Μαθηματικά Των Υπολογιστών Φροντιστήριο

1.11.14

Συνδυαστική

Το πρόβλημα της επιλογής k αντικειμένων από n αντικείμενα.

	Με σειρά	Χωρίς σειρά
Με Επανάληψη	Επαναληπτικές Διατάξεις n^k	Επαναληπτικοί Συνδυασμοί $\left[{n \atop k}\right] = \binom{n+k-1}{k}$
Χωρίς Επανάληψη	Διατάξεις $\frac{n!}{(n-k)!}$	Συνδυασμοί $\binom{n}{k}$

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Βασικές αρχές απαρίθμησης

$\boxed{1}$ Κανόνας αθροίσματος

Αν $A_1, A_2, \dots, A_k$ διαμέριση του E, τότε
$|E| = |A_1| + |A_2| + \dots + |A_k|$

$\boxed{2}$ Κανόνες γινομένου

Αν $E_1, E_2, \dots, E_k \subseteq E$ τότε
$|E_1 \times E_2 \times \dots \times E_k| = |E_1| \cdot |E_2| \cdots |E_k|$

Άσκηση 1 (7) (SOS)

Να βρεθεί το πλήθος των 4-ψήφιων αριθμών που κατασκευάζονται από τα ψηφία 0,1,2,3,4,5,6,7 όταν:

(i) Επιτρέπονται επαναλήψεις στα ψηφία τους.

Κάθε 4-ψήφιος αριθμός καθορίζεται μοναδικά αν γνωρίζω

τα ψηφία του $\frac{x}{1o}$ $\frac{y}{2o}$ $\frac{z}{3o}$ $\frac{w}{4o}$
Για το πρώτο ψηφίο υπάρχουν 7 επιλογές (εξαιρείται το 0
Για το δεύτερο ψηφίο υπάρχουν 8 επιλογές
Για το τρίτο " " 8 "
" " τέταρτο " " 8 "
Άρα, Από τον κανόνα του γινομένου υπάρχουν $7 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 8 = 3584$ επιλογές
Δηλαδή 3584 αριθμοί.

(ii) Επιτρέπονται επαναλήψεις στα ψηφία τους και οι αριθμοί είναι άρτιοι.
π.χ. 3320 4126

Για το 1ο ψηφίο έχω 7 επιλογές (εξαιρείται το 0)
" " 2ο " " 8 "
" " 3ο " " 8 "
Για το 4ο " " 4 " (0, 2, 4, 6)
Άρα, από τον κανόνα του γινομένου υπάρχουν $7 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 4 = 1792$ επιλογές, δηλαδή 1792 αριθμοί

(iii) Δεν επιτρέπονται επαναλήψεις

_ _ _ _
1ο 2ο 3ο 4ο

Για το 1ο ψηφίο υπάρχουν 7 επιλογές (εξαιρείται το 0)
Για το 2ο ψηφίο υπάρχουν 7 επιλογές
Για το 3ο ψηφίο υπάρχουν 6 επιλογές
Για το 4ο ψηφίο υπάρχουν 5 επιλογές
Άρα από τον κανόνα του γινομένου υπάρχουν $7 \cdot 7 \cdot 5 \cdot 6$ επιλογές
δηλαδή 1470 αριθμοί

(iv) Δεν επιτρέπονται επαναλήψεις στα ψηφία τους και οι αρ.

μοι να είναι περιττοί.

$\frac{x}{1o}\ \frac{y}{2o}\ \frac{z}{3o}\ \frac{w}{4o}$

Για το 1ο ψηφίο υπάρχουν 7 επιλογές
Για το 2ο ψηφίο υπάρχουν 7 επιλογές
Για το 3ο ψηφίο υπάρχουν 6 επιλογές
Για το 4ο ψηφίο υπάρχουν ? επιλογές

} Λάθος!!!

Δεν μπορούμε να υπολογίσουμε άμεσα την απάντηση, διότι δεν γνωρίζουμε πόσα από τα ψηφία 1,3,5,7 έχουν ήδη χρησιμοποιηθεί.

