ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΤΩΝ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ

1η σειρά ασκήσεων

Ονοματεπώνυμο:

Αριθμός μητρώου:

Προθεσμία παράδοσης: Μέχρι και την Δευτέρα 11 Νοεμβρίου 2024

Να λυθούν **συνολικά 14** ασκήσεις από τις ενότητες **Σύνολα, σχέσεις, απεικονίσεις, Επαγωγή**, **Αρχή εγκλεισμού – αποκλεισμού** και **Αρχή του περιστερεώνα.**

Σύνολα, σχέσεις, απεικονίσεις:

1.1	1.2	1.3	1.4	1.5

Επαγωγή:

1.6	1.7	1.8	1.9	

Αρχή εγκλεισμού – αποκλεισμού:

1.10	1.11	1.12	1.13	1.14

Αρχή του περιστερεώνα:

1.15	1.16	1.17		

Να χρησιμοποιήσετε αυτή τη σελίδα ως εξώφυλλο στις ασκήσεις που θα παραδώσετε. Συμπληρώστε το ονοματεπώνυμο και τον ΑΜ και σημειώστε με Χ τις ασκήσεις που λύσατε.
Στη συνέχεια, σκανάρετε το εξώφυλλο και τα χειρόγραφά σας, σε ένα αρχείο pdf, το οποίο θα παραδώσετε. Οι ασκήσεις μπορούν να παραδοθούν ΜΟΝΟ ΗΛΕΚΤΡΟΝΙΚΑ, μόνο σε μορφή ενός αρχείου pdf, μεγέθους το πολύ 10MB, στο email **jtas@unipi.gr**.
Ο τίτλος του αρχείου θα πρέπει να είναι csmath_askhseis1_pXXXXX.pdf, όπου XXXXX ο αριθμός μητρώου σας.
Η σειρά ασκήσεων είναι προαιρετική και βαθμολογείται με άριστα το 0.5.

1.1 Σύνολα, σχέσεις, απεικονίσεις

Άσκηση 1.1 (Ταυτότητα με σύνολα). *Έστω $A, B, C \subseteq E$. Να δειχθεί ότι*

$$A \cup B \cup C = A \cup (\overline{A} \cap B) \cup (\overline{A} \cap \overline{B} \cap C).$$

Τι σχέση έχουν μεταξύ τους τα σύνολα A, $\overline{A} \cap B$, $\overline{A} \cap \overline{B} \cap C$;

Άσκηση 1.2 (Περιγραφή συνόλων). *Έστω E το σύνολο όλων των φοιτητών που σπουδάζουν στο Πανεπιστήμιο Πειραιώς. Έστω A, B, C τα υποσύνολα του E που περιέχουν τους φοιτητές που*

- *γνωρίζουν Αγγλικά*
- *γνωρίζουν Γαλλικά*
- *γνωρίζουν Γερμανικά*

αντίστοιχα. Χρησιμοποιώντας τα σύνολα A, B, C, E και τις πράξεις της ένωσης, της τομής, του συμπληρώματος και της διαφοράς να εκφράσετε τα σύνολα των φοιτητών που

- *Γνωρίζουν μόνο Αγγλικά*
- *Γνωρίζουν τουλάχιστον δύο από τις τρεις γλώσσες.*
- *Γνωρίζουν ακριβώς δύο από τις τρεις γλώσσες.*
- *Δεν γνωρίζουν καμία από τις 3 γλώσσες.*

Άσκηση 1.3 (Σύγκριση σημείων με ακέραιες συντεταγμένες). *Στο σύνολο $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ ορίζουμε την σχέση S ως εξής: Για κάθε (x, y) και (a, b)*

$$(x, y) S (a, b) \Leftrightarrow x \leq a \text{ και } y \leq b$$

i) Να δειχθεί ότι η σχέση S είναι σχέση μερικής διάταξης στο $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$.
ii) Είναι η S σχέση ολικής διάταξης;
iii) Να σχεδιασθεί το διαγραμμα Hasse της σχέσης S περιορισμένη στο σύνολο $[4] \times [3]$.

