

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΤΩΝ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ

2η σειρά ασκήσεων

Όνοματεπώνυμο:

Αριθμός μητρώου:

Προθεσμία παράδοσης: Μέχρι και την Πέμπτη 19 Δεκεμβρίου 2024

Να λυθούν συνολικά 12 ασκήσεις από τις ενότητες Συνδυαστική και Προτασιακός Λογισμός.

Συνδυαστική:

2.1 (Πενταψηφιοι αριθμοί)	2.2 (Φοιτητικός ομιλος)	2.3 (Διατάξεις γραμμάτων)	2.4 (Ομάδες φοιτητών)	2.5 (Δημοτικό συμβούλιο)
2.6 (Ομάδες εργασίας φοιτητών)	2.7 (Φρούτα)	2.8 (Ανδρόγυνα που χορεύουν)	2.9 (Εμφωλευμένα σύνολα)	

Προτασιακός Λογισμός:

2.10 (Αναδρομικοί τύποι για την εκτίμηση)	2.11 (Έλεγχος για ταυτολογίες)	2.12 (Διάψευση προτάσεων)	2.13 (Προβλήματα με ταυτολογίες)	2.14 (Συστήματα λογικών ισοδυναμιών)
2.15 (Μορφές DNF και CNF)	2.16 (IF P THEN Q ELSE R)	2.17 (Ικανοποιήσιμα σύνολα)	2.18 (Λογικά συμπεράσματα)	2.19 (Τύποι Horn)
2.20 (Αρχή της απόφασης)	2.21 (Δένδρα αληθείας)	2.22 (Συγκρότηση επιτροπής)		

Να χρησιμοποιήσετε αυτή τη σελίδα ως εξώφυλλο στις ασκήσεις που θα παραδώσετε. Συμπληρώστε το όνοματεπώνυμο και τον ΑΜ και σημειώστε με X τις ασκήσεις που λύσατε.

Στη συνέχεια, σκανάρετε το εξώφυλλο και τα χειρόγρατά σας, σε ένα αρχείο pdf, το οποίο θα παραδώσετε. Οι ασκήσεις μπορούν να παραδοθούν ΜΟΝΟ ΗΛΕΚΤΡΟΝΙΚΑ, μόνο σε μορφή ενός αρχείου pdf, μεγέθους το πολύ 12MB, στο email jtas@unipi.gr.

Ο τίτλος του αρχείου θα πρέπει να είναι `csmath_askhseis2_pXXXXX.pdf`, όπου XXXXX ο αριθμός μητρώου σας.

Η σειρά ασκήσεων είναι προαιρετική και βαθμολογείται με άριστα το 0.5.

2.1 Συνδυαστική

Άσκηση 2.1 (Πενταψήφιοι αριθμοί).

Πόσους πενταψήφιους αριθμούς μπορούμε να κατασκευάσουμε με τα ψηφία 0, 1, 2, 3, 4, 6, 7, 8

- (i) αν πρέπει να είναι άρτιοι αριθμοί και τα ψηφία τους να είναι διαφορετικά,
- (ii) αν πρέπει να είναι περιττοί και το πρώτο και το τρίτο ψηφίο τους είναι ίσα,
- (iii) αν το άθροισμα του πρώτου και του πέμπτου ψηφίου τους είναι ίσο με 8 και τα ψηφία τους είναι διαφορετικά,
- (iv) αν τα ψηφία τους είναι σε γνησίως αύξουσα σειρά (δηλαδή, το πρώτο μικρότερο του δευτέρου, το δεύτερο του τρίτου και το τρίτο του τέταρτου),
- (v) αν περιέχουν ακριβώς μια φορά το ψηφίο 7,
- (vi) αν διαβάζονται το ίδιο από τα αριστερά προς τα δεξιά και από τα δεξιά προς τα αριστερά,

Άσκηση 2.2 (Φοιτητικός όμιλος).

Σε ένα φοιτητικό όμιλο συμμετέχουν 8 Γεωλόγοι, 4 Θεολόγοι, 5 Μαθηματικοί, 7 Φυσικοί και 6 Χημικοί. Να βρεθεί με πόσους τρόπους μπορεί να σχηματισθεί μια πενταμελής επιτροπή

