Σήμερα: Ασκήσεις στην Συνδυαστική

Συνδυαστική

Μαθηματικά των Υπολογιστών

2024-2025

~~9010~~ 10

Άσκηση 1

1000-9999

Να υπολογισθεί το πλήθος των 4-ψήφιων αριθμών που μπορούμε να κατασκευάσουμε με τα ψηφία $\{0, 1, 3, 6, 7, 8, 9\}$ όταν

i) τα ψηφία τους μπορούν να επαναλαμβάνονται

Κάθε 4-ψήφιος αριθμός καθορίζεται μοναδικά να επιλέξουμε τα 4 ψηφία του.

$$\underset{x}{\underline{\quad}}\ \underset{y}{\underline{\quad}}\ \underset{z}{\underline{\quad}}\ \underset{w}{\underline{\quad}} \qquad \{0, 1, 3, 6, 7, 8, 9\}$$

Για το x υπάρχουν 6 επιλογές (το 0 εξαιρείται).
Για το y υπάρχουν 7 επιλογές.
Για το z υπάρχουν 7 επιλογές.
Για το w υπάρχουν 7 επιλογές.
Άρα, από την πολλαπλασιαστική αρχή υπάρχουν $6 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 = 2058$ τρόποι επιλογής των $xyzw$.

Υπενθύμιση: Πολλαπλασιαστική αρχή

Αν υπάρχουν k τρόποι να διαλέξουμε ένα στοιχείο x του συνόλου A και υπάρχουν λ τρόποι να διαλέξουμε ένα στοιχείο y του συνόλου B τότε υπάρχουν $k \cdot \lambda$ τρόποι να διαλέξουμε ένα ζεύγος $(x, y) \in A \times B$.

Για παράδειγμα, αν $A = \{x_1, x_2, x_3\}$ και $B = \{y_1, y_2\}$ τότε

$A \times B = \{(x_1, y_1), (x_1, y_2), (x_2, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_1), (x_3, y_2)\}$

και

$|A \times B| = 6 = 3 \cdot 2 = |A| \cdot |B|$

Γενικότερα, $|A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_k| = |A_1| \cdot |A_2| \cdots |A_k|$

Άσκηση 1

Να υπολογισθεί το πλήθος των 4-ψήφιων αριθμών που μπορούμε να κατασκευάσουμε με τα ψηφία $\{0, 1, 3, 6, 7, 8, 9\}$ *όταν*

ii) τα ψηφία τους πρέπει να είναι διαφορετικά

$$\underline{\quad}_{x} \;\; \underline{\quad}_{y} \;\; \underline{\quad}_{z} \;\; \underline{\quad}_{w} \qquad \{0, 1, 3, 6, 7, 8, 9\}$$

Για το x *υπάρχουν* 6 *επιλογές (το* 0 *εξαιρείται)*
Για το y *υπάρχουν* 6 *επιλογές (εξαιρείται το* x*)*
Για το z *υπάρχουν* 5 *επιλογές (εξαιρούνται τα* x, y*)*
Για το w *υπάρχουν* 4 *επιλογές (εξαιρούνται τα* x, y, z*)*
Άρα, από την πολλαπλασιαστική αρχή υπάρχουν $6 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 = 720$ *τρόποι επιλογής των* $xyzw$.

Άσκηση 1

Να υπολογισθεί το πλήθος των 4-ψήφιων αριθμών που μπορούμε να κατασκευάσουμε με τα ψηφία $\{0, 1, 3, 6, 7, 8, 9\}$ *όταν*

iii) δεν επιτρέπονται επαναλήψεις και οι αριθμοί πρέπει να είναι περιττοί (δηλαδή το τελευταίο τους ψηφίο είναι ή 1 ή 3 ή 7 ή 9)

$\underline{\quad}\ \underline{\quad}\ \underline{\quad}\ \underline{\quad}$

$x \quad y \quad z \quad w$ $\qquad \{0, \underline{1}, \underline{3}, 6, \underline{7}, 8, \underline{9}\}$

Ένας αριθμός είναι περιττός όταν το τελευταίο ψηφίο του είναι περιττός.

1η προσπάθεια: ✓

Για το x υπάρχουν 6 *επιλογές (το* 0 *εξαιρείται)*

Για το y υπάρχουν 6 *επιλογές (εξαιρείται το x)*

Για το z υπάρχουν 5 *επιλογές (εξαιρούνται τα x, y)*

Για το w υπάρχουν ? επιλογές

Δεν μπορούμε να απαντήσουμε για το <u>*w*</u> *διότι δεν γνωρίζουμε πόσα περιττά ψηφία έχουμε χρησιμοποιήσει για τα* <u>*x, y, z*</u>.

697.~

.... 801

Άσκηση 1

Να υπολογισθεί το πλήθος των 4-ψήφιων αριθμών που μπορούμε να κατασκευάσουμε με τα ψηφία $\{0, 1, 3, 6, 7, 8, 9\}$ *όταν*

iii) *δεν επιτρέπονται επαναλήψεις και οι αριθμοί πρέπει να είναι περιττοί*

Εμπειρικός κανόνας: Ξεκινάμε από την πιο εξειδικευμένη συνθήκη.

$\underset{x}{5}\ \underset{y}{5}\ \underset{z}{4}\ \underset{w}{4}$

2η προσπάθεια:

Για το w *υπάρχουν* 4 *επιλογές (ένα από τα* 1, 3, 7, 9*)*

Για το x *υπάρχουν* 5 *επιλογές (εξαιρούνται τα* 0, w*)*

Για το y *υπάρχουν* 5 *επιλογές (εξαιρούνται τα* x, w*)*

Για το z *υπάρχουν* 4 *επιλογές (εξαιρούνται τα* x, y, w*)*

Άρα, από την πολλαπλασιαστική αρχή υπάρχουν $4 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 4 = 400$ *αριθμοί.*

Άσκηση 1

Να υπολογισθεί το πλήθος των 4-ψήφιων αριθμών που μπορούμε να κατασκευάσουμε με τα ψηφία $\{0, 1, 3, 6, 7, 8, 9\}$ όταν

iv) δεν επιτρέπονται επαναλήψεις και το άθροισμα του τρίτου και τέταρτου ψηφίου ισούται με 9.

$$\underset{x}{\_\_} \quad \underset{y}{\_\_} \quad \underset{z}{\_\_} \quad \underset{w}{\_\_} \qquad \{0, 1, 3, 6, 7, 8, 9\}$$

Θα αρχίσουμε να καθορίζουμε τους 4-ψήφιους αριθμούς από το ζευγάρι zw και έπειτα θα καθορίσουμε τα υπόλοιπα δύο ψηφία x και y.

Για το ζευγάρι (z, w) έχουμε τις παρακάτω επιλογές.

$$(0, 9), (1, 8), (3, 6), (6, 3), (8, 1), (9, 0)$$

Παρατηρούμε ότι ο υπολογισμός των επιλογών για το x εξαρτάται από το εάν έχουμε επιλέξει ή όχι το ψηφίο 0 για το ζεύγος (z, w).

Θα διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:

* Το ζεύγος (z, w) περιέχει το 0.
  Για το ζευγάρι (z, w) υπάρχουν 2 επιλογές (τα ζεύγη $(0, 9)$, $(9, 0)$)
  Για το x υπάρχουν 5 επιλογές (εξαιρούνται τα 9, 0)
  Για το y υπάρχουν 4 επιλογές (εξαιρούνται τα 9, 0, x)
  Άρα, στην περίπτωση αυτή, από την πολλαπλασιαστική αρχή υπάρχουν $2 \cdot 5 \cdot 4 = 40$ αριθμοί.
* Το ζεύγος (z, w) δεν περιέχει το 0.
  Για το ζευγάρι (z, w) υπάρχουν 4 επιλογές (τα ζεύγη $(1, 8)$, $(3, 6)$, $(6, 3)$, $(8, 1)$)
  Για το x υπάρχουν 4 επιλογές (εξαιρούνται τα 0, z, w)
  Για το y υπάρχουν 4 επιλογές (εξαιρούνται τα x, z, w)
  Άρα, στην περίπτωση αυτή, από την πολλαπλασιαστική αρχή υπάρχουν $4 \cdot 4 \cdot 4 = 64$ αριθμοί.

Άρα, συνολικά για όλες τις περιπτώσεις υπάρχουν $40 + 64 = 104$ αριθμοί.

Άσκηση 2

$\boxed{A}\boxed{\Delta}$ $A+\Delta$ $A\cdot\Delta$

Σε ένα τουρνουά συμμετέχουν 34 *αθλητές από διάφορες χώρες:* 6 *Έλληνες,* 7 *Γερμανοί,* 6 *Ιταλοί,* 5 *Άγγλοι,* 10 *Κινέζοι. Να βρεθεί με πόσους τρόπους μπορούμε να σχηματίσουμε μια* 7*-μελή ομάδα όταν*

i) *δεν υπάρχουν περιορισμοί.*

$\underline{x_1}\ \underline{x_2}\ \underline{x_3}\ \underline{x_4}\ \underline{x_5}\ \underline{x_6}\ \underline{x_7}$

$\binom{34}{7} = \frac{34!}{7!\,27!} = \frac{34\cdot33\cdot32\cdot31\cdot30\cdot29\cdot28}{7!}$ *Υπενθύμιση:* $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$

ii) *η ομάδα αποτελείται από* 2 *Έλληνες,* 2 *Κινέζους και* 3 *Γερμανούς.*

Για τους δύο Έλληνες έχουμε $\binom{6}{2}$ *επιλογές (από τους* 6 *επιλέγουμε* 2*)*
Για τους δύο Κινέζους έχουμε $\binom{10}{2}$ *επιλογές*
Για τους τρεις Γερμανούς έχουμε $\binom{7}{3}$ *επιλογές.*
Άρα, από την πολλαπλασιαστική αρχή έχουμε $\binom{6}{2}\binom{10}{2}\binom{7}{3}$ *τρόπους δημιουργίας της ομάδας.*