Άσκηση 1.4 (Τοπολογική διάταξη). *Να βρεθεί μια τοπολογική διάταξη στο σύνολο $\{A, B, \Gamma, \Delta, E, Z\}$ για την μερική διάταξη:*

$$A < \Delta, \;\; B < A, \;\; B < \Delta, \;\; B < E, \;\; B < Z,$$

$$\Gamma < B, \;\; \Gamma < E, \;\; E < \Delta, \;\; Z < A, \;\; Z < E$$

(στην λίστα παραλείπονται οι ανακλαστικές και οι μεταβατικές συγκρίσεις που προκύπτουν.)

Άσκηση 1.5 (Εικόνες και αντίστροφες εικόνες συνόλων). *Στο σύνολο $[30]$ ορίζουμε την απεικόνιση $f : [30] \to \mathbb{N}$ με*

$$f(n) = \text{ το πλήθος των θετικών διαιρετών του } n.$$

Π.χ. $f(12) = 6$ διότι το 12 έχει 6 θετικούς διαιρέτες (τους $1, 2, 3, 4, 6, 12$)

i) Να βρεθεί η εικόνα του $[30]$ μέσω της f, δηλαδή το σύνολο $f([30])$

ii) Να εξετασθεί αν η f είναι 1-1.

iii) Να βρεθεί η αντίστροφη εικόνα του $\{2\}$.

iv) Να βρεθεί η αντίστροφη εικόνα του $[3]$.

1.2 Επαγωγή

Άσκηση 1.6 (Γινόμενο όρων). *Να δειχθεί ότι*

$$\left(1-\frac{1}{4}\right)\left(1-\frac{1}{9}\right)\left(1-\frac{1}{16}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{n^2}\right)=\frac{n+1}{2n},$$

για κάθε φυσικό αριθμό $n \geq 2$.

Άσκηση 1.7 (Αθροισμα όρων γεωμετρικής προόδου). *Χρησιμοποιώντας χεπαγωγή να δειχθεί ότι για κάθε φυσικό αριθμό* $n \geq 1$ *ισχύει ότι*

$$\frac{2}{3}+\frac{2}{9}+\frac{2}{27}+\cdots+\frac{2}{3^n}=1-\frac{1}{3^n}$$

Άσκηση 1.8 (Αναδρομικές ακολουθίες). *Μια ακολουθία* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *ορίζεται από τη σχέση*

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2} + a_{n-3},$$

όπου $a_1 = 1$, $a_2 = 2$ *και* $a_3 = 3$. *Να δειχθεί ότι* $a_n < 2^n$ *για κάθε* $n \in \mathbb{N}^*$.

Άσκηση 1.9 (Άθροισμα γινομένου συμπληρωματικών όρων). *Να δειχθεί ότι*

$$1\cdot n + 2\cdot(n-1) + 3\cdot(n-2) + \cdots + n\cdot 1 = \frac{n(n+1)(n+2)}{6},$$

για κάθε φυσικό αριθμό $n \geq 1$.[1]

[1] Η παραπάνω ισότητα με τον συμβολισμό Σίγμα γράφεται ως εξής: $\sum_{i=1}^{n} i(n+1-i) = \frac{n(n+1)(n+2)}{6}$.

1.3 Αρχή εγκλεισμού - αποκλεισμού

Άσκηση 1.10 (Πληθάριθμοι τομών, ενώσεων και συμπληρωμάτων).

Έστω E ένα σύνολο με 2000 στοιχεία και $A, B, C \subseteq E$ για οποία ισχύουν $|A| = 800$, $|B| = 740$, $|C| = 1200$, $|A \cap B| = 360$, $|A \cap C| = 500$, $|B \cap C| = 400$, $|A \cap B \cap C| = 160$.

Να βρεθεί πόσα από τα στοιχεία του E:

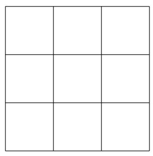
- *i) ανήκουν σε ένα τουλάχιστον από τα A, B, C,*
- *ii) δεν ανήκουν σε κανένα από τα A, B, C,*
- *iii) ανήκουν στο A και δεν ανήκουν στα B, C,*
- *iv) ανήκουν ακριβώς σε ένα από τα A, B, C.*
- *v) δεν ανήκουν ακριβώς σε δύο από τα A, B, C.*

Άσκηση 1.11 (Μαθήματα επιλογής).