"Εμπειρικός κανόνας": Ξεκινάμε την απαρίθμηση από την πιο ειδική συνθήκη.

x y z w

Για το w υπάρχουν 4 επιλογές (1,3,5,7)
Για το x υπάρχουν 6 επιλογές (εξαιρείται το 0)
Για το y υπάρχουν 6 επιλογές
Για το z υπάρχουν 5 επιλογές.
Άρα από την αρχή του γινομένου υπάρχουν 4·6·6·5 αριθμοί

(v) Δεν επιτρέπονται επαναλήψεις στα ψηφία τους και το άθροισμα του πρώτου και του τέταρτου ψηφίου τους ισούται με 8.

$\frac{x}{1o}\ \frac{y}{2o}\ \frac{z}{3o}\ \frac{w}{4o}$

Για τα ψηφία x, w υπάρχουν οι εξής επιλογές: (1,7), (2,6), (6,2), (7,1), (3,5), (5,3) δηλαδή 6 επιλογές
Για το y υπάρχουν 6 επιλογές

Για το ψηφίο z υπάρχουν 5 επιλογές
Άρα από τον κανόνα του γινομένου υπάρχουν συνολικά
$6 \cdot 6 \cdot 5 = 180$ επιλογές, δηλαδή 180 αριθμοί

(vi) Δεν επιτρέπονται επαναλήψεις στα ψηφία τους και οι αριθμοί πρέπει να είναι άρτιοι.

$$\frac{x}{1o} \quad \frac{y}{2o} \quad \frac{z}{3o} \quad \frac{w}{4o}$$

Για το w υπάρχουν 4 επιλογές (0, 2, 4, 6)
Για το x υπάρχουν ? επιλογές
} Λάθος.

Πάλι δεν μπορούμε να απαντήσουμε άμεσα, διότι δεν γνωρίζουμε αν έχουμε χρησιμοποιήσει ή όχι το 0 στο w.

Διακρίνουμε 2 περιπτώσεις:
α) Το w ισούται με 0.
Για το w έχουμε 1 επιλογή
Για το x έχουμε 7 επιλογές
Για το y έχουμε 6 επιλογές
Για το z έχουμε 5 επιλογές
Άρα από τον κανόνα του γινομένου προκύπτει ότι υπάρχουν
$7 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 1$ επιλογές

β) Το w δεν ισούται με 0
Για το w έχουμε 3 επιλογές
Για το x έχουμε 6 επιλογές
Για το y έχουμε 6 επιλογές
Για το z έχουμε 5 επιλογές.
Άρα από τον κανόνα του γινομένου έχουμε $3 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 5$ επιλογές
Επομένως, συνολικά και από τις 2 περιπτώσεις υπάρχουν $1 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 + 3 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 5$ επιλογές

Άσκηση 2 (8) (SOS)

Σε ένα όμιλο συμμετέχουν 5 Έλληνες, 4 Ιταλοί, 6 Άγγλοι, 5 Γερμανοί και 7 Ρώσοι (27 μέλη συνολικά)
Με πόσους τρόπους μπορεί να σχηματισθεί μια 7μελής επιτροπή όταν:
α) Δεν έχω περιορισμούς στην επιλογή των μελών
$\binom{27}{7}$ τρόποι / επιλογές

β) Πρέπει στην επιτροπή να συμμετέχουν ακριβώς 3 Έλληνες.
Για τους 3 Έλληνες έχουμε $\binom{5}{3}$ επιλογές
Για τα υπόλοιπα 4 μέλη έχουμε $\binom{22}{4}$ επιλογές.
Άρα από την αρχή του γινομένου υπάρχουν $\binom{5}{3}\cdot\binom{22}{4}$ τρόποι σχηματισμού της επιτροπής.

γ) Πρέπει η επιτροπή να αποτελείται από 2 Έλληνες, 2 Ρώσους, 2 Άγγλους και 1 Ιταλό.
Για τους 2 Έλληνες έχουμε $\binom{5}{2}$ επιλογές
Για τους 2 Ρώσους έχουμε $\binom{7}{2}$ επιλογές
Για τους 2 Άγγλους έχουμε $\binom{6}{2}$ επιλογές
Για τον 1 Ιταλό έχουμε $\binom{4}{1}$ επιλογές.
Άρα από τον κανόνα του γινομένου έχουμε $\binom{5}{2}\binom{7}{2}\binom{6}{2}\binom{4}{1}$ τρόπους σχηματισμού της επιτροπής.