$\_\ \_\ |\ \_\ \_\ |\ \_\ \_\ \_$

Άσκηση 2

Σε ένα τουρνουά συμμετέχουν 34 αθλητές από διάφορες χώρες: 6 Έλληνες, 7 Γερμανοί, 6 Ιταλοί, 5 Άγγλοι, 10 Κινέζοι. Να βρεθεί με πόσους τρόπους μπορούμε να σχηματίσουμε μια 7-μελή ομάδα όταν

iii) *η ομάδα έχει αρχηγό (δηλαδή ένα από τα μέλη της θεωρείται ως αρχηγός).*

1ος τρόπος: *Αρχικά επιλέγουμε ποιοι θα συμμετέχουν στην ομάδα: Υπάρχουν* $\binom{34}{7}$ *επιλογές.*
Στην συνέχεια επιλέγουμε 1 άτομο από τους 7 για αρχηγό: Υπάρχουν $\binom{7}{1} = 7$ *επιλογές για τον αρχηγό.*
Από την αρχή του γινομένου υπάρχουν $\binom{34}{7}\binom{7}{1}$ *τρόποι σχηματισμού της ομάδας.*
2ος τρόπος: *Αρχικά επιλέγουμε τον αρχηγό: Υπάρχουν* $\binom{34}{1}$ *επιλογές. Στην συνέχεια επιλέγουμε τα υπόλοιπα 6 μέλη: Υπάρχουν* $\binom{33}{6}$ *επιλογές.*
Από την αρχή του γινομένου υπάρχουν $\binom{34}{1}\binom{33}{6}$ *τρόποι σχηματισμού της ομάδας.*

Παρατήρηση: Οι αριθμοί που υπολογίσαμε με τους δύο τρόπους είναι ίσοι: $\binom{34}{7}\binom{7}{1} = \binom{34}{1}\binom{34-1}{7-1} = \binom{34}{1}\binom{33}{6}$. Υπενθύμιση: $\binom{a}{b}\binom{b}{c} = \binom{a}{c}\binom{a-c}{b-c}$

Άσκηση 2

Σε ένα τουρνουά συμμετέχουν 34 *αθλητές από διάφορες χώρες:* 6 *Έλληνες,* 7 *Γερμανοί,* 6 *Ιταλοί,* 5 *Άγγλοι,* 10 *Κινέζοι. Να βρεθεί με πόσους τρόπους μπορούμε να σχηματίσουμε μια* 7*-μελή ομάδα όταν*

iv) στην ομάδα δεν πρέπει να συμμετέχουν Ιταλοί.

$$\binom{34-6}{7} = \binom{28}{7}$$

I_1, I_2 + άλλους 5 $\qquad$ I_2, I_1 + άλλους 5

Άσκηση 2

Σε ένα τουρνουά συμμετέχουν 34 *αθλητές από διάφορες χώρες:* 6 *Έλληνες,* 7 *Γερμανοί,* 6 *Ιταλοί,* 5 *Άγγλοι,* 10 *Κινέζοι. Να βρεθεί με πόσους τρόπους μπορούμε να σχηματίσουμε μια* 7*-μελή ομάδα όταν*

v) στην ομάδα πρέπει να συμμετέχει τουλάχιστον ένας Ιταλός.

ΣΥΝΗΘΙΣΜΕΝΗ ΛΑΘΟΣ ΑΠΑΝΤΗΣΗ:
Έχουμε $\binom{6}{1}$ *τρόπους να διαλέξουμε ένα Ιταλό.*
Έχουμε $\binom{33}{6}$ *τρόπους να επιλέγουμε τα υπόλοιπα* 6 *μέλη.*
Άρα, από την αρχή του γινομένου, έχουμε $\binom{6}{1}\binom{33}{6}$ *τρόπους σχηματισμού της ομάδας.*
Η λύση αυτή δεν είναι σωστή διότι κάποιες ομάδες τις μετράμε πάνω από μια φορά. (Ενώ είναι ίδιες τις μετράμε ως διαφορετικές.)

$I_1, I_2, I_3, I_4, I_5, I_6$
Με τον λάθος τροπο θα μετρήσουμε την ίδια ομάδα πάνω από μια φορά :

$\binom{6}{1}\binom{33}{6}$ $\quad$ $\binom{6}{1}\binom{33}{6}$

$\{I_1, I_3, \ldots\}$ $\quad$ $\{I_3, I_1, \ldots\}$

Για να το δούμε αυτό αναλυτικά υποθέστε ότι έχουμε στην διάθεσή μας 3 Έλληνες: E_1, E_2, E_3 και 2 Ιταλούς: I_1, I_2 και ότι θέλουμε να φτιάξουμε μια ομάδα 2 άτομα η οποία περιέχει τουλάχιστον ένα Ιταλό.

Η λανθασμένη μέθοδος υπολογίζει ότι υπάρχουν $\binom{2}{1}\binom{3+1}{1} = 2 \cdot 4 = 8$ ομάδες.

Στην πραγματικότητα υπάρχουν 7 ομάδες: $I_1 - E_1$, $I_1 - E_2$, $I_1 - E_3$, $I_1 - I_2$, $I_2 - E_1$, $I_2 - E_2$, $I_2 - E_3$. Η ομάδα $I_1 - I_2$ μετριέται δύο φορές με τον λανθασμένο τρόπο.

ν') Στην ομάδα πρέπει να συμμετέχουν τουλάχιστον 3 Ιταλοί

1ος τρόπος λύσης (Με το συμπληρωματικό σύνολο)

#7-μελών ομάδων που έχουν τουλάχιστον 3 Ιταλούς =

= #7-μελών ομάδων χωρίς περιορισμούς − #7-μελων ομάδων που έχουν το πολυ 2 Ιταλους

= $\binom{34}{7}$ − (#7-μελών ομάδων με 2 Ιταλους + #7-μελών ομάδων με 1 Ιταλό + #7-μελών ομάδων με 0 Ιταλούς)

$$= \binom{34}{7} - \left(\binom{6}{2}\binom{28}{5} + \binom{6}{1}\binom{28}{6} + \binom{6}{0}\binom{28}{7} \right)$$

2ος τρόπος λύσης

Διακρίνουμε περιπτώσεις ως προς τον αριθμο των Ιταλών

1η περίπτωση: Ακριβώς 3 Ιταλοί στην ομάδα.

Υπάρχουν $\binom{6}{3}\binom{28}{4}$ τρόποι

2η περίπτωση: Ακριβως 4 Ιταλοί στην ομάδα

Υπάρχουν $\binom{6}{4}\binom{28}{3}$ τρόποι

3η περίπτωση: Ακριβώς 5 Ιταλοί στην ομάδα

Υπάρχουν $\binom{6}{5}\binom{28}{2}$ τρόποι

4η περίπτωση: Ακριβώς 6 Ιταλοί στην ομάδα

Υπάρχουν $\binom{6}{6}\binom{28}{1}$ τρόποι.

Συνολικά, υπάρχουν $\binom{6}{3}\binom{28}{4}+\binom{6}{4}\binom{28}{3}+\binom{6}{5}\binom{28}{2}+\binom{6}{6}\binom{28}{1}$

διαφορετικές ομάδες

Άσκηση 2

Σε ένα τουρνουά συμμετέχουν 34 αθλητές από διάφορες χώρες: 6 Έλληνες, 7 Γερμανοί, 6 Ιταλοί, 5 Άγγλοι, 10 Κινέζοι. Να βρεθεί με πόσους τρόπους μπορούμε να σχηματίσουμε μια 7-μελή ομάδα όταν

v) στην ομάδα πρέπει να συμμετέχει τουλάχιστον ένας Ιταλός.

1ος τρόπος: *Οι επταμελείς ομάδες (χωρίς περιορισμούς) διαμερίζονται σε αυτές που περιέχουν τουλάχιστον ένα Ιταλό και σε αυτές που δεν περιέχουν κανένα Ιταλό.*

Άρα, ο αριθμός των ομάδων που περιέχουν τουλάχιστον έναν Ιταλό = αριθμός των ομάδων χωρίς περιορισμό − αριθμός ομάδων που δεν περιέχουν κανένα κανένα Ιταλό $= \binom{34}{7} - \binom{28}{7}$.

Άσκηση 2

Σε ένα τουρνουά συμμετέχουν 34 *αθλητές από διάφορες χώρες:* 6 *Έλληνες,* 7 *Γερμανοί,* 6 *Ιταλοί,* 5 *Άγγλοι,* 10 *Κινέζοι. Να βρεθεί με πόσους τρόπους μπορούμε να σχηματίσουμε μια* 7*-μελή ομάδα όταν*

v) *στην ομάδα πρέπει να συμμετέχει τουλάχιστον ένας Ιταλός.*

2ος τρόπος: *Διακρίνουμε περιπτώσεις για τον αριθμό των Ιταλών που συμμετέχουν στην ομάδα:*

- *Ακριβώς* 1 *Ιταλός:* $\binom{6}{1}\binom{28}{6}$
- *Ακριβώς* 2 *Ιταλοί:* $\binom{6}{2}\binom{28}{5}$
- *Ακριβώς* 3 *Ιταλοί:* $\binom{6}{3}\binom{28}{4}$
- *Ακριβώς* 4 *Ιταλοί:* $\binom{6}{4}\binom{28}{3}$
- *Ακριβώς* 5 *Ιταλοί:* $\binom{6}{5}\binom{28}{2}$
- *Ακριβώς* 6 *Ιταλοί:* $\binom{6}{6}\binom{28}{1}$

Τουλάχιστον 1 Ιταλός

1	2	3	4	5	6
Ιταλός	Ιταλοί	Ιταλοί	Ιταλοί	Ιταλοί	Ιταλοί

Άρα, συνολικά για όλες τις περιπτώσεις υπάρχουν

$$\binom{6}{1}\binom{28}{6} + \binom{6}{2}\binom{28}{5} + \binom{6}{3}\binom{28}{4} + \binom{6}{4}\binom{28}{3} + \binom{6}{5}\binom{28}{2} + \binom{6}{6}\binom{28}{1} =$$

$\sum_{i=1}^{6}\binom{6}{k}\binom{28}{7-k}$ *τρόποι σχηματισμού της ομάδας.*

$$\sum_{k=1}^{6}\binom{6}{k}\binom{28}{7-k}$$

Παρατήρηση: Ισχύει ότι $\sum_{k=0}^{c} \binom{a}{k} \binom{b}{c-k} = \binom{a+b}{c}$

Άσκηση 2

Σε ένα τουρνουά συμμετέχουν 34 αθλητές από διάφορες χώρες: 6 Έλληνες, 7 Γερμανοί, 6 Ιταλοί, 5 Άγγλοι, 10 Κινέζοι. Να βρεθεί με πόσους τρόπους μπορούμε να σχηματίσουμε μια 7-μελή ομάδα όταν

vi) *η ομάδα περιέχει το πολύ ένα Ιταλό.*

Διακρινούμε δύο περιπτώσεις:

* *Η ομάδα περιέχει ακριβώς 1 Ιταλό.*
  Υπάρχουν $\binom{6}{1}\binom{28}{6}$
* *Η ομάδα δεν περιέχει κανένα Ιταλό.*
  Υπάρχουν $\binom{6}{0}\binom{28}{7}$.