Από 100 φοιτητές του Τμήματος Πληροφορικής οι οποίοι ρωτήθηκαν αν είχαν επιλέξει τα κατ' επιλογήν μαθήματα: Γραφικά υπολογιστών (Γ), Βιοπληροφορική (Β) και Κρυπτογραφία (Κ), 33 δήλωσαν ότι είχαν επιλέξει το Γ, 43 το Β, 52 το Κ, 15 τα Γ και Κ, 17 τα Β και Κ, 10 και τα τρία, 10 κανένα από τα τρία. Να βρεθεί:

- *(i) Πόσοι είχαν επιλέξει τα Γ και Β.*
- *(ii) Πόσοι είχαν επιλέξει μόνο το Β.*
- *(iii) Πόσοι είχαν επιλέξει μόνο το Κ.*

Άσκηση 1.12 (Τριχρωματισμοί τετραγώνου). *Κάθε μοναδιαίο τετράγωνο του επόμενου σχήματος χρωματίζεται κόκκινο, μπλε ή κίτρινο.*



Με πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορεί να χρωματισθεί το παραπάνω σχήμα έτσι ώστε να περιέχει τουλάχιστον ένα κόκκινο τετράγωνο με διαστάσεις 2 επί 2;

Άσκηση 1.13 (Αναθέσεις εργασιών σε όλους). *Να βρεθεί ο αριθμός των τρόπων με τους οποίους μπορεί να γίνει ανάθεση 8 ατομικών εργασιών E_1, E_2, E_3, E_4, E_5, E_6, E_7, E_8 σε 4 άτομα A_1, A_2, A_3, A_4 έτσι ώστε κάθε άτομο να αναλάβει τουλάχιστον μια εργασία.*

Άσκηση 1.14 (Ασυνεπείς πληθάριθμοι). *Να δειχθεί ότι δεν υπάρχουν σύνολα A, B, C με $|A \cup B \cup C| = 100$, $|A| = 50$, $|B| = 45$, $|C| = 34$, $|A \cap B| = 20$ και $|A \cap B \cap C| = 10$.*

1.4 Αρχή του περιστερεώνα

Άσκηση 1.15 (Τραπουλόχαρτα). *Από μια τράπουλα 52 φύλλων (χαρτιών) βγάζουμε τυχαία χαρτιά. Η τράπουλα αποτελείται από 4 χρώματα (ομάδες) χαρτιών. Κάθε χρώμα έχει ακριβώς 13 φύλλα. Τα ονόματα των χρωμάτων είναι κούπες, σπαθιά, μπαστούνια και καρό. Ποιος είναι ο ελάχιστος αριθμός χαρτιών που πρέπει να βγάλουμε ώστε:*

i) *να εξασφαλίσουμε τρία χαρτιά με το ίδιο χρώμα;*

ii) *να εξασφαλίσουμε τρία σπαθιά;*

iii) *να εξασφαλίσουμε ένα χαρτί από κάθε χρώμα;*

iv) *να εξασφαλίσουμε ένα ολόκληρο χρώμα;*

Άσκηση 1.16 (Πύργοι στην σκακιέρα).

Σε μια 10×10 *σκακιέρα τοποθετούνται 41 πύργοι. Να δειχθεί ότι πάντα μπορούμε να επιλέξουμε 5 από αυτούς οι οποίοι δεν απειλούνται μεταξύ τους. (Δύο πύργοι απειλούνται αν και μόνο αν βρίσκονται στην ίδια γραμμή ή στην ίδια στήλη της σκακιέρας).*

Άσκηση 1.17 (Αναπόφευκτες αθροίσεις στοιχείων).

i) *Να δειχθεί ότι αν επιλέξουμε* $n+2$ *αριθμούς από το σύνολο* $\{1, 2, 3, \ldots, 2n+1\}$ *τότε μεταξύ αυτών υπάρχουν δύο αριθμοί των οποίων το άθροισμα ισούται με έναν άλλο αριθμό που επιλέξαμε.*

ii) *Να βρεθεί ένα υποσύνολο του* $[2n + 1]$ *με* $n + 1$ *στοιχεία στο οποίο δεν υπάρχουν δύο αριθμοί των οποίων το άθροισμα να ισούται με έναν άλλο αριθμό του υποσυνόλου.*