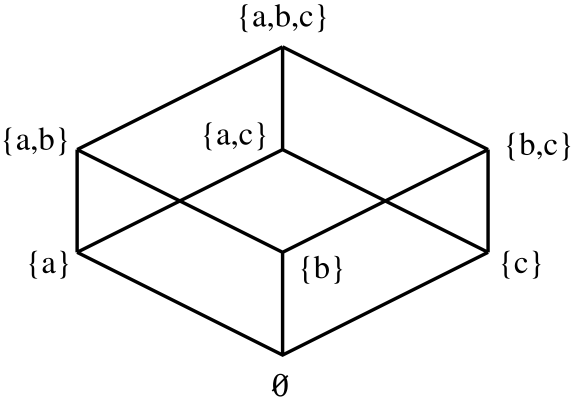


□

Άσκηση 7

Να σχεδιασθεί το διάγραμμα Hasse του δυναμοσυνόλου του $A = \{a, b, c\}$ *ως προς την μερική διάταξη του εγκλεισμού* $\subseteq$.

Λύση:



Διάλειμμα μέχρι 11:55

Ορισμός (Τοπολογική διάταξη)

Δίδεται ένα σύνολο V, στο οποίο έχουμε ορίσει μια μερική διάταξη $\leq$. Μια ολική διάταξη $\lhd$ στο V ονομάζεται **γραμμική επέκταση** ή **τοπολογική διάταξη** της διάταξης $\leq$ στο V ανν για κάθε $a, b \in V$ ισχύει

$$a \leq b \Rightarrow a \lhd b.$$

Δηλαδή η διάταξη $\lhd$ είναι "συμβατή" με την $\leq$ και την επεκτείνει σε όλα τα ζεύγη στοιχείων.

Για παράδειγμα, ας υποθέσουμε ότι δίνεται το σύνολο $V = \{a, b, c, d, e, f\}$ με την μερική διάταξη $\leq$, για την οποία $x \leq x$ για κάθε $x \in V$ και επιπλέον

$$d \leq b, \; d \leq c, \; d \leq a, \; d \leq e, \; d \leq f, \; b \leq e, \; c \leq e, \; a \leq f$$

Μια τοπολογική διάταξη $\lhd$ για την σχέση $\leq$ είναι η ολική διάταξη

$$d \lhd b \lhd c \lhd a \lhd e \lhd f$$

Μια άλλη τοπολογική διάταξη $\lhd$ είναι η ολική διάταξη

$$d \lhd b \lhd c \lhd e \lhd a \lhd f.$$

Αποδεικνύεται ότι κάθε μερική διάταξη μπορεί να επεκταθεί σε μια τοπολογική διάταξη. Μερικές φορές μπορεί να υπάρχουν πολλές τοπολογικές διατάξεις.

Για την εύρεση της τοπολογικής διάταξης μπορεί να χρησιμοποιηθεί ο επόμενος αλγόριθμος:

Το x απαιτείται για το y

Αλγόριθμος εύρεσης τοπολογικής διάταξης

$x \leq y$

- ⋆ Είσοδος: Ένα σύνολο U διατεταγμένων ζευγών (x, y) που αναπαριστούν την μερική διάταξη $\leq$ στο σύνολο V
- ⋆ Έξοδος: Μια (διατεταγμένη) λίστα L των στοιχείων του V, η οποία αναπαριστά την τοπολογική διάταξη $\lhd$.

Όσο υπάρχουν στοιχεία του V που δεν έχουν προστεθεί στην L

- Επιλέγουμε ένα στοιχείο $x \in V$ που δεν έχει μικρότερο στοιχείο μεταξύ των στοιχείων που δεν έχουν προστεθεί στην λίστα L (Δηλαδή το x δεν εμφανίζεται στην δεύτερη θέση κανενός ζεύγους του U.)
- Προσθέτουμε το x στο τέλος της λίστας L.
- Σβήνουμε όλα τα ζεύγη (x, y) του U που περιέχουν το x.

Το πρόβλημα της επέκτασης μιας μερικής διάταξης σε ολική είναι πολύ συνηθισμένο στις εφαρμογές, όπως φαίνεται και στην επόμενη άσκηση.

Άσκηση 8 (Βάζοντας τα πράγματα σε σειρά)

Για την ολοκλήρωση ενός έργου, πρέπει να εκτελεστούν 9 *δραστηριότητες* $1, 2, \ldots, 9$. *Κάποιες από αυτές χρειάζονται τα αποτελέσματα μερικών άλλων, των οποίων η εκτέλεση πρέπει να προηγηθεί. Οι απαιτήσεις κάθε μιας δίδονται στον επόμενο πίνακα:*

	απαιτήσεις		*απαιτήσεις*		*απαιτήσεις*
1	3, 4	4		7	3, 4
2	1, 5	5		8	5, 7
3		6	1, 2	9	6, 8

Να βρεθεί με ποια σειρά πρέπει να εκτελεστούν οι $1, 2, \ldots, 9$ *ώστε να ολοκληρωθεί το έργο.*

Μερική διάταξη (Δεν είναι η διάταξη αριθμών)

$\cancel{3 \le 1}$, $\cancel{4 \le 1}$, $\cancel{1 \le 2}$, $\cancel{5 \le 2}$, $\cancel{1 \le 6}$, $2 \le 6$

$\cancel{3 \le 7}$, $\cancel{4 \le 7}$, $\cancel{5 \le 8}$, $\cancel{7 \le 8}$, $6 \le 9$, $8 \le 9$

Υπάρχει σειρά για τα $\{1, 2, \ldots, 9\}$ που να "σέβεται" / διατηρεί την μερική διάταξη;

Αλγόριθμος: Βρίσκουμε όλα τα x που δεν εμφανίζονται στο δεξί μέλος καμίας ανισότητας και ξεκινάμε από αυτά τα x

$3 \lhd 4 \lhd 5$

Τότε όλες οι ανισότητες που έχουν αυτά x στο αριστερό έχουν αυτόματα ικανοποιηθεί οπότε μπορούμε να τις "σβήσουμε"

Στο νέο σύνολο περιορισμών ψάχνουμε τα υπόλοιπα x που δεν εμφανίζονται στο $\boxed{\text{δεξί}}$ μέλος

Τα 1 και 7 δεν εμφανίζονται στο δεξί μέλος
Άρα, μπορούμε να συνεχίσουμε σ' αυτά

$$3 \lhd 4 \lhd 5 \lhd 1 \lhd 7$$

Τότε όλες οι ανισότητες που έχουν αυτά x στο $\boxed{\text{αριστερό}}$ έχουν αυτόματα $\boxed{\text{ικανοποιηθεί}}$ οπότε μπορούμε να τις "σβήσουμε"

Επαναλαμβάνουμε

$$\cancel{3 \le 1},\ \cancel{4 \le 1},\ \cancel{1 \le 2},\ \cancel{5 \le 2},\ \cancel{1 \le 6},\ \cancel{2 \le 6}$$
$$\cancel{3 \le 7},\ \cancel{4 \le 7},\ \cancel{5 \le 8},\ \cancel{7 \le 8},\ 6 \le 9,\ \cancel{8 \le 9}$$