Άρα, συνολικά για όλες τις περιπτώσεις υπάρχουν $\binom{6}{1}\binom{28}{6} + \binom{6}{0}\binom{28}{7}$ *τρόποι σχηματισμού της ομάδας.*

Άσκηση 2

Σε ένα τουρνουά συμμετέχουν 34 αθλητές από διάφορες χώρες: 6 Έλληνες, 7 Γερμανοί, 6 Ιταλοί, 5 Άγγλοι, 10 Κινέζοι. Να βρεθεί με πόσους τρόπους μπορούμε να σχηματίσουμε μια 7-μελή ομάδα όταν

vii) *η ομάδα έχει αρχηγό και είναι Ιταλός.*

Αρχηγός Μέλος:
I_1 I_3
I_3 I_1

Για τον Ιταλό αρχηγό υπάρχουν $\binom{6}{1} = 6$ *επιλογές.*
Για τα υπόλοιπα 6 μέλη υπάρχουν $\binom{33}{6}$ *επιλογές.*
Άρα, από την πολλαπλασιαστική αρχή υπάρχουν $6 \cdot \binom{33}{6}$ *τρόποι σχηματισμού της ομάδας.*

Για τον αρχηγό: $\binom{34}{1} = 34$ επιλογές
Για τον υπαρχηγό: $\binom{33}{1} = 33$ επιλογές
Για τα υπόλοιπα 5: $\binom{32}{5}$ επιλογές

viii) *η ομάδα έχει αρχηγό και υπαρχηγό.*

Για τον αρχηγό υπάρχουν $\binom{34}{1} = 34$ *επιλογές.*
Για τον υπαρχηγό υπάρχουν $\binom{33}{1} = 33$ *επιλογές.*
Για τα υπόλοιπα 5 μέλη υπάρχουν $\binom{32}{5}$ *επιλογές.*
Άρα, από την πολλαπλασιαστική αρχή υπάρχουν $34 \cdot 33 \cdot \binom{32}{5}$ *τρόποι σχηματισμού της ομάδας.*

2ος τρόπος λύσης: στο viii)

Αρχικά ποιοι θα συμμετέχουν στην ομάδα με $\binom{34}{7}$

Στην συνέχεια, επιλέγουμε με $\binom{7}{1}=7$ τρόπους τον αρχηγό της ομάδας

Έπειτα, επιλέγουμε με $\binom{6}{1}=6$ τρόπους τον υπαρχηγό της.

Από την πολ/σιακή αρχή υπάρχουν $\binom{34}{7}\binom{7}{1}\binom{6}{1}$ τέτοιες ομάδες

Υπενθύμιση: Επαναληπτικοί συνδυασμοί

Ο αριθμός των τρόπων να διαλέξουμε m φορές με επανάληψη από n διαφορετικά αντικείμενα (m-πολυσύνολα)
ισούται με το πλήθος των επαναληπτικών συνδυασμών

$$\begin{bmatrix} n \\ m \end{bmatrix} = \binom{n+m-1}{m} = \binom{n+m-1}{n-1}.$$

Επίσης, ισούται με το πλήθος των δυαδικών λέξεων μήκους $n+m-1$ με ακριβώς $n-1$ άσσους.

$$\underbrace{00\cdots0}_{x_1 \text{ φορές}}\mathbf{1}\underbrace{00\cdots0}_{x_2 \text{ φορές}}\mathbf{1}0\cdots0\mathbf{1}\underbrace{00\cdots0}_{x_n \text{ φορές}}$$

όπου $x_1, x_2, \ldots, x_n \geq 0$ με $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = m$.

Άσκηση (Χρήσιμος τύπος σε πολλά προβλήματα)

Να δειχθεί ότι ο αριθμός των μη αρνητικών ακέραιων λύσεων της εξίσωσης

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n = m$$

ισούται με $\left[{n \atop m}\right] = \binom{n+m-1}{m}$

Λύση. Κάθε λύση της εξίσωσης αντίστοιχεί σε ένα επαναληπτικό συνδυασμό των n στοιχείων ανα m και αντιστρόφως: Επιλέγουμε m φορές με επανάληψη από n διαφορετικά αντικείμενα. Τα $x_1, x_2, \ldots, x_n$ μετράνε πόσες φορές επιλέξαμε το κάθε ένα από τα n διαθέσιμα αντικείμενα στον επαναληπτικό συνδυασμό. Άρα, το πλήθος των μη αρνητικών ακέραιων λύσεων της εξίσωσης $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = m$ ισούται με $\left[{n \atop m}\right]$.

Πόσες μη αρνητικές ακέραιες λύσεις έχει η εξίσωση $x_1+x_2+x_3=10$;

A B C

$4A + 3B + 3C$

$4+3+3=10$

Απ: $\left[{3 \atop 10}\right] = \binom{3+10-1}{10} = \binom{12}{10}$

Άσκηση 3

i) *Να βρεθεί με πόσους τρόπους μπορούμε να τοποθετήσουμε 10 διαφορετικές μπάλες σε 4 διαφορετικά κουτιά. (Κάθε κουτί έχει απεριόριστη χωρητικότητα.)*

Για κάθε μία από τις 10 μπάλες έχουμε 4 διαφορετικές επιλογές τοποθέτησης. Άρα, από την πολλαπλασιαστική αρχή υπάρχουν $\underbrace{4 \cdot 4 \cdots 4}_{10\ \varphi o\rho\acute{\varepsilon}\varsigma} = 4^{10}$ *τρόποι τοποθέτησης.*

Η αναπαράσταση μιας τοποθέτησης έχει μεγάλη σημασία για την απαρίθμηση: Στο πρόβλημα αυτό έχουμε

ΜΠΑΛΕΣ: $M_1, M_2, M_3, M_4, M_5, M_6, M_7, M_8, M_9, M_{10}$

ΚΟΥΤΙΑ: $K_1 \quad K_2 \quad K_3 \quad K_4$

1ος τρόπος αναπαράστασης: Τι έχει μέσα κάθε κουτί;

K_1: $M_1\ M_3\ M_5\ M_6$

K_2: M_2, M_8

K_3: —

K_4: M_4, M_7, M_9, M_{10}

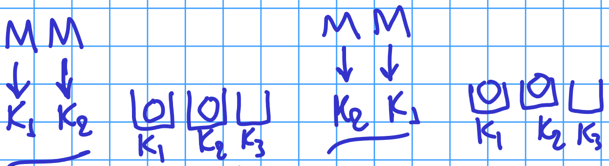
Με τον τρόπο αυτό είναι δύσκολο να μετρήσουμε τις τοποθετήσεις!

2ος τρόπος αναπαράστασης: Σε ποιο κουτί μπαίνει η κάθε μπάλα;

M_1	M_2	M_3	M_4	M_5	M_6	M_7	M_8	M_9	M_{10}
$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$
K_1	K_2	K_1	K_4	K_1	K_1	K_4	K_2	K_4	K_4

Τώρα, η απαρίθμηση είναι εύκολη: Για κάθε μπάλα έχουμε 4 επιλογές.
Συνολικά 4^{10} τρόποι τοποθέτησης.

Εδω δεν βολευει να πουμε που τοποθετειται η κάθε μπάλα:



Ιδιες τοποθετήσεις που προκύπτουν με 2 διαφορετικούς τρόπους.

Άσκηση 3

ΜΠΑΛΕΣ : M, M, M, M, M, M, M, M, M, M x_1, x_2, x_3, x_4

ΚΟΥΤΙΑ : K_1 K_2 K_3 K_4 $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 10$

ii) *Να βρεθεί με πόσους τρόπους μπορούμε να τοποθετήσουμε 10 όμοιες μπάλες σε 4 διαφορετικά κουτιά.*

3M 2M 2M 3M

K_1 K_2 K_3 K_4

Ο ζητούμενος αριθμός ισούται με το πλήθος των μη αρνητικών ακέραιων λύσεων της εξίσωσης

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 10$$

όπου x_1, x_2, x_3, x_4 είναι ο αριθμός από μπάλες που τοποθετούνται σε κάθε κουτί.

Υπενθύμιση: Ο αριθμός των μη αρνητικών ακέραιων λύσεων της εξίσωσης $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = m$ ισούται με $\binom{n+m-1}{m} = \left[{n \atop m}\right]$. (Επιλέγουμε m φορές με επανάληψη από n διαφορετικά αντικείμενα. Τα $x_1, x_2, \ldots, x_n$ μετράνε πόσες φορές επιλέξαμε το κάθε αντικείμενο.)

Άρα, υπάρχουν $\left[{4 \atop 10}\right] = \binom{4+10-1}{10} = \binom{13}{10}$ τρόποι τοποθέτησης. (Εδώ επιλέγουμε 10 φορές με επανάληψη τα 4 διαφορετικά κουτιά.)

iii) 10 όμοιες μπάλες σε 4 διαφορετικά κουτιά έτσι ώστε να μην υπάρχουν άδεια κουτιά

Έστω x_1 ο αριθμός μπαλών που μπαίνουν στο 1ο κουτί
x_2 — — 2ο κουτί
x_3 — — 3ο κουτί
x_4 — — 4ο κουτί

Πρέπει (1) $x_1+x_2+x_3+x_4=10$
$x_1,x_2,x_3,x_4 \geq 1$ → Δεν έχουμε πια τύπο σ' αυτήν την περίπτωση

Τέχνασμα: Θέτουμε
$y_1 = x_1-1 \geq 0$
$y_2 = x_2-1 \geq 0$
$y_3 = x_3-1 \geq 0$
$y_4 = x_4-1 \geq 0$

και $y_1+y_2+y_3+y_4 = (x_1-1)+(x_2-1)+(x_3-1)+(x_4-1)$
$=10-4=6$

δηλαδη

(2) $y_1+y_2+y_3+y_4=6$

$y_1, y_2, y_3, y_4 \geq 0$

Καθε λυση της (1) αντιστοιχει σε μια και μοναδικη λυση της (2) και αντιστροφα

πχ. $3+1+4+2=10$ λυση της (1) $\longleftrightarrow$ $2+0+3+1=6$ λυση της (2)

Αρα,

$\therefore$ αριθμος λυσεων της (1) = αριθμος λυσεων της (2) $= \left[\begin{matrix}4\\6\end{matrix}\right] = \binom{4+6-1}{6}$

Εναλλακτικη λύση: Αρχικά βάζω από για υπάλληλα σε κάθε κουτι (ετσι κανένα δεν ειναι άδειο)

Απομενουν 6 υπαλες που πρεπει να μπουν στα 4 κουτια: $x_1+x_2+x_3+x_4=6$ οπου $x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$

Κ.Ο.Κ.

