

Μαθηματικά των Υπολογιστών Φροντιστήριο

1.11.14

Συνδυαστική

Το πρόβλημα της επιλογής & αντιστάσεων από n αντικείμενα.

	Με σειρά	Χωρίς σειρά
Με επανάληψη	Επανάληψιμες Διατάξεις n^k	Επανάληψιμοι Συνδυασμοί $[n]_k = (n+k-1)$
Χωρίς επανάληψη	Διατάξεις $n!$ $(n-k)!$	Συνδυασμοί $\binom{n}{k}$

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Βασικές αρχές απαρίθμησης

1 Χανόνας αμοιβαίου

Αν A_1, A_2, \dots, A_k διαφέρουν του E , τότε
 $|E| = |A_1| + |A_2| + \dots + |A_k|$

2 Χανόνας μινομένου

Αν $E_1, E_2, \dots, E_k \subseteq E$ τότε
 $|E_1 \times E_2 \times \dots \times E_k| = |E_1| \cdot |E_2| \cdot \dots \cdot |E_k|$

Άσκηση 1 (7) (SOS)

Να βρεθεί το πλήθος των 4-ψήφιων αριθμών που κατασκευάζονται από τα ψηφία 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 όσων:

(i) επιτρέπεται επανάληψη στα ψηφία τους.

Κάθε 4-ψήφιος αριθμός καθορίζεται μοναδικά αν γνωρίζω

τα ψηφία του $\frac{x}{10} \quad \frac{y}{20} \quad \frac{z}{30} \quad \frac{w}{40}$

Για το πρώτο ψηφίο υπάρχουν 7 επιλογές (εξαιρείται το 0)

Για το δεύτερο ψηφίο υπάρχουν 8 επιλογές

Για το τρίτο " " 8 "

" " τέταρτο " " 8 "

Άρα, από τον κανόνα του γινόμενου υπάρχουν $7 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 8 = 3584$ επιλογές
δηλαδή 3584 αριθμοί.

(ii) Επιτρέπονται επαναλήψεις στα ψηφία τους και οι αριθμοί είναι άρτιοι.

π.χ. 3320 4126

Για το 1ο ψηφίο έχω 7 επιλογές (εξαιρείται το 0)

" " 2ο " " 8 "

" " 3ο " " 8 "

Για το 4ο " " 4 " (0, 2, 4, 6)

Άρα, από τον κανόνα του γινόμενου υπάρχουν $7 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 4 = 1792$ επιλογές, δηλαδή 1792 αριθμοί

(iii) Δεν επιτρέπονται επαναλήψεις

10 20 30 40

Για το 1ο ψηφίο υπάρχουν 7 επιλογές (εξαιρείται το 0)

Για το 2ο ψηφίο υπάρχουν 7 επιλογές

Για το 3ο ψηφίο υπάρχουν 6 επιλογές

Για το 4ο ψηφίο υπάρχουν 5 επιλογές

Άρα από τον κανόνα του γινόμενου υπάρχουν $7 \cdot 7 \cdot 5 \cdot 6 = 1470$ επιλογές
δηλαδή 1470 αριθμοί

(iv) Δεν επιτρέπονται επαναλήψεις στα ψηφία τους και οι αρ.

φοι να είναι πέριτροί.

$$\frac{x}{10} \frac{y}{20} \frac{z}{30} \frac{w}{40}$$

Για το 10 ψηφίο υπάρχουν	7	επιλογές	} Λάθος!!!
Για το 20 ψηφίο υπάρχουν	7	επιλογές	
Για το 30 ψηφίο υπάρχουν	6	επιλογές	
Για το 40 ψηφίο υπάρχουν	?	επιλογές	

Δεν μπορούμε να υπολογίσουμε άμεσα την αστάθεια, διότι δεν μπορούμε πέρα από τα ψηφία 1,3,5,7 έχουν ήδη χρι. εμβόλιμα.