Τωρα προχωραμε στο 8 και 2

$3 \lhd 4 \lhd 5 \lhd 1 \lhd 7 \lhd 2 \lhd 8$

Επειτα προχωραμε στο 6

$3 \lhd 4 \lhd 5 \lhd 1 \lhd 7 \lhd 2 \lhd 8 \lhd 6$

Τελος προσθετουμε και το 9 $\qquad a < b$

$a \to b$

$3 \lhd 4 \lhd 5 \lhd 1 \lhd 7 \lhd 2 \lhd 8 \lhd 6 \lhd 9$

$\cancel{3 \le 1}$, $\cancel{4 \le 1}$, $\cancel{1 \le 9}$, $\cancel{5 \le 2}$, $\cancel{1 \le 6}$, $\cancel{2 \le 6}$

$3 \le 7$, $\cancel{4 \le 7}$, $\cancel{5 \le 8}$, $7 \le 8$, $6 \le 9$, $\cancel{8 \le 9}$

Λύση.

Οι απαιτήσεις του προβλήματος ορίζουν μια μερική διάταξη στο σύνολο 1, 2, ..., 9. Συγκεκριμένα, $j < i$ αν η δραστηριότητα i απαιτεί την ολοκλήρωση της δραστηριότητας j. Επομένως, η ολοκλήρωση του έργου απαιτεί την ικανοποίηση των παρακάτω ζευγών περιορισμών:

$$U = \{(1,2),(1,6),(2,6),(3,1),(3,7),(3,8),\\(4,1),(4,7),(5,2),(5,8),(6,9),(8,9)\}$$

Η εύρεση της σειράς εκτέλεσης αντιστοιχεί στην εύρεση μια τοπολογικής διάταξης για την μερική διάταξη των απαιτήσεων. Θα εφαρμόσουμε τον αλγόριθμο της τοπολογικής διάταξης. Θα φτιάξουμε μια λίστα L που τελικά θα περιέχει τους αριθμούς $1, 2, 3, \ldots, 9$ με την σειρά της τοπολογικής διάταξης. Κάθε φορά, επιλέγουμε μια δραστηριότητα i που δεν απαιτεί τις υπόλοιπες που απομένουν, την προσθέτουμε στο τέλος της L και σβήνουμε από το U τα ζεύγη που την περιέχουν. Επαναλαμβάνουμε μέχρι να εξαντληθούν οι δραστηριότητες.

Λύση (συνέχεια).

0. Αρχικά, έχουμε $V = [1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9]$, $L = []$ και

$$U = \{(1, 2), (1, 6), (2, 6), (3, 1), (3, 7), (3, 8),\\ (4, 1), (4, 7), (5, 2), (5, 8), (6, 9), (8, 9)\}$$

1. Επιλέγουμε την 5 οπότε έχουμε $V = [1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9]$, $L = [5]$ και

$$U = \{(1, 2), (1, 6), (2, 6), (3, 1), (3, 7), (3, 8), (4, 1), (4, 7), (6, 9), (8, 9)\}$$

2. Επιλέγουμε την 3 οπότε έχουμε $V = [1, 2, 4, 6, 7, 8, 9]$, $L = [5, 3]$ και

$$U = \{(1, 2), (1, 6), (2, 6), (4, 1), (4, 7), (6, 9), (8, 9)\}$$

3. Επιλέγουμε την 4 οπότε έχουμε $V = [1, 2, 6, 7, 8, 9]$, $L = [5, 3, 4]$ και

$$U = \{(1, 2), (1, 6), (2, 6), (6, 9), (8, 9)\}$$

Λύση (συνέχεια).

4. Επιλέγουμε την 1 οπότε έχουμε $V = [2, 6, 7, 8, 9]$, $L = [5, 3, 4, 1]$ και
$$U = \{(2, 6), (6, 9), (8, 9)\}$$
5. Επιλέγουμε την 7 οπότε έχουμε $V = [2, 6, 8, 9]$, $L = [5, 3, 4, 1, 7]$ και
$$U = \{(2, 6), (6, 9), (8, 9)\}$$
6. Επιλέγουμε την 8 οπότε έχουμε $V = [2, 6, 9]$, $L = [5, 3, 4, 1, 7, 8]$ και
$$U = \{(2, 6), (6, 9)\}$$
7. Επιλέγουμε την 2 οπότε έχουμε $V = [6, 9]$, $L = [5, 3, 4, 1, 7, 8, 2]$ και
$$U = \{(6, 9)\}$$

Λύση (συνέχεια).

8. Επιλέγουμε την 6 οπότε έχουμε: $V = [9]$, $L = [5, 3, 4, 1, 7, 8, 2, 6]$ και
$$U = \{\}$$
9. Επιλέγουμε την 9 οπότε έχουμε $V = []$, $L = [5, 3, 4, 1, 7, 8, 2, 6, 9]$ και
$$U = \{\}$$

Επομένως, μια τοπολογική διάταξη των δραστηριοτήτων 1, 2, ..., 9, και άρα μια πιθανή σειρά εκτέλεσης των δραστηριοτήτων, είναι η σειρά $L = [5, 3, 4, 1, 7, 8, 2, 6, 9]$.

Παρακάτω δίδεται μια υλοποίηση του παραπάνω αλγορίθμου στην γλώσσα Python

```python
V = [1,2,3,4,5,6,7,8,9] #elements
U = [(1,2),(1,6),(2,6),(3,1),(3,7),(4,1),(4,7),(5,2),(5,8),(6,9),(3,8),(8,9)] #partial
    order
Vc = V.copy()
n = len(V)
pre = [[] for i in range(n+1)] #u in pre[v] <==> (u,v) in U
succ = [[] for i in range(n+1)] #u in succ[v] <==> (v,u) in U
for t in U: #for each tuple t in U
    pre[t[1]].append(t[0]) #populate pre
    succ[t[0]].append(t[1]) #populate succ

L = [] #result is stored in L
while(len(Vc) > 0):
    l = len(Vc)
    for v in Vc: #for each element v
        if len(pre[v]) == 0: #if v has no predecessor
            L.append(v) #append it in L
            for u in succ[v]: #for each successor u of v
                pre[u].remove(v) #delete v from list of predecessors of u
            #succ[v].clear()
            Vc.remove(v) #delete v
            break #reset for v loop
    if l == len(Vc): break #no progress => no possible solution

if (len(Vc)==0): print("result:", L)
else: print("no result found")
```

Output:

```
result: [3, 4, 1, 5, 2, 6, 7, 8, 9]
```

Άσκηση 9 (Τοπολογική διάταξη)

Να βρεθεί η σειρά εκτέλεσης των δραστηριοτήτων A, B, C, D, E, F, G, H, K, M *όταν*
$A < C$, $A < D$, $A < M$, $A < H$, $B < A$, $B < D$, $B < K$, $B < M$, $C < G$, $C < H$, $C < M$, $D < H$, $E < A$, $E < B$, $E < C$, $E < K$, $F < D$, $F < G$, $G < H$, $K < C$, $M < H$,
όπου $x < y$ *όταν η* x *προηγείται της* y.