Άσκηση 3

iii) *Να βρεθεί με πόσους τρόπους μπορούμε να τοποθετήσουμε* 10 *όμοιες μπάλες σε* 4 *διαφορετικά κουτιά, έτσι ώστε κανένα κουτί να μην μείνει άδειο.*

Ο ζητούμενος αριθμός ισούται με το πλήθος των ακέραιων λύσεων της εξίσωσης

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 10$$

όπου x_1, x_2, x_3, x_4 *είναι ο αριθμός από μπάλες που τοποθετούνται σε κάθε κουτί, με τον περιορισμό ότι* $x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 1$.
Αν τεθεί $y_1 = x_1 - 1, y_2 = x_2 - 1, y_3 = x_3 - 1, y_4 = x_4 - 1$ *τότε* $y_1, y_2, y_3, y_4 \geq 0$ *και* $y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = (x_1 - 1) + (x_2 - 1) + (x_3 - 1) + (x_4 - 1) = 10 - 4 = 6$ *οπότε κάθε ακέραια λύση της εξίσωσης* $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 10$ *με* $x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 1$ *αντιστοιχεί σε μία και μοναδική μη αρνητική ακέραια λύση της εξίσωσης* $y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = 6$, *και αντιστρόφως.*
Επομένως, ο ζητούμενος αριθμός ισούται με $\left[{4 \atop 6}\right] = \binom{4+6-1}{6} = \binom{9}{6}$.

Άσκηση 3

iv) *Να βρεθεί με πόσους τρόπους μπορούμε να τοποθετήσουμε* 20 *όμοιες μπάλες σε* 4 *διαφορετικά κουτιά, έτσι ώστε στο πρώτο κουτί να τοποθετηθεί τουλάχιστον* 1 *μπάλα, στο δεύτερο κουτί τουλάχιστον* 2 *μπάλες, στο τρίτο τουλάχιστον* 3 *μπάλες και στο τέταρτο τουλάχιστον* 4 *μπαλες.*

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 20$$

όπου $x_1 \geq 1$, $x_2 \geq 2$, $x_3 \geq 3$, $x_4 \geq 4$.
Αν τεθεί $y_1 = x_1 - 1$, $y_2 = x_2 - 2$, $y_3 = x_3 - 3$, $y_4 = x_4 - 4$, *τότε ο ζητούμενος αριθμός ισούται με το πλήθος των μη αρνητικών ακέραιων λύσεων της εξίσωσης*

$$y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = 20 - 10 = 10$$

όπου

$y_1, y_2, y_3, y_4 \geq 0$

δηλαδή είναι ίσος με $\left[{4 \atop 10} \right] = \binom{13}{10}$.

ΜΠΑΛΕΣ: Μ, Μ, Μ, Μ, Μ, Μ, Μ

ΚΟΥΤΙΑ

Μ	Μ	Μ			Μ	Μ		Μ	Μ
κ_1	κ_2	κ_3	κ_4	κ_5	κ_6	κ_7	κ_8	κ_9	κ_{10}
1	1	1	0	0	1	1	0	1	1

Άσκηση 3

v) *Να βρεθεί με πόσους τρόπους μπορούμε να τοποθετήσουμε 7 όμοιες μπάλες σε 10 διαφορετικά κουτιά, έτσι ώστε κανένα κουτί να μην περιέχει πάνω από μια μπάλα.*

Δυαδικές λέξεις με 10 bit και 7 άσσους $\binom{10}{7} = \binom{10}{3}$

Προφανώς αφού τα κουτιά είναι περισσότερα από τις μπάλες κάποια κουτιά θα μείνουν άδεια. Επειδή σε κάθε κουτί μπορεί να μπει ακριβώς μια μπάλα έπεται ότι σε κάθε τοποθέτηση θα υπάρχουν ακριβώς $10 - 7 = 3$ *άδεια κουτιά και τα οποία είναι μοναδικά για κάθε τοποθέτηση.*
Επομένως ο αριθμός των τοποθετήσεων ισούται με τον αριθμό των τρόπων να διαλέξουμε 3 άδεια κουτιά δηλαδή είναι ίσος με $\binom{10}{3}$.

Εναλλακτικά, αν επιλέξουμε τα 7 κουτιά που θα χρησιμοποιήσουμε πάλι έχουμε καθορίσει τοποθέτηση: Υπάρχουν $\binom{10}{7}$ τρόποι τοποθέτησης

Γενικότερα

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

$\binom{n}{k}$ = # k-υποσύνολα του [n]

$$\updownarrow$$

$\binom{n}{n-k}$ = # (n-k)-υποσύνολα του [n]

Σε κάθε k-υποσύνολο του [n] αντιστοιχεί ένα n-k-υποσύνολο του [n]: το συμπλήρωμά του

$[5]=\{1,2,3,4,5\}$ 2-υποσύνολα

3-υποσύνολα

1,2	3,4,5	2,4	1,3,5
1,3	2,4,5	2,5	1,3,4
1,4	2,3,5	3,4	1,2,5
1,5	2,3,4	3,5	1,2,4
2,3	1,4,5	4,5	1,2,3

$\binom{5}{2}=\#$ 2-υποσυνόλων του $[5]=10$

$\binom{5}{3}=\#$ 3-υποσυνόλων του $[5]=10$

Διάλειμμα μέχρι 11:20

Άσκηση (Χρήσιμος τύπος σε πολλά προβλήματα)

χαρακτήρες γράμματα

Να δειχθεί ότι ο αριθμός των μεταθέσεων k ειδών στοιχείων με $n_1, n_2, \ldots, n_k$ στοιχεία αντίστοιχα σε κάθε είδος ισούται με

$$M(n_1, n_2, \ldots, n_k) = \frac{n!}{n_1! n_2! \cdots n_k!} \text{ όπου } n = n_1 + n_2 + \cdots + n_k.$$

Απόδειξη: Κάθε μετάθεση σ, k ειδών που n_1 συμπίπτουν με a_1, n_2 συμπίπτουν με a_2, ..., n_k συμπίπτουν με a_k μπορεί να κατασκευασθεί ως εξής:

Αρχικά τοποθετούμε τα n_1 το πλήθος a_1 σε n_1 από τις n θέσεις

$\sigma \quad \_\_ \; \_\_ \; \alpha_1 \; \_\_ \; \_\_ \; \alpha_1 \; \_\_ \; \_\_ \; \alpha_1 \; \_\_ \; \_\_ \; \_\_ \; \_\_$

Τούτο γίνεται με $\binom{n}{n_1}$ τρόπους.

Έπειτα τοποθετούμε τα n_2 το πλήθος a_2 σε n_2 από τις $n - n_1$ θέσεις που περίσσεψαν

$\sigma \quad \_\_ \; \alpha_2 \; \alpha_1 \; \alpha_2 \; \_\_ \; \alpha_1 \; \_\_ \; \_\_ \; \alpha_1 \; \alpha_2 \; \_\_ \; \alpha_2 \; \_\_$

Αυτό γίνεται με $\binom{n-n_1}{n_2}$ τρόπους.

Έπειτα τοποθετούμε τα n_3 το πλήθος a_3 με $\binom{n-n_1-n_2}{n_3}$ τρόπους.

$$\binom{\alpha}{b} = \frac{\alpha!}{b!(\alpha-b)!}$$

Άρα τελικά για να κατασκευάσουμε όλες τις μεταθέσεις αυτές των k ειδών υπάρχουν

$$\binom{n}{n_1}\binom{n-n_1}{n_2}\binom{n-n_1-n_2}{n_3}\cdots\binom{n-n_1-n_2-\cdots-n_{k-1}}{n_k}$$

τρόποι. Έτσι,

$$\begin{aligned} M(n_1, n_2, \ldots, n_k) &= \frac{n!}{n_1!\cancel{(n-n_1)!}} \cdot \frac{\cancel{(n-n_1)!}}{n_2!\cancel{(n-n_1-n_2)!}} \cdot \frac{\cancel{(n-n_1-n_2)!}}{n_3!(n-n_1-n_2-n_3)!} \\ &\quad \cdots \frac{n_k!}{n_k!0!} \\ &= \frac{n!}{n_1!n_2!\cdots n_k!} \end{aligned}$$

Πόσοι είναι οι διαφορετικοί αναγραμματισμοί (μεταθέσεις) της λέξης

ANNA

Αν όλα τα γράμματα ήταν διαφορετικά θα είχαμε $4!$ τρόπους

Εδώ έχουμε 2 διαφορετικά γράμματα (είδη) τα A, N

καθένα από τα οποία έχει 2 εμφανίσεις (στοιχεία κάθε είδους)

Άρα, η απάντηση είναι $\dfrac{4!}{2!\,2!} = \dfrac{24}{2\cdot 2} = 6$ //

Πράγματι:

AANN	NAAN
ANAN	NANA
ANNA	NNAA

Άσκηση 4

Με πόσους τρόπους μπορούν να διαταχθούν (σε σειρά) 4 *κόκκινες*, 5 *πράσινες και* 9 *μαύρες μπάλες όταν*

i) *δεν υπάρχουν περιορισμοί*   ΠΚΚΜΜΜΠΠΠΠΚΜΜΜΜΜΚΜΜ

$$\frac{(4+5+9)!}{4!5!9!} = \frac{18!}{4!5!9!} = 6126120.$$

$$\binom{18}{4}\binom{14}{5}\binom{9}{9} = \frac{18!}{4!\cdot 5!\cdot 9!}$$

ii) *οι μπάλες με το ίδιο χρώμα είναι διαδοχικές*

4Κ 5Π 9Μ
4Κ 9Μ 5Π

Υπάρχουν 3 *χρώματα και επιλέγουμε τη σειρά εμφάνισης των χρωμάτων.*
Άρα, υπάρχουν $3! = 6$ *διαφορετικοί τρόποι τοποθέτησης.*

6 τρόποι →

4Κ 5Π 9Μ	9Μ 4Κ 5Π	ΚΠΜ	ΜΚΠ
5Π 4Κ 9Μ	4Κ 9Μ 5Π	ΠΜΚ	ΚΜΠ
9Μ 5Π 4Κ	5Π 9Μ 4Κ	ΜΠΚ	ΠΜΚ

4K, 5Π, 9M

SOS

Να μπουν σε μια σειρά ώστε να μην υπάρχουν 2 κόκκινες δίπλα-δίπλα.

1ος τρόπος: Αρχικά θα τοποθετήσουμε σε σειρά τις πράσινες και μαύρες μπάλες

Υπάρχουν $\frac{(5+9)!}{5!\,9!}$ τρόποι να μπουν σε σειρά

π.χ.