- (i) όταν στην επιτροπή δεν εκπροσωπούνται οι Φυσικοί,
- (ii) όταν στην επιτροπή πρέπει να συμμετέχουν ακριβώς 2 Χημικοί,
- (iii) όταν πρέπει να συμμετέχει τουλάχιστον ένας Γεωλόγος,
- (iv) όταν στην επιτροπή μπορεί να συμμετέχει το πολύ ένας Χημικός,
- (v) όταν στην επιτροπή συμμετέχουν τουλάχιστον 2 Μαθηματικοί,
- (vi) όταν η επιτροπή αποτελείται από ένα αντιπρόσωπο κάθε ειδικότητας,
- (vii) όταν στην επιτροπή είτε συμμετέχουν δύο συγκεκριμένοι Γεωλόγοι (ο Κώστας και η Μαρία), είτε δεν συμμετέχουν καθόλου Γεωλόγοι,
- (viii) όταν η επιτροπή έχει πρόεδρο και γραμματέα.
- (ix) όταν η επιτροπή έχει πρόεδρο και ο πρόεδρος πρέπει να είναι Γεωλόγος,
- (x) όταν η επιτροπή έχει πρόεδρο και γραμματέα οι οποίοι πρέπει να είναι Θεολόγοι.

Άσκηση 2.3 (Διατάξεις γραμμάτων).

- (i) Με πόσους τρόπους μπορούμε να διατάξουμε τρία A, δύο B και πέντε C στη σειρά;
- (ii) Με πόσους τρόπους μπορούμε να διατάξουμε δύο A, τέσσερα B και τρία C στη σειρά έτσι ώστε τα δύο A να είναι διαδοχικά;
- (iii) Με πόσους τρόπους μπορούμε να διατάξουμε πέντε A, δύο B και έξι C στη σειρά έτσι ώστε τα B να έχουν ανάμεσά τους ακριβώς 3 άλλα γράμματα;
- (iv) Με πόσους τρόπους μπορούμε να διατάξουμε τρία A, τέσσερα B και πέντε C στη σειρά έτσι ώστε τα C να μην είναι όλα διαδοχικά;
- (v) Με πόσους τρόπους μπορούμε να διατάξουμε δέκα A, έξι B και πέντε C στη σειρά έτσι ώστε να μην υπάρχουν δύο B σε διαδοχικές θέσεις;

Άσκηση 2.4 (Ομάδες φοιτητών).

Με πόσους τρόπους μπορούν να χωρισθούν 24 φοιτητές σε 3 ομάδες

- (i) των 14, 6 και 4 ατόμων αντίστοιχα;
- (ii) των 14, 5 και 5 ατόμων αντίστοιχα;
- (iii) των 8 ατόμων η καθεμία;
- (iv) των 14, 5 και 5 ατόμων αν τα ονόματα των ομάδων είναι ΚΟΚΚΙΝΟΙ, ΠΡΑΣΙΝΟΙ και ΚΙΤΡΙΝΟΙ αντίστοιχα;

Άσκηση 2.5 (Δημοτικό συμβούλιο).

Ένα δημοτικό συμβούλιο διοικείται από δύο παρατάξεις A και B . Η παράταξη A εκπροσωπείται με 12 μέλη εκ των οποίων 3 είναι γυναίκες και η παράταξη B εκπροσωπείται με 13 μέλη εκ των οποίων 5 είναι γυναίκες. Να βρεθεί με πόσους τρόπους μπορεί να σχηματισθεί μια οκταμελής επιτροπή στην οποία να συμμετέχουν ίσος αριθμός ανδρών και γυναικών και ίσος αριθμός μελών και από τις δύο παρατάξεις.

Άσκηση 2.6 (Ομάδες εργασίας μαθητών).

Μια τάξη ενός σχολείου, που αποτελείται από 8 αγόρια και 8 κορίτσια, χωρίζεται σε 8 ομάδες εργασίας δύο ατόμων n κάθε μια. Με πόσους τρόπους μπορεί να γίνει αυτό

- (i) χωρίς κανέναν περιορισμό, (iii) ώστε κάθε ομάδα να αποτελείται από άτομα διαφορετικού φύλου,
(ii) ώστε κάθε ομάδα να αποτελείται από άτομα του ίδιου φύλου,

Άσκηση 2.7 (Φρούτα).

- (i) Με πόσους τρόπους μπορούμε να μοιράσουμε 10 μήλα σε 4 άτομα A, B, C, D ; (iii) Με πόσους τρόπους μπορούμε να μοιράσουμε 10 μήλα και 8 πορτοκάλια σε 4 άτομα A, B, C, D , έτσι ώστε κάθε άτομο να πάρει τουλάχιστον ένα μήλο;
(ii) Με πόσους τρόπους μπορούμε να μοιράσουμε 10 μήλα σε 4 άτομα A, B, C, D , έτσι ώστε κάθε άτομο να πάρει τουλάχιστον ένα μήλο;

Άσκηση 2.8 (Ανδρόγυνα που χορεύουν).