Λύση: Εδώ $V = \{A, B, C, D, E, F, G, H, K, M\}$.
Έστω L η ζητούμενη τοπολογική διάταξη. Αρχικά $L = []$

$$U = \{(A, C), (A, D), (A, M), (A, H), (B, A), (B, D), (B, K), (B, M), (C, G), (C, H), (C, M), (D, H), (E, A), (E, B), (E, C), (E, K), (F, D), (F, G), (G, H), (K, C), (M, H)\}$$

Σε κάθε βήμα: Βρίσκουμε όλα τα στοιχεία $y \in V$ που δεν εμφανίζονται (ως δεύτερο στοιχείο) σε κανένα ζεύγος (x, y) του U, τα προσθέτουμε στο τέλος της L και σβήνουμε όλα τα ζεύγη (y, z) του U όπου εμφανίζεται το y (ως πρώτο στοιχείο).

1ο βήμα: $L = [E, F]$

$$U = \{(A, C), (A, D), (A, M), (A, H), (B, A), (B, D), (B, K), (B, M), (C, G), (C, H), (C, M), (D, H), \cancel{(E, A)}, \cancel{(E, B)}, \cancel{(E, C)}, \cancel{(E, K)}, \cancel{(F, D)}, \cancel{(F, G)}, (G, H), (K, C), (M, H)\}$$

2ο βήμα: $L = [E, F, B]$

$$U = \{(A, C), (A, D), (A, M), (A, H), \cancel{(B, A)}, \cancel{(B, D)}, \cancel{(B, K)}, \cancel{(B, M)}, (C, G), (C, H), (C, M), (D, H), \cancel{(E, A)}, \cancel{(E, B)}, \cancel{(E, C)}, \cancel{(E, K)}, \cancel{(F, D)}, \cancel{(F, G)}, (G, H), (K, C), (M, H)\}$$

3ο βήμα: $L = [E, F, B, A, K]$

$$U = \{\cancel{(A, C)}, \cancel{(A, D)}, \cancel{(A, M)}, \cancel{(A, H)}, \cancel{(B, A)}, \cancel{(B, D)}, \cancel{(B, K)}, \cancel{(B, M)}, (C, G), (C, H), (C, M), (D, H), \cancel{(E, A)}, \cancel{(E, B)}, \cancel{(E, C)}, \cancel{(E, K)}, \cancel{(F, D)}, \cancel{(F, G)}, (G, H), \cancel{(K, C)}, (M, H)\}$$

4ο βήμα: $L = [E, F, B, A, K, C, D]$

$$U = \{\cancel{(A, C)}, \cancel{(A, D)}, \cancel{(A, M)}, \cancel{(A, H)}, \cancel{(B, A)}, \cancel{(B, D)}, \cancel{(B, K)}, \cancel{(B, M)}, \cancel{(C, G)}, \cancel{(C, H)}, \cancel{(C, M)}, \cancel{(D, H)}, \cancel{(E, A)}, \cancel{(E, B)}, \cancel{(E, C)}, \cancel{(E, K)}, \cancel{(F, D)}, \cancel{(F, G)}, (G, H), \cancel{(K, C)}, (M, H)\}$$

5ο βήμα: $L = [E, F, B, A, K, C, D, G, M]$

$$U = \{\cancel{(A, C)}, \cancel{(A, D)}, \cancel{(A, M)}, \cancel{(A, H)}, \cancel{(B, A)}, \cancel{(B, D)}, \cancel{(B, K)}, \cancel{(B, M)}, \cancel{(C, G)}, \cancel{(C, H)}, \cancel{(C, M)}, \cancel{(D, H)}, \cancel{(E, A)}, \cancel{(E, B)}, \cancel{(E, C)}, \cancel{(E, K)}, \cancel{(F, D)}, \cancel{(F, G)}, \cancel{(G, H)}, \cancel{(K, C)}, \cancel{(M, H)}\}$$

6ο βήμα: $L = [E, F, B, A, K, C, D, G, M, H]$

$$U = \{\cancel{(A,C)}, \cancel{(A,D)}, \cancel{(A,M)}, \cancel{(A,H)}, \cancel{(B,A)}, \cancel{(B,D)}, \cancel{(B,K)}, \cancel{(B,M)}, \cancel{(C,G)}, \cancel{(C,H)}, \cancel{(C,M)}, \cancel{(D,H)}, \cancel{(E,A)}, \cancel{(E,B)}, \cancel{(E,C)}, \cancel{(E,K)}, \cancel{(F,D)}, \cancel{(F,G)}, \cancel{(G,H)}, \cancel{(K,C)}, \cancel{(M,H)}\}$$

Άρα, μια τοπολογική διάταξη είναι η $L = [E, F, B, A, K, C, D, G, M, H]$.
Παρατήρηση. Στα βήματα της προηγούμενης άσκησης είχαμε εναλλακτικές επιλογές για την σειρά των στοιχείων της L. Συγκεκριμένα στο 1ο βήμα είχαμε 2 επιλογές για τα E, F, στο 3ο βήμα είχαμε 2 επιλογές για τα A, K, στο 4ο βήμα είχαμε 2 επιλογές για τα C, D και στο 5ο βήμα είχαμε 2 επιλογές για την σειρά των G, M. Από τις επιλογές αυτές προκύπτουν εναλλακτικές τοπολογικές διατάξεις, εδώ στο παράδειγμα υπάρχουν τουλάχιστον $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 16$ διαφορετικές τοπολογικές διατάξεις.

ΕΚΤΟΣ ΥΛΗΣ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ

Άσκηση 10 (Συλλογικές κατατάξεις)

Ζητήθηκε από 17 κριτικούς ταινιών να κατατάξουν 4 ταινίες a, b, c, d. Στον επόμενο πίνακα παρουσιάζονται συγκεντρωτικά οι αξιολογήσεις τους.

Κατάταξη:	1	2	3	4
5	a	d	c	b
3	a	d	b	c
5	b	c	d	a
4	c	d	b	a
Βαθμοί:	3	2	1	0

Για παράδειγμα, 5 κριτικοί επέλεξαν την ταξινόμηση $a > d > c > b$. Ποια κατά την γνώμη σας είναι η καλύτερη ταινία με βάση τις κατατάξεις των κριτικών;

Υπάρχουν αρκετοί τρόποι (κανόνες) να επιλέξουμε την καλύτερη ταινία. Μερικοί από τους πιο δημοφιλείς είναι οι επόμενοι:

Ο κανόνας της σχετικής πλειοψηφίας

Κάθε κριτικός δίνει μια μόνο ψήφο (στην καλύτερη ταινία που επιλέγει). Κερδίζει η ταινία με τον μεγαλύτερο αριθμό ψήφων.