K K K K

_1 Π _2 M _3 M _4 Π _5 M _6 Π _7 Π _8 M _9 M _10 M _11 M _12 Π _13 M _14 M _15

Στην συνέχεια θα βάλουμε τις κόκκινες στις ενδιάμεσες θέσεις

Το κλειδί είναι ότι σε κάθε ενδιάμεση θέση μπορεί να μπει το πολύ μια κόκκινη, αφού δεν πρέπει να υπάρχουν 2 γειτονικές.

Υπάρχουν 15 διαθέσιμες θέσεις και πρέπει να επιλεγούν 4 από αυτές. Υπάρχουν $\binom{15}{4}$ τρόποι

Άρα, συνολικά υπάρχουν $\frac{14!}{5!\,9!}\binom{15}{4}$ τρόποι ✓

για να μπουν όλοι οι υπάλληλοι σε σειρά.

Άσκηση 4

iii) δεν επιτρέπονται δύο κόκκινες μπάλες να είναι διαδοχικές.

2ος τρόπος

Αρχικά τοποθετούμε σε μια σειρά τις $9 + 5 = 14$ *πράσινες και μαύρες μπάλες. Υπάρχουν* $\frac{14!}{5!9!}$ *τρόποι τοποθέτησης των πράσινων και μαύρων μπαλών.*

Σε κάθε τοποθέτηση πρέπει να προσθέσουμε τις 4 κόκκινες μπάλες. Μπορούμε να σκεφτόμαστε ότι σε κάθε τοποθέτηση οι 4 κόκκινες μπάλες διαχωρίζουν τις υπόλοιπες 14 πράσινες και μαύρες μπάλες σε 5 ομάδες.

$$\underset{x_1 \geq 0}{\_\_\_}\ \mathbf{K}\ \underset{x_2 \geq 1}{\_\_\_}\ \mathbf{K}\ \underset{x_3 \geq 1}{\_\_\_}\ \mathbf{K}\ \underset{x_4 \geq 1}{\_\_\_}\ \mathbf{K}\ \underset{x_5 \geq 0}{\_\_\_}$$

Το πλήθος των μπαλών που ανήκουν σε κάθε ομάδα μπορεί να κωδικοποιηθεί από μια (διατεταγμένη) 5-άδα x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 *όπου*

Άσκηση 4

x_1 είναι ο αριθμός των πράσινων και μαύρων μπαλών που βρίσκονται πριν την 1η κόκκινη μπάλα.
x_2 είναι ο αριθμός των πράσινων και μαύρων μπαλών που βρίσκονται ανάμεσα στην 1η και 2η κόκκινη μπάλα.
x_3 είναι ο αριθμός των πράσινων και μαύρων μπαλών που βρίσκονται ανάμεσα στην 2η και 3η κόκκινη μπάλα.
x_4 είναι ο αριθμός των πράσινων και μαύρων μπαλών που βρίσκονται ανάμεσα στην 3η και 4η κόκκινη μπάλα.
x_5 είναι ο αριθμός των πράσινων και μαύρων μπαλών που βρίσκονται μετά την κόκκινη μπάλα.
Με άλλα λόγια τα μεγέθη των ομάδων που δημιουργεί μια τοποθέτηση αντιστοιχούν σε μια μη αρνητική ακέραια λύση της εξίσωσης

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 14$$

Προκειμένου οι κόκκινες μπάλες να μην είναι διαδοχικές πρέπει επιπλέον να ισχύει $x_2, x_3, x_4 \geq 1$.

Άσκηση 4

Αν τεθεί $y_2 = x_2 - 1$, $y_3 = x_3 - 1$, $y_4 = x_4 - 1$ *τότε ο αριθμός των τρόπων εισαγωγής των κόκκινων μπαλών σε μια τοποθέτηση ισούται με τον αριθμό των μη αρνητικών λύσεων της εξίσωσης*

$$x_1 + y_2 + y_3 + y_4 + x_5 = 14 - 3 = 11$$

επομένως ισούται με $\left[{5 \atop 11}\right] = \binom{5+11-1}{11} = \binom{15}{11}$.
Άρα, από την πολλαπλασιαστική αρχή υπάρχουν

$$\binom{15}{11}\frac{14}{5!9!} = \frac{15!}{11!4!} \cdot \frac{14!}{5!9!} = \frac{15!14!}{4!5!9!11!} = \underline{2732730}$$

τρόποι τοποθέτησης των μπαλών.

Άσκηση (Χρήσιμος τύπος σε πολλά προβλήματα)

Να βρεθεί ο αριθμός των τρόπων τοποθέτησης των στοιχείων του $[n]$ σε ένα κύκλο. Κάθε τοποθέτηση ονομάζεται **κυκλική μετάθεση***. Δύο κυκλικές μεταθέσειες είναι ίσες αν η μια προκύπτει από την άλλη με περιστροφή του κύκλου.*

Λύση. Έστω x το πλήθος όλων των κυκλικών μεταθέσεων του $[n]$.
Σε κάθε κυκλική μετάθεση του $[n]$ αντιστοιχούν n (απλές) μεταθέσεις του $[n]$, σπάζοντας τον κύκλο σε ένα από τα n τόξα που ορίζει η κυκλική μετάθεση. Από κάθε μετάθεση του $[n]$ μπορεί να κατασκευασθεί μια ακριβώς κυκλική μετάθεση του $[n]$.

1 κυκλική μετάθεση του $[n]$	αντιστοιχεί σε	n μεταθέσεις του $[n]$
x κυκλικές μεταθέσεις του $[n]$	αντιστοιχούν σε	$n!$ μεταθέσεις του $[n]$

Άρα,

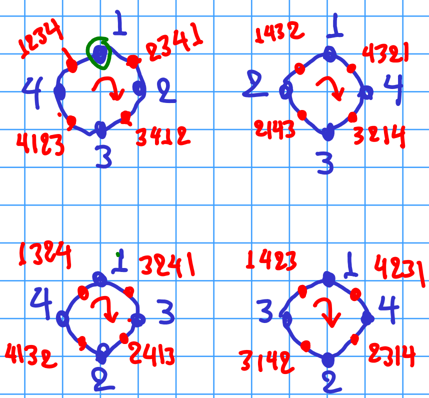
$$1 \cdot n! = x \cdot n$$

δηλαδή, ο αριθμός των κυκλικών μεταθέσεων του $[n]$ είναι ίσος με $\frac{n!}{n} = (n-1)!$.

Με πόσους τρόπους μπορούν να τοποθετηθούν οι αριθμοί 1, 2, 3, 4 σε ένα κύκλο (σε ίσες αποστάσεις)

μεταθέσεις

Αν θέλαμε να μπουν σε σειρά (όχι κυκλικά) η απάντηση είναι $4! = 24$



Εδώ υπάρχουν $6 = 3! = (4-1)!$

Τι σχέση έχουν οι κυκλικές μεταθέσεις με τις άλλες;

1 κυκλική φτιάνει n άλλες μεταθέσεις

Όλες οι κυκλικές — $n!$ (όλες τις μεταθέσεις)

$\iff$ #κυκλικών $= \dfrac{\#\text{μεταθέσεων}}{n}$

$$\begin{array}{ccc} 1 & & n \\ x & & n! \end{array}$$

$$1 \cdot n! = x \cdot n \Rightarrow x = \frac{1 \cdot n!}{n}$$

Άσκηση 5

Να υπολογισθεί ο αριθμός των τρόπων με τους οποίους 8 ανδρόγυνα μπορούν να σχηματίσουν ένα κυκλικό χορό (όπου μας ενδιαφέρει ποιος βρίσκεται αριστερά και δεξιά από κάθε πρόσωπο) όταν

i) *δεν υπάρχουν περιορισμοί.*

$(16-1)! = 15!$ *Υπενθύμιση: Αριθμός κυκλικών μεταθέσεων n αντικειμένων $(n-1)!$*

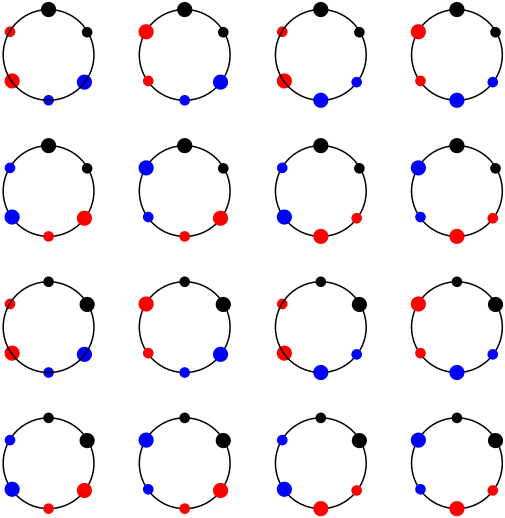
Άσκηση 5

Να υπολογισθεί ο αριθμός των τρόπων με τους οποίους 8 ανδρόγυνα μπορούν να σχηματίσουν ένα κυκλικό χορό (όπου μας ενδιαφέρει ποιος βρίσκεται αριστερά και δεξιά από κάθε πρόσωπο) όταν

ii) οι σύζυγοι χορεύουν πλάι - πλάι.

Αρχικά επιλέγουμε την σειρά με την οποία θα μπουν (ως ομάδα) τα 8 ανδρόγυνα στον κύκλο. Υπάρχουν $(8-1)! = 7!$ *τρόποι.*
Για κάθε ανδρόγυνο υπάρχουν $2! = 2$ *τρόποι να μπουν στον χορό, άρα, από την πολλαπλασιαστική αρχή υπάρχουν* $7! \cdot 2^8$ *τρόποι σχηματισμού του χορού.*

Επιβεβαίωση τρόπου σκέψης: Για 3 ανδρόγυνα: ● • ● • ● • υπάρχουν $2! \cdot 2^3 = 16$ τρόποι σχηματισμού του κυκλικού χορού:



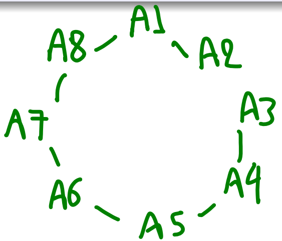
A1 Γ1 A5 Γ5
A2 Γ2 A6 Γ6
A3 Γ3 A7 Γ7
A4 Γ4 A8 Γ8

Άσκηση 5

Να υπολογισθεί ο αριθμός των τρόπων με τους οποίους 8 ανδρόγυνα μπορούν να σχηματίσουν ένα κυκλικό χορό (όπου μας ενδιαφέρει ποιος βρίσκεται αριστερά και δεξιά από κάθε πρόσωπο) όταν

iii) οι σύζυγοι δεν χορεύουν πλάι - πλάι.

Δύσκολη άσκηση!