δ) η επιτροπή έχει πρόεδρο
Για τον πρόεδρο έχουμε $\binom{27}{1}$ επιλογές
Για τα υπόλοιπα έξι μέλη έχουμε $\binom{26}{6}$ επιλογές
Άρα, από τον κανόνα του γινομένου έχουμε $\binom{27}{1}\binom{26}{6}$ τρόπους σχηματισμού της επιτροπής.

ε) όταν η επιτροπή έχει πρόεδρο και είναι Ιταλός

Για τον Ιταλό πρόεδρο έχουμε $\binom{4}{1}$ επιλογές
Για τα υπόλοιπα 6 μέλη έχουμε $\binom{26}{6}$ επιλογές
Άρα από τον κανόνα του γινομένου έχουμε $\binom{4}{1}\binom{26}{6}$ διαφορετικές επιτροπές.

στ) Προσοχή!!!
η επιτροπή πρέπει να περιέχει **τουλάχιστον** 1 Ιταλό.

ΛΑΘΟΣ !!!

ΛΑΘΟΣ ΑΠΑΝΤΗΣΗ $\binom{4}{1}\binom{26}{6}$
Είναι λάθος διότι μετράμε ως διαφορετικές τις ίδιες επιτροπές.

ΑΠΛΟΥΣΤΕΡΟ ΠΑΡΟΜΟΙΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ:
Σε έναν όμιλο συμμετέχουν 3 Έλληνες $Ε_1, Ε_2, Ε_3$ και 2 Ιταλοί $Ι_1, Ι_2$. Να βρεθεί ο αριθμός των επιτροπών με 2 μέλη στις οποίες περιέχεται τουλάχιστον 1 Ιταλός.

ΣΩΣΤΗ ΑΠΑΝΤΗΣΗ			ΛΑΘΟΣ ΑΠΑΝΤΗΣΗ
$Ι_1Ε_1$	$Ι_2Ε_1$	$Ι_1Ι_2$	$\binom{2}{1}\binom{4}{1} = 2\cdot 4 = 8$
$Ι_1Ε_2$	$Ι_2Ε_2$		
$Ι_1Ε_3$	$Ι_2Ε_3$		
7 Επιτροπές			8 Επιτροπές

Για να απαντήσουμε στο ερώτημα αυτό (χωρίς να κάνουμε το συνηθισμένο λάθος) υπάρχουν 2 βασικοί τρόποι:

$\boxed{\text{1ος τρόπος:}}$ Διακρίνουμε περιπτώσεις ως προς τον αριθμό των Ιταλών που περιέχονται στην επιτροπή.

i) Συμμετέχει 1 ακριβώς Ιταλός

Όπως και πριν β) υπάρχουν $\binom{4}{1}\binom{23}{6}$ τρόποι σχηματισμού της επιτροπής

ii) Συμμετέχουν 2 ακριβώς Ιταλοί
όπως και πριν υπάρχουν $\binom{4}{2}\binom{23}{5}$ τρόποι σχηματισμού

iii) Συμμετέχουν 3 ακριβώς Ιταλοί
όπως και πριν υπάρχουν $\binom{4}{3}\binom{23}{4}$ τρόποι σχηματισμού

iv) Συμμετέχουν 4 ακριβώς Ιταλοί
όπως και πριν υπάρχουν $\binom{4}{4}\binom{23}{3}$ τρόποι σχηματισμού

Άρα συνολικά υπάρχουν $\binom{4}{1}\binom{23}{6}+\binom{4}{2}\binom{23}{5}+\binom{4}{3}\binom{23}{4}+\binom{4}{4}\binom{23}{3}$

2ος Τρόπος Ισχύει η ισότητα # (αριθμός) 7-μελών επιτροπών = # 7μελών επιτροπών με Ιταλούς + # 7μελών επιτροπών χωρίς Ιταλούς

7-μελών επιτροπών $= \binom{27}{7}$

7-μελών επιτροπών χωρίς Ιταλούς $= \binom{23}{7}$

Άρα, το ζητούμενο ισούται με $\binom{27}{7}-\binom{23}{7}$

Συνδυαστικές Αποδείξεις

Άσκηση 3

α) Να δειχθεί ότι ο αριθμός των υποσυνόλων Χ ενός συνόλου Ε, όπου $|E|=n$ και $|X|=k$ ισούται με $\binom{n}{k}$

Κάθε υποσύνολο Χ του Ε προσδιορίζεται μονοσήμαντα από τα στοιχεία του.
Υπάρχουν n επιλογές για τα στοιχεία του, από τις οποίες επιλέγω κ.
Κάθε μία από αυτές τις επιλογές καθορίζει ένα σύνολο Χ.
Υπάρχουν $\binom{n}{k}$ επιλογές. Άρα υπάρχουν $\binom{n}{k}$ τέτοια σύνολα Χ.