Κατάταξη:	1	2	3	4
5	a	d	c	b
3	a	d	b	c
5	b	c	d	a
4	c	d	b	a
Βαθμοί:	3	2	1	0

(Νικήτρια: a)

Ο κανόνας της απόλυτης πλειοψηφίας

Κάθε κριτικός δίνει μια μόνο ψήφο (στην καλύτερη ταινία που επιλέγει). Αλλά για να κερδίσει μια ταινία, πρέπει να συγκεντρώσει περισσότερες από τις μισές ψήφους. Αν δεν συμβεί αυτό, διεξάγεται δεύτερος γύρος ψηφοφορίας, στον οποίο συμμετέχουν οι δύο ταινίες που είχαν τις περισσότερες ψήφους. Στο δεύτερο γύρο, νικήτρια είναι εκείνη η ταινία που πλειοψηφεί.

(1ος γύρος)

Κατάταξη:	1	2	3	4
5	a	d	c	b
3	a	d	b	c
5	b	c	d	a
4	c	d	b	a

(2ος γύρος)

Κατάταξη:	1	2
5	a	b
3	a	b
5	b	a
4	b	a

Στον πρώτο γύρο, δεν υπάρχει νικητής. Στον δεύτερο γύρο, περνάνε οι ταινίες a και b. (Νικήτρια: b)

Ο κανόνας της υψηλότερης βαθμολογίας

Κάθε κριτικός παρουσιάζει ολόκληρο το σύστημα προτίμησής του. Μια ταινία παίρνει 0 βαθμούς για την τελευταία θέση, 1 βαθμό για την προτελευταία, 2 βαθμούς για την αμέσως επόμενη, και ούτω καθεξής. Κερδίζει η ταινία που συγκεντρώνει την υψηλότερη βαθμολογία.

Κατάταξη:	1	2	3	4
5	a	d	c	b
3	a	d	b	c
5	b	c	d	a
4	c	d	b	a
Βαθμοί:	3	2	1	0

$a : 5 \cdot 3 + 3 \cdot 3 + 5 \cdot 0 + 4 \cdot 0 = 24.$ $b : 4 \cdot 0 + 3 \cdot 1 + 5 \cdot 3 + 4 \cdot 1 = 22.$
$c : 5 \cdot 1 + 3 \cdot 0 + 5 \cdot 2 + 4 \cdot 3 = 27.$ $d : 5 \cdot 2 + 3 \cdot 2 + 5 \cdot 1 + 4 \cdot 2 = 29.$
(Νικήτρια: d)

Ο κανόνας του Condorcet

Συγκρίνουμε ανά δύο τις ταινίες. Η ταινία x κερδίζει στην μονομαχία με την y αν είναι περισσότεροι αυτοί που θεωρούν ότι $x > y$ παρά αυτοί που θεωρούν ότι $x < y$. Η ταινία που υπερισχύει σε όλες τις μονομαχίες κερδίζει.

Κατάταξη:	1	2	3	4
5	a	d	c	b
3	a	d	b	c
5	b	c	d	a
4	c	d	b	a

Μονομαχίες
(νίκες:ήττες)

	a	b	c	d
a	-	8:9	8:9	8:9
b	9:8	-	8:9	5:12
c	9:8	9:8	-	9:8
d	9:8	12:5	8:9	-

(Νικήτρια: c)

Παρατηρήστε ότι στο παράδειγμα κάθε κανόνας οδηγεί σε διαφορετική απάντηση. Ποιός από αυτούς είναι πιο δίκαιος;
Ο Kenneth Arrow (βραβείο Νόμπελ Οικονομίας το 1972) εξέπληξε την επιστημονική κοινότητα αποδεικνύοντας ότι στην περίπτωση που υπάρχουν τουλάχιστον 3 υποψήφιοι δεν μπορεί να υπάρξει δίκαιος κανόνας για όλες τις πιθανές περιπτώσεις. Συγκεκριμένα:

Θεώρημα του Arrow.

Ο μόνος κανόνας συλλογικής κατάταξης τριών ή περισσοτέρων υποψηφίων με βάση τις ατομικές κατατάξεις για τον οποίο ικανοποιούνται οι συνθήκες

- (Αξίωμα της ομοφωνίας) Αν όλοι οι ψηφοφόροι προτιμούν τον a από τον b τότε στην συλλογική κατάταξη πρέπει να προηγείται ο a από τον b.
- (Αξίωμα της ανεξαρτησίας) Η συλλογική κατάταξη δύο υποψηφίων a και b δεν πρέπει να επηρεάζεται από τις αλλαγές κατάταξης άλλων υποψηφίων.

είναι ο κανόνας του δικτάτορα (δηλαδή επιλέγεται ως συλλογική κατάταξη η ατομική κατάταξη κάποιου ψηφοφόρου).

Για περισσότερες πληροφορίες, βλέπε την ενότητα 10.1 Rankings and Social Choice στο βιβλίο A. Blum, J. Hopcroft, R. Kannan, *Foundations of data science*, March 2019. Λήψη

ΕΚΤΟΣ ΥΛΗΣ
ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ

Ορισμός (Σχέση ισοδυναμίας) (Μετριας δυσκολιας)

Μια σχέση R στο E ονομάζεται **ισοδυναμία** όταν ικανοποιεί τις ιδιότητες:

(i) $\alpha R \alpha$, για κάθε $\alpha \in E$ (**ανακλαστική**).

(ii) $\alpha R \beta \Rightarrow \beta R \alpha$, για κάθε $\alpha, \beta \in E$ (**συμμετρική**).

(iii) $(\alpha R \beta$ και $\beta R \gamma) \Rightarrow \alpha R \gamma$, για κάθε $\alpha, \beta, \gamma \in E$ (**μεταβατική**).

Συνήθως η σχέση ισοδυναμίας σημειώνεται με $\sim$ αντί R.

Παραδείγματα

1. Αν E είναι το σύνολο των φοιτητών που φοιτούν στο Πα.Πει., τότε η σχέση R με

$$aRb \Leftrightarrow a, b \text{ φοιτούν στο ίδιο Τμήμα του Πα.Πει.}$$

είναι μια σχέση ισοδυναμίας.

2. An $E = \mathbb{N}^*$ τότε το σύνολο $R = \{(x, y) : |x - y| \text{ πολλαπλάσιο του } 2\}$ ορίζει μια σχέση ισοδυναμίας, με $n_1 \sim n_2$ όταν $\frac{n_1 - n_2}{2}$ είναι ακέραιος αριθμός.

Αν $\sim$ είναι μια σχέση ισοδυναμίας στο σύνολο E και $\alpha \in E$ τότε το σύνολο

$$C_\alpha = \{\beta \in E : \beta \sim \alpha\}$$

ονομάζεται **κλάση ισοδυναμίας** του στοιχείου α.

Για παράδειγμα, η κλάση ισοδυναμίας C_a ενός φοιτητή a του Πα.Πει. σύμφωνα με την σχέση R του 1ου παραδείγματος, είναι το σύνολο όλων των φοιτητών που φοιτούν στο ίδιο Τμήμα με αυτόν.