7! τροποι να μπουν οι 8 ανδρες σε κυκλικη σειρα

Άσκηση 6

(i) *Να δειχθεί ότι ο αριθμός των* k*-άδων ακεραίων* $a_1, a_2, \ldots, a_k$ *με*

$$1 \leq a_1 < a_2 < \cdots < a_k \leq n$$

ισούται με $\binom{n}{k}$.

Κάθε συνδυασμός k *αριθμών από το σύνολο* $[n]$ *αντιστοιχεί σε μια ακριβώς ακολουθία* $a_1, a_2, \ldots, a_k$ *με* $1 \leq a_1 < a_2 < \cdots < a_k \leq n$ *και αντιστρόφως. Επομένως, ο αριθμός όλων των ακολουθιών ισούται με* $\binom{n}{k}$.

Άσκηση 6

(ii) Να δειχθεί ότι ο αριθμός των k-άδων ακεραίων $a_1, a_2, \ldots, a_k$ με

$$1 \leq a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_k \leq n$$

ισούται με $\left[\begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix}\right]$.

> *Κάθε επαναληπτικός συνδυασμός k αριθμών από το σύνολο $[n]$ αντιστοιχεί σε μια ακριβώς ακολουθία $a_1, a_2, \ldots, a_k$ με $1 \leq a_1 \leq a_2 < \cdots \leq a_k \leq n$ και αντιστρόφως. Επομένως, ο αριθμός όλων των ακολουθιών ισούται με $\left[\begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix}\right]$.*

Άσκηση 7

Να βρεθεί με πόσους τρόπους μπορούν να τοποθετηθούν 6 πιόνια στα τετράγωνα μιας 6×6 σκακιέρας ώστε να μην υπάρχουν δύο ή περισσότερα πιόνια στην ίδια γραμμή ή στήλη.

(1ος τρόπος)

6η εκλογή $\longrightarrow$

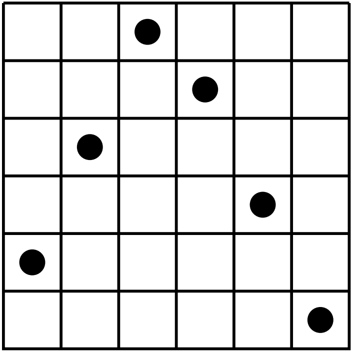
5η εκλογή $\longrightarrow$

4η εκλογή $\longrightarrow$

3η εκλογή $\longrightarrow$

2η εκλογή $\longrightarrow$

1η εκλογή $\longrightarrow$



Το πρώτο πιόνι τοποθετείται στην πρώτη γραμμή με 6 διαφορετικούς τρόπους. Για το δεύτερο πιόνι υπάρχουν 5 διαφορετικοί τρόποι (εξαιρείται το τετράγωνο της δεύτερης γραμμής στην στήλη του οποίου έχουμε βάλει στην πρώτη γραμμή το πρώτο πιόνι). Για το τρίτο πιόνι υπάρχουν 4 διαφορετικοί τρόποι (εξαιρούνται τα τετράγωνα της τρίτης γραμμής στις στήλες των οποίων έχουμε ήδη βάλει τα δυο προηγούμενα πιόνια). Συνεχίζοντας με αυτό τον τρόπο (βλέπε προηγούμενο σχήμα) για το τέταρτο πιόνι υπάρχουν 3 τρόποι, για το πέμπτο 2 τρόποι και για το έκτο ένας μόνο τρόπος τοποθέτησής του.
Έτσι σύμφωνα με την πολλαπλασιαστική αρχή για να τοποθετήσουμε και τα 6 πιόνια στην σκακιέρα θα υπάρχουν

$$6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6! = 720 \text{ τρόποι.}$$

(2ος τρόπος)
Για το πρώτο πιόνι υπάρχουν 36 τετράγωνα για να τοποθετηθεί. Για το δεύτερο πιόνι υπάρχουν 36-11=25 τετράγωνα για να τοποθετηθεί (αφαιρούνται από τις επιλογές τα 5 τετράγωνα της γραμμής που βρίσκεται το πρώτο πιόνι, τα 5 τετράγωνα της στήλης του πρώτου πιονιού και το 1 τετράγωνο που καταλαμβάνει το πρώτο πιόνι). Για το τρίτο πιόνι υπάρχουν 25-9=16 επιλογές (αφαιρούνται από τις επιλογές τα 4 - και όχι 5 - τετράγωνα της γραμμής που βρίσκεται το δεύτερο πιόνι - αφού ήδη ένα από αυτά τα τετράγωνα έχει αφαιρεθεί προηγουμένως - τα 4 τετράγωνα της γραμμής που βρίσκεται το τρίτο πιόνι και το 1 τετράγωνο που καταλαμβάνει το δεύτερο πιόνι).
Συνεχίζοντας με αυτόν τον τρόπο, υπάρχουν 9 τρόποι για το τέταρτο πιόνι, 4 τρόποι για το πέμπτο και 1 τρόπος για το έκτο.
Έτσι σύμφωνα με την πολλαπλασιαστική αρχή υπάρχουν

$$36 \cdot 25 \cdot 16 \cdot 9 \cdot 4 \cdot 1 = (6!)^2$$

τρόποι επιλογής των τετραγώνων τοποθέτησης των έξι πιονιών.

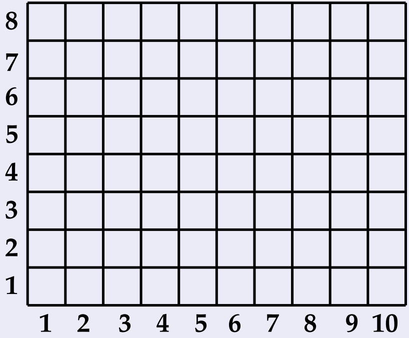
Κατά την εφαρμογή του τρόπου αυτού όμως, κάθε αποτέλεσμα επαναλαμβάνεται πολλές φορές. Αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι οποιαδήποτε έξι συγκεκριμένα τετράγωνα καλύπτονται, μπορούν να καλυφθούν με διαφορετική σειρά τοποθέτησης των πιονιών. Δεδομένου ότι η διαδοχική τοποθέτηση των 6 πιονιών γίνεται προφανώς με 6! τρόπους πρέπει να διαιρέσουμε το $(6!)^2$ που ήδη υπολογίσαμε με 6!. Επομένως, τελικά υπάρχουν

$$\frac{(6!)^2}{6!} = 6!$$

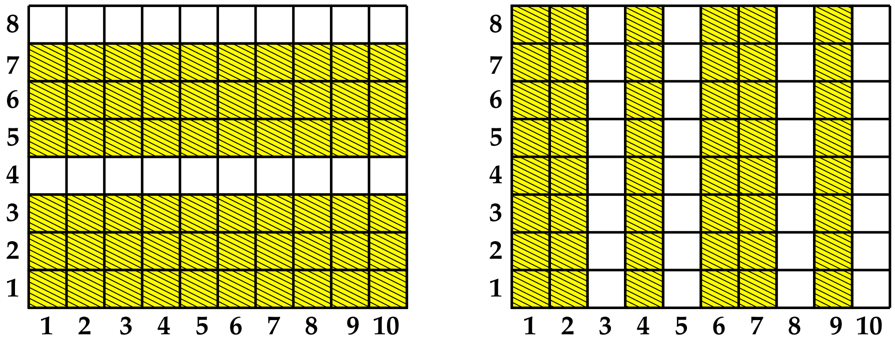
διαφορετικοί τρόποι τοποθέτησης.

Άσκηση 8

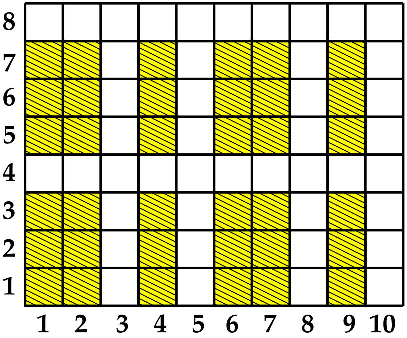
Να βρεθεί με πόσους τρόπους μπορούν να τοποθετηθούν 6 πιόνια στα τετράγωνα μιας 8×10 *σκακιέρας ώστε να μην υπάρχουν δύο ή περισσότερα πιόνια στην ίδια γραμμή ή στήλη.*



Οι 6 γραμμές στις οποίες θα βρίσκονται τα 6 πιόνια μπορούν να επιλεγούν με $\binom{8}{6}$ τρόπους. Αντίστοιχα, οι 6 στήλες στις οποίες θα βρίσκονται τα 6 πιόνια μπορούν να επιλεγούν με $\binom{10}{6}$ τρόπους.



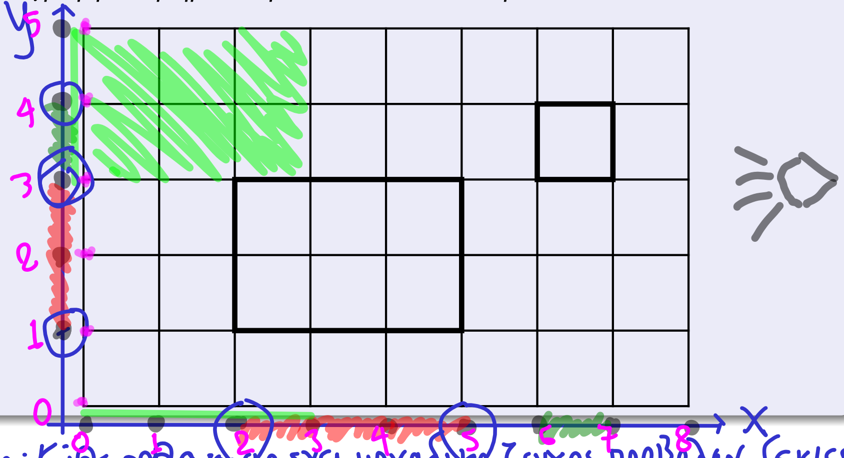
Επομένως, από την πολλαπλασιαστική αρχή, υπάρχουν $\binom{8}{6}\binom{10}{6}$ τρόποι για να επιλέξουμε τις 6 γραμμές και τις 6 στήλες. Η τομή αυτών των 6 γραμμών και 6 στηλών σχηματίζει μια σκακιέρα 6×6 με 36 τετράγωνα.



Ο αριθμός των τρόπων τοποθέτησης των 6 πιονιών σ' αυτή τη σκακιέρα ισούται με 6!.
Άρα, τελικά, από την πολλαπλασιαστική αρχή υπάρχουν $\binom{8}{6}\binom{10}{6}6!$ τρόποι τοποθέτησης των 6 πιονιών.