"Εμπειρικός κανόνας": Ζευνάμε την απαρτίωση από την πιο ειδική συνθήκη.

$$x \ y \ z \ w$$

Για το w υπάρχουν 4 επιλογές (1,3,5,7)
Για το x υπάρχουν 6 επιλογές (εξαιρείται το 0)
Για το y υπάρχουν 6 επιλογές
Για το z υπάρχουν 5 επιλογές.
Άρα από την αρχή του γινόμενου υπάρχουν $4 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 5$ αριθμοί

(v) Δεν επιτρέπονται επαναλήψεις στα ψηφία τους και το άθροισμα του πρώτου και του τέταρτου ψηφίου τους ισούται με 8.

$$\frac{x}{10} \frac{y}{20} \frac{z}{30} \frac{w}{40}$$

Για τα ψηφία x, w υπάρχουν οι εξής επιλογές: (1,7), (2,6), (6,2), (7,1), (3,5), (5,3) δηλαδή 6 επιλογές
Για το y υπάρχουν 6 επιλογές

Για το ψηφίο z υπάρχουν 5 επιλογές

Άρα από τον δακτύνα του γνωμένου υπάρχουν συνολικά
 $6 \cdot 6 \cdot 5 = 180$ επιλογές, δηλαδή 180 αριθμοί

(ii) Δεν επιτρέπονται επαναλήψεις στα ψηφία τους και οι αριθμοί πρέπει να είναι άρτιοι.

$$\frac{x}{10} \quad \frac{y}{20} \quad \frac{z}{30} \quad \frac{w}{40}$$

Για το w υπάρχουν 4 επιλογές (0, 2, 4, 6) } Λάθος.
Για το x υπάρχουν ? επιλογές

Πάλι, δεν μπορούμε να απαντήσουμε άμεσα, διότι δεν γνωρίζουμε αν έχουμε χρησιμοποιήσει ή όχι το 0 στο w .

Διακρίνουμε 2 περιπτώσεις:

α) Το w ισούται με 0.

Για το w έχουμε 1 επιλογή

Για το x έχουμε 7 επιλογές

Για το y έχουμε 6 επιλογές

Για το z έχουμε 5 επιλογές

Άρα από τον δακτύνα του γνωμένου προκύπτει ότι υπάρχουν $7 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 1$ επιλογές

β) Το w δεν ισούται με 0

Για το w έχουμε 3 επιλογές

Για το x έχουμε 6 επιλογές

Για το y έχουμε 6 επιλογές

Για το z έχουμε 5 επιλογές.

Άρα από τον δακτύνα του γνωμένου έχουμε $3 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 5$ επιλογές
Επομένως, συνολικά και από τις 2 περιπτώσεις υπάρχουν $1 + 7 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 5$
 $3 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 5$
επιλογές

Άσκηση 2 (8) (SOS)

Σε ένα όργανο συμβατεύχουν 5 Έλληνες, 4 Ιταλοί, 6 Άγγλοι, 5 Γερμανοί και 7 Ρώσοι (27 βέρη συνολικά)

Με πόσους τρόπους μπορεί να εκπαιρευθεί μια 7 βέρη επιτροπή όταν:

α) Δεν έχω περιορισμούς στην επιλογή των βέρων
 $\binom{27}{7}$ τρόποι / επιλογές

β) Πρέπει στην επιτροπή να συμβατεύχουν ακριβώς 3 Έλληνες.

Για τους 3 Έλληνες έχουμε $\binom{5}{3}$ επιλογές

Για τα υπόλοιπα 4 βέρη έχουμε $\binom{22}{4}$ επιλογές.

Άρα από την αρχή του μινυρένου υπάρχουν $\binom{5}{3} \cdot \binom{22}{4}$ τρόποι εκπαιρευθείς της επιτροπής.

γ) Πρέπει η επιτροπή να αποτελείται από 2 Έλληνες, 2 Ρώσους, 2 Άγγλους και 1 Ιταλό.

Για τους 2 Έλληνες έχουμε $\binom{5}{2}$ επιλογές

Για τους 2 Ρώσους έχουμε $\binom{7}{2}$ επιλογές

Για τους 2 Άγγλους έχουμε $\binom{6}{2}$ επιλογές

Για τον 1 Ιταλό έχουμε $\binom{4}{1}$ επιλογές.

Άρα από τον κανόνα του μινυρένου έχουμε $\binom{5}{2} \binom{7}{2} \binom{6}{2} \binom{4}{1}$ τρόπους εκπαιρευθείς της επιτροπής.