Οι κλάσεις ισοδυναμίας μπορεί να συμπίπτουν για ορισμένα $\alpha \in E$. Συγκεκριμένα ισχύουν οι παρακάτω ιδιότητες:

1. $\alpha \in C_\alpha$, για κάθε $\alpha \in E$.
2. $\alpha \sim \beta \Longrightarrow C_\alpha = C_\beta$.
3. $\alpha \not\sim \beta \Longrightarrow C_\alpha \cap C_\beta = \emptyset$.

Από τις τρεις ιδιότητες αυτές προκύπτει ότι:
Κάθε σχέση ισοδυναμίας στο E ορίζει μια διαμέριση του E.
Ισχύει και το **αντίστροφο**, δηλαδή αν (A_i) είναι μια διαμέριση του E, τότε ορίζουμε τη σχέση R στο E ως εξής:

$$xRy \Leftrightarrow \text{ Υπάρχει } i \in I \text{ με } x, y \in A_i.$$

Εύκολα προκύπτει ότι η σχέση αυτή ικανοποιεί τις ιδιότητες (i),(ii) και (iii) οπότε είναι μια σχέση ισοδυναμίας με κλάσεις ισοδυναμίας τα σύνολα A_i.

Το σύνολο $\{C_\alpha : \alpha \in E\}$ ονομάζεται **σύνολο πηλίκο** του E για τη σχέση $\sim$ και συμβολίζεται με $E/\sim$.
Για παράδειγμα, το σύνολο πηλίκο της σχέσης R του πρώτου παραδείγματος είναι το σύνολο των 10 Τμημάτων του Πα.Πει.
Το σύνολο πηλίκο της σχέσης του 2ου παραδείγματος είναι το σύνολο $\{A_1, A_2\}$ όπου A_1, A_2 είναι αντίστοιχα τα σύνολα των περιττών και άρτιων αριθμών.

Άσκηση 11

Στο σύνολο $\mathbb{N}$ *ορίζουμε μια σχέση* R *ως εξής:*

$$xRy \Leftrightarrow \text{ Υπάρχει } k \in Z \text{ ώστε } y - x = 3k.$$

i) *Να δειχθεί ότι η σχέση* R *είναι σχέση ισοδυναμίας στο* $\mathbb{N}$.

ii) *Να βρεθεί η κλάση ισοδυναμίας του αριθμού* 2.

iii) *Να βρεθεί το σύνολο πηλίκο της σχέσης* R.

Για παράδειγμα,

$$2R5, \text{ διότι } 5 - 2 = 3 \cdot 1$$

$$2R8, \text{ διότι } 8 - 2 = 3 \cdot 2$$

$$8R2, \text{ διότι } 2 - 8 = 3 \cdot (-2)$$

$$3\not R7, \text{ διότι δεν υπάρχει } k \in \mathbb{Z} \text{ ώστε } 7 - 3 = 4 = 3k.$$

Λύση του (i).

Ισχύει η ανακλαστική ιδιότητα. Πράγματι, για κάθε $x \in \mathbb{N}$, ισχύει ότι $x - x = 0 = 3 \cdot 0$, άρα ικανοποιείται ο ορισμός με $k = 0$, δηλαδή xRx.

Ισχύει η συμμετρική ιδιότητα. Πράγματι, αν $x, y \in \mathbb{N}$ με xRy, τότε υπάρχει $k \in \mathbb{Z}$ ώστε $y - x = 3k$. Επομένως, $x - y = 3(-k)$, και επειδή, $-k \in \mathbb{Z}$, έπεται ότι yRx.

Ισχύει η μεταβατική ιδιότητα. Πράγματι, αν $x, y, z \in \mathbb{N}$ με xRy και yRz, τότε υπάρχουν $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$ ώστε

$$y - x = 3k_1 \qquad \text{και} \qquad z - y = 3k_2.$$

Προσθέτοντας κατά μέλη προκύπτει ότι $z - x = 3(k_1 + k_2)$ και επειδή $k_1 + k_2 \in \mathbb{Z}$, έπεται ότι xRz.

Από τα προηγούμενα προκύπτει ότι η R είναι σχέση ισοδυναμίας. □

Λύση του (*ii*).

Η κλάση ισοδυναμίας του 2 είναι εξ ορισμού το σύνολο

$$\begin{aligned} C_2 &= \{x \in \mathbb{N} : 2Rx\} \\ &= \{x \in \mathbb{N} : x - 2 = 3k, k \in \mathbb{Z}\} \\ &= \{3k + 2 \in \mathbb{N} : k \in \mathbb{Z}\} \\ &= \{3k + 2 \in \mathbb{N} : k \in \mathbb{N}\} \\ &= \{2, 5, 8, 11, 14, \ldots\}. \end{aligned}$$

□

Παρατηρήστε ότι η κλάση C_5 του 5 ταυτίζεται με την C_2. Πράγματι,

$$\begin{aligned} C_5 = \{x \in \mathbb{N} : 5Rx\} &= \{x \in \mathbb{N} : x - 5 = 3k, k \in \mathbb{Z}\} \\ &= \{x \in \mathbb{N} : x - 2 = 3(k+1), k \in \mathbb{Z}\} = C_2 \end{aligned}$$

Το ίδιο συμβαίνει και για τις κλάσεις των στοιχείων $5, 8, 11, \ldots$ που ανήκουν στην C_2, δηλαδή $C_2 = C_5 = C_8 = C_{11} = \cdots$.

Λύση του (*iii*).

Το σύνολο C_2 αποτελεί μια κλάση του συνόλου πηλίκου $\mathbb{N}/_R$. Επειδή $C_2 \neq \mathbb{N}$, υπάρχουν και άλλες κλάσεις.
Διαλέγουμε ένα στοιχείο που δεν ανήκει στο C_2. Για παράδειγμα, το 1.

$$\begin{aligned} C_1 &= \{x \in \mathbb{N} : 1Rx\} = \{x \in \mathbb{N} : x - 1 = 3k, k \in \mathbb{Z}\} \\ &= \{3k + 1 \in \mathbb{N} : k \in \mathbb{Z}\} = \{1, 4, 7, 10, 13, \ldots\} \end{aligned}$$

Επειδή $C_1 \cup C_2 \neq \mathbb{N}$, υπάρχει και άλλη κλάση στην σχέση R.
Διαλέγουμε ένα στοιχείο που δεν ανήκει στο $C_1 \cup C_2$. Για παράδειγμα, το 3.

$$\begin{aligned} C_3 &= \{x \in \mathbb{N} : 3Rx\} = \{x \in \mathbb{N} : x - 3 = 3k, k \in \mathbb{Z}\} \\ &= \{3k + 3 \in \mathbb{N} : k \in \mathbb{Z}\} = \{0, 3, 6, 9, 12, \ldots\} \end{aligned}$$

Επειδή $C_1 \cup C_2 \cup C_3 = \mathbb{N}$, δεν υπάρχουν άλλες κλάσεις, οπότε $\mathbb{N}/_R = \{C_1, C_2, C_3\}$. □

Το σύνολο πηλίκο $\mathbb{N}/_R$ της προηγούμενης άσκησης μπορεί να προσδιορισθεί πιο απλά, βάσει των επόμενων παρατηρήσεων:
Ο ορισμός της σχέσης R:

$$xRy \Leftrightarrow y - x = 3k, k \in \mathbb{Z},$$

υπονοεί ότι τα x και y σχετίζονται (μέσω της R) ανν η (απόλυτη) διαφορά τους είναι πολλαπλάσιο του 3. Εφόσον τα x και y είναι φυσικοί, αυτό μπορεί να συμβεί μόνο στις εξής 3 περιπτώσεις:

$x = 3n$ και $y = 3m$, για κάποια $n, m \in \mathbb{N}$.