Με πόσους τρόπους μπορούν να χορέψουν 8 ανδρόγυνα σε ένα κυκλικό χορό

- (i) όταν δεν υπάρχουν άλλοι περιορισμοί, (iii) ώστε για 3 συγκεκριμένα ανδρόγυνα n γυναίκα να χορεύει δίπλα στον άνδρα.
(ii) ώστε οι σύζυγοι να χορεύουν δίπλα-δίπλα,

Άσκηση 2.9 (Εμφωλευμένα υποσύνολα). Να δειχθεί ότι ο αριθμός των τρόπων επιλογής δύο υποσυνόλων A και B του $[n]$ με $A \subseteq B$ ισούται με 3^n .

2.2 Προτασιακός λογισμός

Άσκηση 2.10 (Αναδρομικοί τύποι για την εκτίμηση). Να δειχθεί ότι για κάθε εκτίμηση v ισχύουν τα παρακάτω:

$$i) v(\varphi \rightarrow \psi) = 1 - v(\varphi) + v(\varphi) \cdot v(\psi). \quad ii) v(\varphi \leftrightarrow \psi) = 1 - |v(\varphi) - v(\psi)|.$$

Άσκηση 2.11 (Έλεγχος για ταυτολογίες). Να εξετασθεί ποιές από τις παρακάτω προτάσεις είναι ταυτολογίες:

$$i) \varphi \rightarrow ((\psi \rightarrow \sigma) \rightarrow ((\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \sigma))). \quad ii) (\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \sigma)) \leftrightarrow (\varphi \wedge \psi \rightarrow \sigma).$$

Άσκηση 2.12 (Διάψευση προτάσεων). Να βρεθούν εκτιμήσεις για τις οποίες οι παρακάτω προτάσεις είναι ψευδείς:

$$i) (x \vee y \vee z) \rightarrow ((x \wedge y) \vee (x \wedge z)).$$

$$ii) ((x \vee y) \wedge (y \vee z) \wedge (z \vee x)) \rightarrow (x \wedge y \wedge z).$$

$$iii) (x \vee y) \rightarrow ((\neg x \wedge y) \vee (x \wedge \neg y)).$$

Άσκηση 2.13 (Προβλήματα με ταυτολογίες). Να βρεθεί μια πρόταση φ ώστε η πρόταση σ να είναι ταυτολογία, όταν

$$i) \sigma = ((\varphi \wedge q) \rightarrow \neg p) \rightarrow ((p \rightarrow \neg q) \rightarrow \varphi) \quad ii) \sigma = ((r \rightarrow (\neg q \wedge p)) \rightarrow \varphi) \rightarrow (\varphi \wedge (p \rightarrow q) \wedge r).$$

Άσκηση 2.14 (Συστήματα λογικών ισοδυναμιών). Να βρεθεί μια πρόταση φ που περιέχει τα άτομα p, q, r τέτοια ώστε

$$i) (r \rightarrow \varphi) \models (r \rightarrow (p \wedge q)) \text{ και } (\varphi \rightarrow r) \models (\neg(p \vee q) \rightarrow r).$$

Άσκηση 2.15 (Μορφές DNF και CNF). Να γραφούν σε μορφή DNF και μορφή CNF οι παρακάτω προτάσεις:

$$\varphi_1 = \neg(p_1 \leftrightarrow p_2) \wedge (\neg p_1 \vee p_3), \quad \varphi_2 = (p_1 \rightarrow \neg p_2) \rightarrow \neg(p_3 \wedge \neg p_1).$$

Άσκηση 2.16 (IF P THEN Q ELSE R). Να βρεθεί μια πρόταση φ που περιέχει τα άτομα p, q, r η οποία έχει τον παρακάτω πίνακα αληθείας

p	q	r	φ
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	1

Άσκηση 2.17 (ΙΚανοποιήσιμα σύνολα). Να εξετασθεί ποιά από τα παρακάτω σύνολα προτάσεων είναι ικανοποιήσιμα:

$$i) \Sigma_1 = \{p \wedge q, r \rightarrow \neg q, r \vee \neg p, p \vee q \vee r\}.$$

$$ii) \Sigma_2 = \{p \rightarrow q, q \rightarrow r, r \rightarrow s, s \rightarrow \neg p, \neg p \rightarrow t, t \rightarrow w, w \rightarrow p\}.$$

$$iii) \Sigma_3 = \{p \wedge r, \neg p \vee q, q \rightarrow s, s \rightarrow w, \neg w \rightarrow (p \vee r), p \vee s\}.$$

Άσκηση 2.18 (Λογικά συμπεράσματα). Έστω $\Sigma' = \{p_1 \rightarrow p_2, p_2 \rightarrow p_4, p_2 \rightarrow p_3, p_4 \rightarrow p_3, p_1 \rightarrow p_5, p_5 \rightarrow p_4\}$. Να εξετασθεί αν κάποια από τις προτάσεις $p_1 \rightarrow p_4, p_2 \rightarrow p_5, p_3 \rightarrow p_4$ είναι λογικό συμπέρασμα του Σ' .