Άσκηση 9

Να βρεθεί ο αριθμός των ορθογωνίων με κορυφές τα σημεία και πλευρές τα ευθύγραμμα τμήματα μιας $n \times m$ σκακιέρας.



Ιδέα: Κάθε ορθογώνιο έχει μοναδικό ζεύγος προβολών (σκιές) πάνω στους άξονες x και y!

Άρα, $\#$ ορθογωνίων $= \#$ ζευγών προβολών

Κάθε προβολή καθορίζεται από τα 2 άκρα της

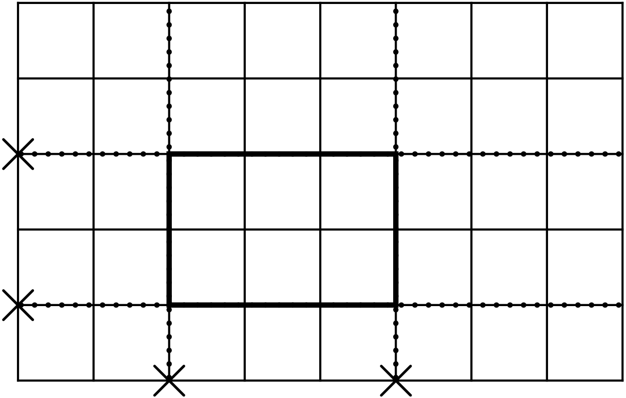
Για τις προβολές στον άξονα x έχουμε $\binom{9}{2}$ επιλογές

Για τις προβολές στον άξονα y έχουμε $\binom{6}{2}$ επιλογές

Άρα, υπάρχουν $\binom{9}{2}\binom{6}{2}$ ζεύγη προβολών $=$

$\binom{9}{2}\binom{6}{2}$ ορθογώνια

Κάθε ορθογώνιο προσδιορίζεται μονοσήμαντα επιλέγοντας 2 σημεία στην κάτω πλευρά της σκακιέρας και 2 σημεία στην αριστερή πλευρά της σκακιέρας.



Υπάρχουν $\binom{m+1}{2}$ τρόποι για να επιλέξουμε 2 σημεία στη κάτω πλευρά.
Υπάρχουν $\binom{n+1}{2}$ τρόποι για να επιλέξουμε 2 σημεία στην αριστερή πλευρά.
Από την πολλαπλασιαστική αρχή υπάρχουν $\binom{m+1}{2}\binom{n+1}{2}$ επιλογές.

Άσκηση 10

Να δοθεί μια συνδυαστική απόδειξη της ταυτότητας $\binom{2n}{2} = 2\binom{n}{2} + n^2$.

Έστω n ανδρόγυνα από τα οποία θέλουμε να επιλέξουμε 2 άτομα.
Ο αριθμός των διαφορετικών τρόπων επιλογής των 2 ατόμων ισούται με τον αριθμό των συνδυασμών $2n$ στοιχείων ανά 2, δηλαδή είναι ίσος με $\binom{2n}{2}$.
Μπορούμε να υπολογίσουμε τον ίδιο αριθμό διακρίνοντας δύο περιπτώσεις ως προς το φύλο των ατόμων που επιλέγονται.

(i) Τα 2 άτομα είναι του ιδίου φύλου. Τότε υπάρχουν 2 επιλογές για το φύλο και έπειτα $\binom{n}{2}$ επιλογές για τα δύο άτομα του ιδίου φύλου. Άρα, από τον κανόνα του γινομένου υπάρχουν $2\binom{n}{2}$ τρόποι επιλογής τους.

(ii) Τα 2 άτομα είναι διαφορετικού φύλου. Τότε υπάρχουν $\binom{n}{1} = n$ τρόποι να επιλέξουμε μια γυναίκα και $\binom{n}{1} = n$ τρόποι να επιλέξουμε έναν άνδρα. Άρα, από τον κανόνα του γινομένου υπάρχουν n^2 τρόποι επιλογής τους.

Άρα, συνολικά, υπάρχουν $2\binom{n}{2} + n^2$ τρόποι επιλογής των 2 ατόμων.
Επειδή, τόσο με τον πρώτο όσο και με τον δεύτερο τρόπο μετράμε τους ίδιους τρόπους επιλογής, έπεται ότι $\binom{2n}{2} = 2\binom{n}{2} + n^2$.

Άσκηση 11

Με πόσους τρόπους μπορεί από 12 ανδρόγυνα να επιλεγεί μια εξαμελής επιτροπή:

(i) *Χωρίς περιορισμό.*

> *Ο ζητούμενος αριθμός ισούται με τον αριθμό των συνδυασμών των 24 ατόμων ανά 6, δηλαδή*
> $$\binom{24}{6} = 134596$$

(ii) *Η επιτροπή δεν μπορεί να περιέχει κάποιο ανδρόγυνο.*

> *Από κάθε ανδρόγυνο μπορεί να συμμετέχει το πολύ ένα άτομο. Αρχικά επιλέγουμε ποια ανδρόγυνα θα εκπροσωπηθούν στην επιτροπή. Η επιλογή αυτή μπορεί να γίνει με* $\binom{12}{6}$ *τρόπους.*
> *Για κάθε ένα από τα 6 ανδρόγυνα που επιλέχθηκαν υπάρχουν 2 επιλογές για το ποιος από τους δύο θα είναι στην επιτροπή.*
> *Άρα, συνολικά, υπάρχουν* $\binom{12}{6} \cdot 2^6 = 59136$ *τρόποι σχηματισμού της επιτροπής.*

Άσκηση 11

Με πόσους τρόπους μπορεί από 12 ανδρόγυνα να επιλεγεί μια εξαμελής επιτροπή:

iii) Η επιτροπή αποτελείται από πρόεδρο, αντιπρόεδρο, γραμματέα και τρία μέλη.

Για το σχηματισμό της επιτροπής λαμβάνουμε υπόψη τους διακριτούς ρόλους του προέδρου, αντιπροέδρου, γραμματέα και απλού μέλους.

(1ος τρόπος)

Για την εκλογή του προέδρου υπάρχουν 24 *επιλογές.*

Για την εκλογή του αντιπροέδρου υπάρχουν 23 *επιλογές.*

Για την εκλογή του γραμματέα υπάρχουν 22 *επιλογές.*

Για τα τρία (απλά) μέλη υπάρχουν $\binom{21}{3}$ *επιλογές.*

Άρα, συνολικά, υπάρχουν $24 \cdot 23 \cdot 22 \cdot \binom{21}{3} = 16151520$ *τρόποι σχηματισμού της επιτροπής.*

Άσκηση 11

Με πόσους τρόπους μπορεί από 12 ανδρόγυνα να επιλεγεί μια εξαμελής επιτροπή:

iii) Η επιτροπή αποτελείται από πρόεδρο, αντιπρόεδρο, γραμματέα και τρία μέλη.

(2ος τρόπος)

Αρχικά επιλέγουμε τα άτομα που θα συμμετέχουν στην επιτροπή και στη συνέχεια τους αναθέτουμε ρόλους.

Για την εκλογή των 6 μελών υπάρχουν $\binom{24}{6}$ *επιλογές.*

Για την εκλογή του προέδρου υπάρχουν 6 *επιλογές.*

Για την εκλογή του αντιπροέδρου υπάρχουν 5 *επιλογές.*

Για την εκλογή του γραμματέα υπάρχουν 4 *επιλογές.*

Άρα, συνολικά, υπάρχουν $\binom{24}{6} \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 = 16151520$ *τρόποι σχηματισμού της επιτροπής.*

Άσκηση 11

Με πόσους τρόπους μπορεί από 12 ανδρόγυνα να επιλεγεί μια εξαμελής επιτροπή:

iv) *Η επιτροπή αποτελείται από πρόεδρο και γραμματέα οι οποίοι είναι άνδρες, από δύο αντιπροέδρους οι οποίες είναι γυναίκες και από δύο μέλη διαφορετικού φύλου.*

(1ος τρόπος)
Για την εκλογή του άνδρα προέδρου υπάρχουν 12 *επιλογές.*
Για την εκλογή του άνδρα γραμματέα υπάρχουν 11 *επιλογές.*
Για την εκλογή των δύο γυναικών αντιπροέδρων υπάρχουν $\binom{12}{2}$ *επιλογές.*
Για τα δύο μέλη διαφορετικού φύλλου έχουμε $10 \cdot 10$ *επιλογές.*
Άρα, συνολικά, υπάρχουν $12 \cdot 11 \cdot \binom{12}{2} \cdot 10 \cdot 10 = 871200$ *τρόποι σχηματισμού της επιτροπής.*

Άσκηση 11

Με πόσους τρόπους μπορεί από 12 ανδρόγυνα να επιλεγεί μια εξαμελής επιτροπή:

iv) Η επιτροπή αποτελείται από πρόεδρο και γραμματέα οι οποίοι είναι άνδρες, από δύο αντιπροέδρους οι οποίες είναι γυναίκες και από δύο μέλη διαφορετικού φύλου.

(2ος τρόπος) *Πρώτα επιλέγουμε τα άτομα που θα συμμετέχουν και έπειτα τους αναθέτουμε ρόλους. Η επιτροπή θα αποτελείται από* 3 *άνδρες και* 3 *γυναίκες.*
Για τους 3 *άνδρες υπάρχουν* $\binom{12}{3}$ *επιλογές.*
Για την εκλογή του άνδρα προέδρου υπάρχουν 3 *επιλογές.*
Για την εκλογή του άνδρα γραμματέα υπάρχουν 2 *επιλογές.*
Για τις 3 *γυναίκες υπάρχουν* $\binom{12}{3}$ *επιλογές.*
Για την εκλογή των δύο γυναικών αντιπροέδρων υπάρχουν $\binom{3}{2}$ *επιλογές.*
Άρα, συνολικά, υπάρχουν $\binom{12}{3} \cdot 3 \cdot 2 \cdot \binom{12}{3} \cdot \binom{3}{2} = 871200$ *τρόποι σχηματισμού της επιτροπής.*

Άσκηση 12

Σε μια αίθουσα βρίσκονται n άτομα τα οποία κάθονται σε n διακεκριμένες θέσεις. Να βρεθεί ο αριθμός των τρόπων που μπορούν να αλλάξουν θέσεις τα n άτομα έτσι ώστε κανείς να μην κάθεται στην αρχική του θέση.