$x = 3n + 1$ και $y = 3m + 1$, για κάποια $n, m \in \mathbb{N}$.

$x = 3n + 2$ και $y = 3m + 2$, για κάποια $n, m \in \mathbb{N}$.

Οι τρεις αυτές περιπτώσεις αντιστοιχούν στις 3 κλάσεις $C_0 = C_3$, C_1 και C_2, διότι αν τα x και y δεν ανήκουν στην ίδια περίπτωση, τότε δεν σχετίζονται και επιπλέον δεν υπάρχουν άλλες περιπτώσεις για έναν φυσικό αριθμό.

Άσκηση 12 (Κυκλικές σχέσεις) (Θεωρητική άσκηση)

Μια σχέση R σε ένα σύνολο A, ονομάζεται **κυκλική** *αν για κάθε $a, b, c \in A$ με aRb και bRc έπεται ότι cRa.*
Να δειχθεί ότι μια σχέση R είναι σχέση ισοδυναμίας αν και μόνο αν είναι ανακλαστική και κυκλική.

Λύση.

Έστω ότι η σχέση R είναι σχέση ισοδυναμίας. Θα δείξουμε ότι είναι ανακλαστική και κυκλική.
Η R είναι ανακλαστική (αφού είναι σχέση ισοδυναμίας).
Θα δείξουμε ότι η R είναι και κυκλική.
Πράγματι, έστω $a, b, c \in A$ με aRb και bRc. Επειδή η R είναι συμμετρική έπεται ότι bRa και cRb. Επειδή η R είναι μεταβατική έπεται ότι cRa. Άρα, η σχέση R είναι κυκλική.

Λύση (συνέχεια).

Αντίστροφα, έστω ότι η σχέση R είναι ανακλαστική και κυκλική. Θα δείξουμε ότι η R είναι σχέση ισοδυναμίας.
Αρκεί να δείξουμε ότι είναι συμμετρική και μεταβατική.
Πράγματι, έστω $a, b \in R$ με aRb. Επειδή η R είναι ανακλαστική έπεται ότι bRb. Επειδή η R είναι κυκλική έπεται ότι bRa. Άρα, η R είναι συμμετρική.
Έστω $a, b, c \in R$ με aRb και bRc. Επειδή η R είναι κυκλική έπεται ότι cRa. Επειδή (όπως αποδείξαμε) η R είναι συμμετρική έπεται ότι aRc. Άρα, η R είναι μεταβατική. Άρα, η σχέση R είναι σχέση ισοδυναμίας. □

Απεικονίσεις

(i) Μια απεικόνιση $f : A \to B$ ονομάζεται $1-1$ όταν δύο οποιαδήποτε διαφορετικά πρότυπα έχουν διαφορετικές εικόνες, δηλαδή

$$\text{για κάθε } x_1, x_2 \in A \text{ με } x_1 \neq x_2 \Longrightarrow f(x_1) \neq f(x_2),$$

Ισοδύναμα για κάθε $x_1, x_2 \in A$ με $f(x_1) = f(x_2) \Longrightarrow x_1 = x_2$.
(ii) Μια απεικόνιση $f : A \to B$ ονομάζεται **επί** όταν κάθε στοιχείο του B είναι εικόνα κάποιου στοιχείου του A, δηλαδή όταν $B = R(f)$.
(iii) Μια απεικόνιση $f : A \to B$ ονομάζεται **αμφιμονοσήμαντη** όταν είναι $1-1$ και επί.

Άσκηση 13 (Συναρτήσεις 1-1, επι, αμφιμονοσήμαντες)

Σε ποιές από τις παρακάτω περιπτώσεις η συνάρτηση $f : A \to B$ είναι $1-1$, επί, ή αμφιμονοσήμαντη;
(i) $A = [0,1]$, $B = [5,9]$ *και* $f(x) = 3x+5$.
(ii) $A = [0,1]$, $B = [5,8]$ *και* $f(x) = 3x+5$.
(iii) $A = [-2,2]$, $B = [0,4]$ *και* $f(x) = x^2$.
(iv) $A = [0,2]$, $B = [\frac{1}{3},1]$ *και* $f(x) = \frac{1}{x+1}$.

Λύση: (i) Έστω $x_1, x_2 \in A = [0,1]$ με $f(x_1) = f(x_2)$ τότε

$$3x_1 + 5 = 3x_2 + 5 \Leftrightarrow 3x_1 = 3x_2 \Leftrightarrow x_1 = x_2$$

Άρα, η f είναι $1-1$.
Έστω $y \in B = [5,9]$ με $f(x) = y$ τότε

$$5 \leq y \leq 9 \Leftrightarrow 5 \leq 3x+5 \leq 9 \Leftrightarrow 0 \leq 3x \leq 4 \Leftrightarrow 0 \leq x \leq \frac{4}{3}$$

Επομένως, συμπεραίνουμε ότι υπάρχουν $y \in B$ τα οποία δεν είναι εικόνα κανενός προτύπου του A δηλαδή η f δεν είναι επί. Για παράδειγμα, δεν υπάρχει $x \in A$ ώστε $f(x) = 9$. Πράγματι,
$f(x) = 9 \Leftrightarrow 3x+5 = 9 \Leftrightarrow x = \frac{4}{3} \notin A$.
Η f δεν είναι αμφιμονοσήμαντη.

(ii) (Όμοιο με το (i)) Έστω $x_1, x_2 \in A = [0, 1]$ με $f(x_1) = f(x_2)$ τότε

$$3x_1 + 5 = 3x_2 + 5 \Leftrightarrow 3x_1 = 3x_2 \Leftrightarrow x_1 = x_2$$

Άρα, η f είναι $1-1$.
Έστω $y \in B = [5, 8]$ με $f(x) = y$ τότε

$$5 \leq y \leq 8 \Leftrightarrow 5 \leq 3x + 5 \leq 8 \Leftrightarrow 0 \leq 3x \leq 3 \Leftrightarrow 0 \leq x \leq 1.$$

Επομένως, η f είναι επί αφού για κάθε $y \in [5, 8]$ υπάρχει $x \in [0, 1]$ ώστε $f(x) = y$. Πράγματι, από την εξίσωση $y = 3x + 5$ προκύπτει ότι $x = \dfrac{y-5}{3}$.
Άρα, η f είναι αμφιμονοσήμαντη.