δ) η επιτροπή έχει πρόεδρο

Για τον πρόεδρο έχουμε $\binom{27}{1}$ επιλογές

Για τα υπόλοιπα 6 βέρη έχουμε $\binom{26}{6}$ επιλογές

Άρα, από τον κανόνα του μινυρένου έχουμε $\binom{27}{1} \binom{26}{6}$ τρόπους εκπαιρευθείς της επιτροπής.

ε) όταν η επιτροπή έχει πρόεδρο και είναι Ιταλός

Για τον Ιταλό πρόεδρο έχουμε $\binom{4}{1}$ επιλογές
 Για τα υπόλοιπα 6 μέλη έχουμε $\binom{26}{6}$ επιλογές
 Άρα από τον κανόνα του γινόμενου έχουμε $\binom{4}{1} \binom{26}{6}$ διαφορετικές επιτροπές.

στ) Προσοχή!!!

η επιτροπή πρέπει να περιέχει τουλάχιστον 1 Ιταλό.

ΛΑΘΟΣ !!!

ΛΑΘΟΣ ΑΠΑΝΤΗΣΗ $\binom{4}{1} \binom{26}{6}$

Είναι λάθος διότι μετράμε ως διαφορετικές τις ίδιες επιτροπές.

ΑΠΛΟΥΣΤΕΡΟ ΠΑΡΟΜΟΙΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ:

Σε έναν όμιλο συζητήσουν 3 Έλληνες E_1, E_2, E_3 και 2 Ιταλοί I_1, I_2 . Να βρεθεί ο αριθμός των επιτροπών με 2 μέλη στις οποίες περιέχεται τουλάχιστον 1 Ιταλός.

ΣΩΣΤΗ ΑΠΑΝΤΗΣΗ

ΛΑΘΟΣ ΑΠΑΝΤΗΣΗ

$I_1 E_1$ $I_2 E_1$ $I_1 I_2$

$I_1 E_2$ $I_2 E_2$

$I_1 E_3$ $I_2 E_3$

7 Επιτροπές

$$\binom{2}{1} \binom{4}{1} = 2 \cdot 4 = 8$$

8 Επιτροπές

Για να απαντήσουμε στο ερώτημα αυτό (χωρίς να δίνουμε το συνδυασμένο λάθος) υπάρχουν 2 βασικοί τρόποι:

1ος τρόπος: Διακρίνουμε περιπτώσεις ως προς τον αριθμό των Ιταλών που περιέχονται στην επιτροπή.

i) Συμπεριέχει 1 ακριβώς Ιταλός

Όπως και πριν ^{←6)} υπάρχουν $\binom{4}{1} \binom{23}{6}$ τρόποι επιλογής του επιτροπής

ii) Συμπιέχουν 2 ακριβώς άτομα

Όπως και πριν ^{υπάρχουν} $\binom{4}{2} \binom{23}{5}$ τρόποι επιλογής του

iii) Συμπιέχουν 3 ακριβώς άτομα

Όπως και πριν ^{υπάρχουν} $\binom{4}{3} \binom{23}{4}$ τρόποι επιλογής του

iv) Συμπιέχουν 4 ακριβώς άτομα

Όπως και πριν υπάρχουν $\binom{4}{4} \binom{23}{3}$ τρόποι επιλογής του

Άρα συνολικά υπάρχουν $\binom{4}{1} \binom{23}{6} + \binom{4}{2} \binom{23}{5} + \binom{4}{3} \binom{23}{4} + \binom{4}{4} \binom{23}{3}$

2ος Τρόπος | Γράφει η ιδιότητα $\# \text{ (αριθμός)}$ $\# \text{ 7-μελών Επιτροπών} = \# \text{ 7-μελών Επιτροπών με 1 τακτικό} + \# \text{ 7-μελών Επιτροπών χωρίς τακτικό}$

$$\# \text{ 7-μελών Επιτροπών} = \binom{27}{7}$$

$$\# \text{ 7-μελών Επιτροπών χωρίς τακτικό} = \binom{23}{7}$$

Άρα, το ζητούμενο ισούται με $\binom{27}{7} - \binom{23}{7}$

Συνδυαστικές Αποδείξεις

Άσκηση 3

a) Να δείξει ότι ο αριθμός των υποσυνόλων X ενός συνόλου E , όπου $|E|=n$ και $|X|=k$ ισούται με $\binom{n}{k}$

Κάθε υποσύνολο X του E προσδιορίζεται μονοσήμαντα από τα στοιχεία του.