Άσκηση 2.19 (Τύποι Horn). Να εξετασθεί αν τα επόμενα σύνολα τύπων Horn είναι ικανοποιήσιμα.

$$i) H_1 = \{p_1, p_6, (p_1 \wedge p_5) \rightarrow p_2, p_3 \rightarrow p_1, (p_1 \wedge p_3) \rightarrow p_4, (p_1 \wedge p_4) \rightarrow p_2, p_1 \rightarrow p_3, \neg p_1 \vee \neg p_5, \neg p_1 \vee \neg p_4 \vee \neg p_5, \neg p_2 \vee \neg p_3 \vee \neg p_5, p_1 \rightarrow p_6\}.$$

$$ii) H_2 = \{\neg p_1 \vee \neg p_2 \vee \neg p_5, \neg p_2, p_1 \rightarrow p_2, (p_3 \wedge p_2 \wedge p_5) \rightarrow p_4, \neg p_4 \vee \neg p_5, (p_2 \wedge p_1) \rightarrow p_3, p_1\}.$$

Άσκηση 2.20 (Αρχή της απόφασης). Να αποδειχθεί με χρήση της αρχής της απόφασης ότι

$$i) \{\neg p \vee \neg q \vee \neg t, \neg t \vee p, q \vee \neg p\} \vdash_r q \vee (\neg p \wedge \neg q \wedge \neg t).$$

$$ii) \{\neg(p_1 \wedge p_6) \vee p_5, p_4, p_3 \rightarrow p_1, (p_5 \rightarrow p_3) \wedge p_5, \neg p_2 \vee \neg p_3\} \vdash_r \neg p_2 \wedge p_1$$

$$iii) \{\neg p \vee s \vee \neg t, \neg t \vee p \vee \neg q, (q \wedge r) \rightarrow t, q \vee s \vee \neg t\} \vdash_r (q \wedge r) \rightarrow (s \vee \neg t).$$

Άσκηση 2.21 (Δένδρα αληθείας). Να εξετασθεί με χρήση των δένδρων αληθείας αν ισχύει ή όχι κάθε μια από τις παρακάτω:

$$i) \{\neg A \vee \neg B \vee \neg C, \neg C \vee A, B \vee \neg A\} \vdash B \vee (\neg A \wedge \neg B \wedge \neg C).$$

$$ii) \{A \rightarrow B, \neg A \rightarrow C\} \models (B \rightarrow A) \rightarrow (B \wedge C).$$

$$iii) \{\neg A \vee B, A\} \vdash (\neg B \rightarrow C) \wedge (A \wedge (B \vee C)).$$

$$iv) \{\neg A \rightarrow B, \neg B \rightarrow C\} \vdash A \rightarrow (\neg C \rightarrow B).$$

$$v) \{\neg A \wedge B, A \rightarrow \neg C\} \vdash A \vee (B \rightarrow C).$$

Αν κάποια από αυτές δεν ισχύει, να βρεθούν και να ερμηνευθούν όλα τα αντιπαραδείγματα.

Άσκηση 2.22 (Συγκρότηση επιτροπής). Για την συγκρότηση μιας επιτροπής, με μέλη από τους $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon$, ισχύουν οι ακόλουθες προϋποθέσεις:

1) Είτε ο α , είτε ο β πρέπει να είναι μέλη, αλλά όχι και οι δύο.

2) Είτε ο γ , είτε ο ε , είτε και οι δύο πρέπει να είναι μέλη.

3) Είτε οι α και γ είναι μέλη, είτε κανείς τους.

4) Αν είναι μέλος ο δ , τότε πρέπει να είναι και ο β .

5) Αν είναι μέλος ο ε , τότε πρέπει να είναι μέλη και οι γ και δ .

6) Αν δεν είναι μέλος ο β , τότε δεν θα είναι μέλος και ο ε .

Να μοντελοποιηθεί το πρόβλημα της συγκρότησης της επιτροπής ως πρόβλημα ικανοποιησιμότητας.