(iii) Έστω $x_1, x_2 \in A = [-2, 2]$ με $f(x_1) = f(x_2)$ τότε

$$x_1^2 = x_2^2 \Leftrightarrow x_1^2 - x_2^2 = 0 \Leftrightarrow (x_1 - x_2)(x_1 + x_2) = 0$$

Επομένως, αν $x_2 = -x_1$ τότε $f(x_1) = f(x_2)$ δηλαδή η f δεν είναι $1-1$.
Εναλλακτικά, αρκεί να παρατηρήσουμε ότι $f(1) = f(-1) = 1$, οπότε η f δεν είναι $1-1$.
Έστω $y \in B = [0, 4]$ με $f(x) = y$ τότε

$$0 \leq y \leq 4 \Leftrightarrow 0 \leq x^2 \leq 4 \Leftrightarrow 0 \leq |x| \leq 2 \Leftrightarrow -2 \leq x \leq 2$$

Επομένως, η f είναι επί αφού για κάθε $y \in [0, 4]$ υπάρχει $x \in [-2, 2]$ ώστε $f(x) = y$. Πράγματι, από την εξίσωση $y = x^2$ προκύπτει ότι $x = \pm\sqrt{y}$.
Η f δεν είναι αμφιμονοσήμαντη.

(iv) Έστω $x_1, x_2 \in A = [0,2]$ με $f(x_1) = f(x_2)$ τότε

$$\frac{1}{x_1+1} = \frac{1}{x_2+1} \Leftrightarrow x_1 + 1 = x_2 + 1 \Leftrightarrow x_1 = x_2$$

Άρα, η f είναι $1-1$.

Έστω $y \in B = [\frac{1}{3}, 1]$ με $f(x) = y$ τότε

$$\frac{1}{3} \leq y \leq 1 \Leftrightarrow \frac{1}{3} \leq \frac{1}{x+1} \leq 1 \Leftrightarrow 1 \leq x+1 \leq 3 \Leftrightarrow 0 \leq x \leq 2$$

Επομένως, η f είναι επί αφού για κάθε $y \in [\frac{1}{3}, 1]$ υπάρχει $x \in [0,2]$ ώστε $f(x) = y$. Πράγματι, από την εξίσωση $y = \dfrac{1}{x+1}$ προκύπτει ότι $x = \dfrac{1}{y} - 1$.

Η f είναι αμφιμονοσήμαντη.

Άσκηση 14

Να εξετασθεί αν η απεικόνιση $f(x) = x^2 + x + 1/\mathbb{R}$ είναι ένα προς ένα.

Λύση.

Ο ισχυρισμός είναι λάθος. Είναι

$$\begin{aligned} f(x) = f(y) &\Leftrightarrow x^2 + x + 1 = y^2 + y + 1 \Leftrightarrow x^2 - y^2 + x - y = 0 \\ &\Leftrightarrow (x - y)(x + y) + x - y = 0 \\ &\Leftrightarrow (x - y)(x + y + 1) = 0 \end{aligned}$$

Αν λοιπόν επιλέξουμε x, y τέτοια ώστε $x \neq y$ και $x + y = -1$, π.χ. $x = 0$ και $y = -1$, τότε $f(-1) = (-1)^2 + (-1) + 1 = 1$ και $f(0) = 0^2 + 0 + 1 = 1$. □

Άσκηση 15

Δίνονται τα σύνολα $A = \{2^3, 2^4, 2^5, \ldots\}$ *και* $B = \{4^6, 4^8, 4^{10}, \ldots\}$. *Να δοθεί μια αμφιμονοσήμαντη απεικόνιση* $f : A \to B$.

Λύση.

Απεικονίζουμε το τυχαίο στοιχείο 2^n, $n \in \mathbb{N}^*$, του A στο 4^{2n}, δηλαδή ορίζουμε $f(2^n) = 4^{2n}$.
Επειδή $4^{2n} = (2^2)^{2n} = 2^{4n} = (2^n)^4$, η f ορίζεται ισοδύναμα από τον τύπο $f(x) = x^4$.
Το τυχαίο στοιχείο y του B είναι της μορφής $y = 4^{2n}$. Το στοιχείο αυτό είναι εικόνα του $x = 2^n \in A$, άρα η f είναι επί. Επιπλέον, η f είναι και ένα προς ένα, διότι το x είναι το μοναδικό πρότυπο για το y. Πράγματι, αν υπάρχει και άλλο πρότυπο $x' = 2^m$ με $f(x') = y$, τότε

$$y = 4^{2n} = f(x') = f(2^m) = 4^{2m} \Rightarrow 2n = 2m \Rightarrow n = m \Rightarrow x = x'. \qquad \square$$

Χαρακτηριστική συνάρτηση συνόλου

Αν A είναι ένα μη κενό υποσύνολο ενός συνόλου E τότε η απεικόνιση $f : E \to \{0, 1\}$ με

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{αν } x \in A \\ 0, & \text{αν } x \notin A \end{cases}$$

ονομάζεται **χαρακτηριστική συνάρτηση του** A και συμβολίζεται με μ_A (ή χ_A).

Παράδειγμα

$E = [10]$, $A = \{1, 3, 7, 8, 9\}$, $B = \{2, 3, 5, 9, 10\}$, $A \cap B = \{3, 9\}$, $A \cup B = \{1, 2, 3, 5, 7, 8, 9, 10\}$.

Στην περίπτωση αυτή, η χαρακτηριστική συνάρτηση οποιουδήποτε υποσυνόλου F του E μπορεί να αναπαρασταθεί από μια 10-άδα (δυαδική λέξη)

$$\mu_F = (\mu_F(1), \mu_F(2), \dots, \mu_F(10))$$

οπότε

$$\begin{aligned}
\mu_A &= (1, 0, 1, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 0) \\
\mu_B &= (0, 1, 1, 0, 1, 0, 0, 0, 1, 1) \\
\mu_{A \cap B} &= (0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0) \\
\mu_{A \cup B} &= (1, 1, 1, 0, 1, 0, 1, 1, 1, 1)
\end{aligned}$$

Άσκηση 16 (Χαρακτηριστική συνάρτηση)

Να αποδειχθούν τα παρακάτω
(i) $A = B$ *αν και μόνο αν* $\mu_A(x) = \mu_B(x)$, $\forall x \in E$.
(ii) $A \subseteq B$ *αν και μόνο αν* $\mu_A(x) \leq \mu_B(x)$, $\forall x \in E$.
(iii) $\mu_A(x) + \mu_{\overline{A}}(x) = 1$ *για κάθε* $x \in E$.
(iv) $\mu_{A\cup B}(x) = \max\{\mu_A(x), \mu_B(x)\} = \mu_A(x) + \mu_B(x) - \mu_{A\cap B}(x)$, $\forall x \in E$.
(v) $\mu_{A\cap B}(x) = \min\{\mu_A(x), \mu_B(x)\} = \mu_A(x) \cdot \mu_B(x)$, $\forall x \in E$.
(Υπόδειξη: Διακρίνετε περιπτώσεις για το $x \in E$*)*

Λύση της (iv) Έστω $x \in E$. Διακρίνουμε τις παρακάτω 4 περιπτώσεις για το x.