β) Να δειχθεί ότι ο αριθμός των δυαδικών λέξεων μήκους n με κ (ακριβώς) άσσους ισούται με $\binom{n}{k}$.

π.χ. $n=5$ 11000 01100 00110 00011
$k=2$ 10100 01010 00101
10010 01001
10001

$\binom{5}{2}=10$

Κάθε δυαδική λέξη μήκους n με k άσσους καθορίζεται μονο σήμαντα αν γνωρίζουμε τις θέσεις των άσσων της.
Κάθε επιλογή k θέσεων για τους άσσους ορίζει μία από τις παραπάνω λέξεις.
Άρα, όσες επιλογές έχω για τις k θέσεις των άσσων, τόσες είναι και οι ζητούμενες λέξεις.
Για να διαλέξουμε k θέσεις από n θέσεις υπάρχουν $\binom{n}{k}$ τρόποι.
Άρα υπάρχουν $\binom{n}{k}$ δυαδικές λέξεις μήκους n με k άσσους.

1) Να δειχθεί συνδυαστικά ότι $\binom{n}{k}=\binom{n}{n-k}$
1ος Γνωρίζουμε ότι ο αριθμός των δυαδικών λέξεων μήκους n με λ άσσους ισούται με $\binom{n}{\lambda}$
Άρα $\binom{n}{k}$ είναι ο αριθμός των δυαδικών λέξεων μήκους n με k άσσους
$\binom{n}{n-k}$ είναι ο αριθμός των δυαδικών λέξεων μήκους n με $n-k$ άσσους.

Σε κάθε δυαδική λέξη μήκους n με k άσσους αντιστοιχεί μία και μοναδική λέξη μήκους n με $n-k$ άσσους, η οποία προκύπτει αλλάζοντας κάθε ψηφίο της από 0 σε 1 και από 1 σε
Άρα, $\binom{n}{k}=\binom{n}{n-k}$

2ος Τρόπος $\binom{n}{k}$ ο αριθμός των υποσυνόλων Χ του Ε όπου

$|E| = n$ και $|X| = k$

$\binom{n}{n-k}$ ο αριθμός των υποσυνόλων Y του E όπου $|E| = n$ και $|Y| = n-$

Σε κάθε υποσύνολο X του E με k στοιχεία αντιστοιχεί ένα μοναδικό υποσύνολο Y του E με n-k στοιχεία. Αν πάρουμε το συμπλήρωμα του X (δηλαδή θέσουμε $Y = E/X$) και αντίστροφα. Επομένως, υπάρχουν τόσα υποσύνολα X με $|X| = k$ όσα και υποσύνολα Y με $|Y| = n-k$.

Άρα $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$

Άσκηση 4

Να αποδειχθεί συνδυαστικά η ταυτότητα

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$$

Έστω ότι θέλουμε να βρούμε τον αριθμό των συνόλων του [n] με k στοιχεία.

Όπως είδαμε πριν, αυτός ο αριθμός ισούται με $\binom{n}{k}$

Μπορούμε να βρούμε αυτόν τον αριθμό και με έναν άλλο τρόπο. Ας διαλέξουμε ένα στοιχείο από το σύνολο [n], π.χ. το 1. Τότε υπάρχουν 2 περιπτώσεις για το 1 σε σχέση με αυτά τα υποσύνολα

a) το 1 ανήκει σ'αυτά τα υποσύνολα.
Για τα υπόλοιπα k-1 στοιχεία του υποσυνόλου έχω $\binom{n-1}{k-1}$. επιλογές.

б) το 1 δεν ανήκει σ'αυτά τα υποσύνολα
Για τα k στοιχεία του υποσυνόλου $\binom{n-1}{k}$

Άρα, ο συνολικός αριθμός των υποσυνόλων του [n] με k στοιχεία ισούται με $\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$

Άρα, $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$