Οι τρόποι που μπορούν να καθίσουν τα n άτομα στις θέσεις τους χωρίς περιορισμό είναι $n!$.
Έστω A_i το σύνολο όλων των τρόπων να καθίσουν τα n άτομα έτσι ώστε το i-στό άτομο να κάθεται στην αρχική του θέση (και οι υπόλοιποι να μην έχουν κανένα περιορισμό).
Ζητείται να βρεθεί ο πληθάριθμος

$$|\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \cdots \cap \overline{A_{n-1}} \cap \overline{A_n}|.$$

Παρατηρούμε ότι για κάθε $i \in [n]$ ισχύει ότι

$$|A_i| = (n-1)!$$

διότι το i-στό άτομο έχει μόνο ένα τρόπο να καθίσει και για τα υπόλοιπα $n-1$ άτομα υπάρχουν $(n-1)!$ τρόποι να καθίσουν.

Επίσης, για κάθε ζεύγος άτομων i, j ισχύει ότι

$$|A_i \cap A_j| = (n-2)!$$

διότι τα άτομα i, j έχουν ένα τρόπο να καθίσουν, και για τα υπόλοιπα $n-2$ άτομα υπάρχουν $(n-2)!$ τρόποι να καθίσουν.
Αντίστοιχα, για κάθε τριάδα ατόμων i, j, k ισχύει ότι

$$|A_i \cap A_j \cap A_k| = (n-3)!$$

κ.ο.κ. Για κάθε m-άδα ατόμων $i_1, i_2, \ldots, i_m$ με $1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_m \leq n$ ισχύει ότι

$$|A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \cdots \cap A_{i_m}| = (n-m)!$$

Από την αρχή εγκλεισμού-αποκλεισμού ισχύει ότι

$$
\begin{aligned}
&|\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \cdots \cap \overline{A_{n-1}} \cap \overline{A_n}| \\
&= |\mathcal{E}| - S_1 + S_2 - S_3 + \cdots + (-1)^n S_n \\
&= |\mathcal{E}| - \sum_{1 \le i \le n} |A_i| + \sum_{1 \le i < j \le n} |A_i \cap A_j| - \sum_{1 \le i < j < k \le n} |A_i \cap A_j \cap A_k| - \cdots \\
&+ (-1)^m \sum_{1 \le i_1 < i_2 < \cdots < i_m \le n} |A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \cdots \cap A_{i_m}| + \cdots + (-1)^n |A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n|.
\end{aligned}
$$

Επειδή το πλήθος των ζευγών ισούται με τους συνδυασμούς $\binom{n}{2}$, το πλήθος των τριάδων ισούται με τους συνδυασμούς $\binom{n}{3}$, και γενικά, το πλήθος των m-αδων είναι ίσο με τους συνδυασμούς $\binom{n}{m}$, προκύπτει ότι

$$
\begin{aligned}
&|\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \cdots \cap \overline{A_{n-1}} \cap \overline{A_n}| \\
&= n! - \binom{n}{1}(n-1)! + \binom{n}{2}(n-2)! - \binom{n}{3}(n-3)! + \cdots + (-1)^m \binom{n}{m}(n-m)! \\
&\qquad + \cdots + (-1)^n \binom{n}{n}(n-n)! \\
&= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k}(n-k)!.
\end{aligned}
$$

Άσκηση 13

Να βρεθεί με πόσους τρόπους μπορούν να επιλεγούν, μεταξύ των μελών ενός ομίλου που αποτελείται από 20 μέλη, δύο επιτροπές, η μια εκ των οποίων να αποτελείται από πρόεδρο, αντιπρόεδρο, ταμία και γραμματέα, ενώ η άλλη από 3 μέλη.

(i) *Όταν οι δύο επιτροπές μπορούν να έχουν κοινά μέλη.*

Για την επιτροπή που έχει πρόεδρο έχουμε τις εξής επιλογές:
Για την εκλογή του προέδρου υπάρχουν 20 *επιλογές.*
Για την εκλογή του αντιπροέδρου υπάρχουν 19 *επιλογές.*
Για την εκλογή του ταμία υπάρχουν 18 *επιλογές.*
Για την εκλογή του γραμματέα υπάρχουν 17 *επιλογές.*
Άρα, για την σύνθεση αυτής της επιτροπής υπάρχουν $20 \cdot 19 \cdot 18 \cdot 17$ *τρόποι.*
Για την επιτροπή με τα τρία μέλη υπάρχουν $\binom{20}{3}$ *τρόποι επιλογής.*
Άρα, συνολικά, για τις δύο επιτροπές υπάρχουν $20 \cdot 19 \cdot 18 \cdot 17 \cdot \binom{20}{3}$ *τρόποι σχηματισμού.*

Άσκηση 13

Να βρεθεί με πόσους τρόπους μπορούν να επιλεγούν, μεταξύ των μελών ενός ομίλου που αποτελείται από 20 μέλη, δύο επιτροπές, η μια εκ των οποίων να αποτελείται από πρόεδρο, αντιπρόεδρο, ταμία και γραμματέα, ενώ η άλλη από 3 μέλη.

ii) Όταν οι δύο επιτροπές δεν έχουν κοινά μέλη.

Στην περίπτωση όπου οι δύο επιτροπές δεν έχουν κοινά μέλη, για τον σχηματισμό της επιτροπής που έχει πρόεδρο υπάρχουν $20 \cdot 19 \cdot 18 \cdot 17$ *τρόποι. Ενώ, για το σχηματισμό της επιτροπής με τα* 3 *μέλη υπάρχουν* $\binom{16}{3}$ *επιλογές.*
Άρα, συνολικά, για τις δύο επιτροπές υπάρχουν $20 \cdot 19 \cdot 18 \cdot 17 \cdot \binom{16}{3}$ *τρόποι σχηματισμού.*

Άσκηση 13

Να βρεθεί με πόσους τρόπους μπορούν να επιλεγούν, μεταξύ των μελών ενός ομίλου που αποτελείται από 20 μέλη, δύο επιτροπές, η μια εκ των οποίων να αποτελείται από πρόεδρο, αντιπρόεδρο, ταμία και γραμματέα, ενώ η άλλη από 3 μέλη.

iii) *Όταν ο πρόεδρος είναι το μοναδικό κοινό μέλος των δύο επιτροπών.*

Στην περίπτωση όπου οι δύο επιτροπές έχουν ως κοινό μέλος τον πρόεδρο, για τον σχηματισμό της επιτροπής που έχει πρόεδρο υπάρχουν $20 \cdot 19 \cdot 18 \cdot 17$ *τρόποι. Ενώ, για το σχηματισμό της επιτροπής με τα 3 μέλη υπάρχουν* $\binom{16}{2}$ *επιλογές (αφού το τρίτο μέλος της είναι ο πρόεδρος της άλλης επιτροπής).*
Άρα, συνολικά, για τις δύο επιτροπές υπάρχουν $20 \cdot 19 \cdot 18 \cdot 17 \cdot \binom{16}{2}$ *τρόποι σχηματισμού.*

Άσκηση 14

Έστω a_n το πλήθος των λέξεων μήκους n που κατασκευάζονται από τα ψηφία $0, 1, 2, 3$ και οι οποίες περιέχουν άρτιο αριθμό εμφανίσεων του 0. Να δειχθεί ότι $a_{n+1} = 2a_n + 4^n$.

Οι λέξεις μήκους n που κατασκευάζονται από τα ψηφία $0, 1, 2, 3$ είναι 4^n. Από αυτές, ονομάζουμε *άρτιες* τις λέξεις που έχουν άρτιο αριθμό εμφανίσεων 0. Επομένως, ο αριθμός των άρτιων λέξεων μήκους n ισούται με a_n και ο αριθμός των όχι άρτιων λέξεων μήκους n ισούται με $4^n - a_n$.

Έστω μια άρτια λέξη μήκους $n+1$. Η λέξη αρχίζει είτε με 0, είτε με $1, 2, 3$. Στην πρώτη περίπτωση, τα υπόλοιπα n στοιχεία της λέξης αποτελούν μια όχι άρτια λέξη μήκους n, άρα υπάρχουν $1 \cdot (4^n - a_n)$ άρτιες λέξεις μήκους $n+1$ που αρχίζουν με 0. Στις άλλες 3 περιπτώσεις, τα υπόλοιπα n στοιχεία της λέξης αποτελούν μια άρτια λέξη μήκους n, άρα υπάρχουν $3 \cdot a_n$ άρτιες λέξεις μήκους $n+1$ που αρχίζουν με 1, ή 2, ή 3. Από τον κανόνα του αθροίσματος ισχύει ότι

$$a_{n+1} = 1 \cdot (4^n - a_n) + 3 \cdot a_n = 2a_n + 4^n.$$

Άσκηση 15

Να βρεθεί το πλήθος των διαιρετών του 1000.

Ισχύει ότι $1000 = 10^3 = 2^3 \cdot 5^3$.
Άρα, κάθε διαιρέτης του 1000 θα έχει την μορφή $2^k \cdot 5^\lambda$ όπου $0 \leq k, \lambda \leq 3$.
Για το k υπάρχουν 4 επιλογές.
Για το λ υπάρχουν 4 επιλογές.
Άρα, από την πολλαπλασιαστική αρχή υπάρχουν $4 \cdot 4 = 16$ διαιρέτες του 1000.
(Διαιρέτες του 1000: 1, 2, 4, 5, 8, 10, 20, 25, 50, 40, 100, 125, 200, 250, 500, 1000).

Άσκηση 16

Να δειχθεί ότι ο αριθμός των τρόπων διαμέρισης n διαφορετικών ατόμων σε k διαφορετικές ομάδες με n_1, n_2, …, n_k μέλη αντίστοιχα είναι ίσος με $\dfrac{n!}{n_1!n_2!\cdots n_k!}$.

Για την πρώτη ομάδα υπάρχουν $\binom{n}{n_1}$ επιλογές, για την δεύτερη ομάδα υπάρχουν $\binom{n-n_1}{n_2}$ επιλογές, για την τρίτη ομάδα υπάρχουν $\binom{n-n_1-n_2}{n_3}$ επιλογές, κ.ο.κ, για την k-οστή ομάδα υπάρχουν $\binom{n-n_1-n_2-\cdots-n_{k-1}}{n_k}$ επιλογές. Άρα, το πλήθος των τρόπων διαμέρισης ισούται με

$$\binom{n}{n_1}\binom{n-n_1}{n_2}\binom{n-n_1-n_2}{n_3}\cdots\binom{n-n_1-n_2-\cdots-n_k}{n_k}$$
$$=\frac{n!}{n_1!(n-n_1)!}\frac{(n-n_1)!}{n_2!(n-n_1-n_2)!}\frac{(n-n_1-n_2)!}{n_3!(n-n_1-n_2-n_3)!}\cdots\frac{(n-n_1-n_2-\cdots-n_{k-1})!}{n_k!(n-n_1-n_2-\cdots-n_k)!}$$
$$=\frac{n!}{n_1!n_2!\cdots n_k!}.$$