- $x \in A$, $x \in B$. Τότε $x \in A \cup B$ και $x \in A \cap B$.
  Οπότε $\mu_{A\cup B}(x) = 1$, $\max\{\mu_A(x), \mu_B(x)\} = \max\{1, 1\} = 1$ και
  $\mu_A(x) + \mu_B(x) - \mu_{A\cap B}(x) = 1 + 1 - 1 = 1$.
- $x \in A$, $x \notin B$. Τότε $x \in A \cup B$ και $x \notin A \cap B$.
  Οπότε $\mu_{A\cup B}(x) = 1$, $\max\{\mu_A(x), \mu_B(x)\} = \max\{1, 0\} = 1$ και
  $\mu_A(x) + \mu_B(x) - \mu_{A\cap B}(x) = 1 + 0 - 0 = 1$.

- $x \notin A$, $x \in B$. Τότε $x \in A \cup B$ και $x \notin A \cap B$.
  Οπότε $\mu_{A \cup B}(x) = 1$, $\max\{\mu_A(x), \mu_B(x)\} = \max\{0, 1\} = 1$ και $\mu_A(x) + \mu_B(x) - \mu_{A \cap B}(x) = 0 + 1 - 0 = 1$.
- $x \notin A$, $x \notin B$. Τότε $x \notin A \cup B$ και $x \notin A \cap B$.
  Οπότε $\mu_{A \cup B}(x) = 0$, $\max\{\mu_A(x), \mu_B(x)\} = \max\{0, 0\} = 0$ και $\mu_A(x) + \mu_B(x) - \mu_{A \cap B}(x) = 0 + 0 - 0 = 0$.

Επομένως, η σχέση
$\mu_{A \cup B}(x) = \max\{\mu_A(x), \mu_B(x)\} = \mu_A(x) + \mu_B(x) - \mu_{A \cap B}(x)$ ισχύει για κάθε $x \in E$.

Εικόνες συνόλων

Αν $f : A \to B$ είναι μια απεικόνιση και $\Gamma \subseteq A$, $\Delta \subseteq B$ τότε τα σύνολα

$$f(\Gamma) = \{y \in B : \text{ υπάρχει } x \in \Gamma \text{ με } y = f(x)\} = \{f(x) : x \in \Gamma\}$$

και

$$f^{-1}(\Delta) = \{x \in A : f(x) \in \Delta\}$$

ονομάζονται αντίστοιχα **εικόνα** του Γ και **αντίστροφη εικόνα** του Δ.

Άσκηση 17 (Εικόνες συνόλων)

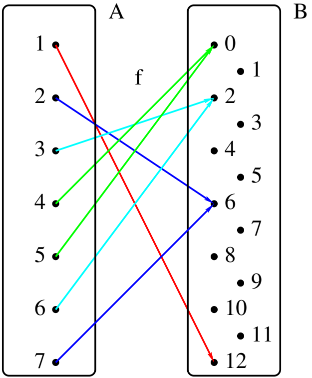
Έστω $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\} = [7]$, $B = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\} = \{0\} \cup [12]$ *και* $f : A \to B$ *με*

$$f(x) = (x - 5)(x - 4).$$

Να βρεθούν τα σύνολα
i) $f(A)$, $f(\{3, 4\})$, $f(\emptyset)$, $f(\{1, 2, 6\})$,
ii) $f^{-1}(B)$, $f^{-1}(\{2\})$, $f^{-1}(\{0\})$, $f^{-1}(\{0, 2\})$, $f^{-1}(\{12\})$, $f^{-1}(\{9\})$, $f^{-1}(\{4, 5, 6\})$.

Λύση: Ισχύει ότι

i) $f(A) = \{f(n) : n \in A\} = \{f(1), f(2), f(3), f(4), f(5), f(6), f(7)\} = \{12, 6, 2, 0, 0, 2, 6\} = \{0, 2, 6, 12\}$.



$f(\{3, 4\}) = \{f(3), f(4)\} = \{2, 0\}$.

$f(\emptyset) = \emptyset$.

$f(\{1, 2, 6\}) = \{f(1), f(2), f(6)\} = \{12, 6, 2\}$.

ii) $f^{-1}(B) = A$.
$f^{-1}(\{2\}) = \{3, 6\}$, διότι $f(3) = f(6) = 2$ και $f(x) \neq 2$ για κάθε $x \in A$ με $x \neq 3, 6$.
$f^{-1}(\{0\}) = \{4, 5\}$, διότι $f(4) = f(5) = 0$ και $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in A$ με $x \neq 4, 5$.
$f^{-1}(\{0, 2\}) = f^{-1}(\{0\}) \cup f^{-1}(\{2\}) = \{3, 6\} \cup \{4, 5\} = \{3, 4, 5, 6\}$.
$f^{-1}(\{12\}) = \{1\}$, διότι $f(1) = 12$ και $f(x) \neq 12$ για κάθε $x \in A$ με $x \neq 1$.
$f^{-1}(\{9\}) = \emptyset$, διότι $f(x) \neq 9$ για κάθε $x \in A$.
$f^{-1}(\{4, 5, 6\}) = f^{-1}(\{4\}) \cup f^{-1}(\{5\}) \cup f^{-1}(\{6\}) = \emptyset \cup \emptyset \cup \{2, 7\} = \{2, 7\}$.

Άσκηση 18 (Εικόνες $1-1$ συναρτήσεων)

Έστω $f : A \to B$. Να δειχθεί ότι η f είναι $1-1$ αν και μόνο αν $f^{-1}(f(\Gamma)) = \Gamma$, για κάθε $\Gamma \subseteq A$.

Λύση.

Έστω ότι η απεικόνιση f είναι $1-1$; θα δειχθεί ότι $f^{-1}(f(\Gamma)) = \Gamma$. Επειδή για κάθε απεικόνιση f ισχύει ότι $\Gamma \subseteq f^{-1}(f(\Gamma))$, αρκεί να δειχθεί ότι $f^{-1}(f(\Gamma)) \subseteq \Gamma$. Πράγματι, αν $x \in f^{-1}(f(\Gamma))$, τότε $f(x) \in f(\Gamma)$ οπότε θα υπάρχει $\xi \in \Gamma$ με $f(x) = f(\xi)$. Επειδή η συνάρτηση f είναι $1-1$ έπεται ότι $x = \xi$, οπότε $x \in \Gamma$.
Αντίστροφα, αν $f^{-1}(f(\Gamma)) = \Gamma$ για κάθε $\Gamma \subseteq A$, θα δειχθεί ότι η f είναι $1-1$. Πραγματικά, αν $x_1, x_2 \in A$ με $f(x_1) = f(x_2)$, εφαρμόζουμε τη δοσμένη ισότητα για $\Gamma = \{x_1\}$, οπότε προκύπτει ότι
$x_2 \in f^{-1}(f(\{x_1\})) = \{x_1\}$ και επομένως $x_1 = x_2$. □