Υπάρχουν n επιλογές για τα στοιχεία του, από τις οποίες επιλέγουμε με k .

Κάθε μία από αυτές τις επιλογές καθορίζει ένα σύνολο X .

Υπάρχουν $\binom{n}{k}$ επιλογές. Άρα υπάρχουν $\binom{n}{k}$ τέτοια σύνολα X .

b) Να δείξει ότι ο αριθμός των διαδισκίων ριζών n με k (ακριβώς) άκρους ισούται με $\binom{n}{k}$.

$n \cdot x \cdot n=5$	11000	01100	00110	00011
$k=2$	10100	01010	00101	
	10010	01001		
	10001			

$$\binom{5}{2} = 10$$

Κάθε δυαδική λέξη μήκους n με k άσσους καθορίζεται από την παρουσία αυ ή απουσία τους στους k άσσους της. Κάθε επιλογή k θέσεων για τους άσσους ορίζει μία από τις παραπάνω λέξεις.

Αρα, όσες επιλογές έχω για τους k θέσεις των άσσων, τόσες είναι και οι δυαδικές λέξεις.

Για να διαλέξουμε k θέσεις από n θέσεις υπάρχουν $\binom{n}{k}$ τρόποι.

Αρα υπάρχουν $\binom{n}{k}$ δυαδικές λέξεις μήκους n με k άσσους.

1) Να δείξει συνδυαστικά ότι $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$

1ος Τρόπος: νωρίζουμε ότι ο αριθμός των δυαδικών λέξεων μήκους n με k άσσους ισούται με $\binom{n}{k}$

Αρα $\binom{n}{k}$ είναι ο αριθμός των δυαδικών λέξεων μήκους n με k άσσους

$\binom{n}{n-k}$ είναι ο αριθμός των δυαδικών λέξεων μήκους n με $n-k$ άσσους

Σε κάθε δυαδική λέξη μήκους n με k άσσους αντιστοιχεί μία και μοναδική λέξη μήκους n με $n-k$ άσσους, η οποία ημε κέρτε αντιστοιχεί κάθε ψηφίο της από 0 σε 1 και από 1 σε 0

Αρα, $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$

2ος Τρόπος $\binom{n}{k}$ ο αριθμός των υποσυνόλων X του E όπου

$$|E|=n \text{ και } |X|=k$$

$\binom{n}{n-k}$ ο αριθμός των υποσυνόλων Y του E όπου $|E|=n$ και $|Y|=n-k$.

Σε κάθε υποσύνολο X του E με k στοιχεία αντιστοιχεί ένα μοναδικό υποσύνολο Y του E με $n-k$ στοιχεία. Αν πάρουμε το συμπληρωμα του X (δηλαδή θέσουμε $Y=E/X$) και αντιστροφή. Επομένως, υπάρχουν τόσα υποσύνολα X με $|X|=k$ όσα και υποσύνολα Y με $|Y|=n-k$.

$$\text{Άρα } \binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

Άσκηση 4

Να αποδειχθεί συνδυαστικά η ταυτότητα

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$$

Έστω ότι θέλουμε να βρούμε τον αριθμό των συνόλων του $[n]$ με k στοιχεία.

Όπως είδαμε πριν, αυτός ο αριθμός ισούται με $\binom{n}{k}$

Μπορούμε να βρούμε αυτόν τον αριθμό και με έναν άλλο τρόπο.

Ας διαλέξουμε ένα στοιχείο από το σύνολο $[n]$, π.χ. το 1.

Τότε υπάρχουν 2 περιπτώσεις για το 1 σε σχέση με αυτά τα υποσύνολα

α) Το 1 ανήκει στα υποσύνολα.

Για τα υποσύνολα $k-1$ στοιχεία του υποσυνόλου έχω $\binom{n-1}{k-1}$ επιλογές.

β) Το 1 δεν ανήκει στα υποσύνολα

Για τα k στοιχεία του υποσυνόλου $\binom{n-1}{k}$

Άρα, ο συνολικός αριθμός των υποσυνόλων του $[n]$ με k στοιχεία ισούται με $\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$

$$\text{Άρα, } \binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$$

The first part of the document discusses the importance of maintaining accurate records. It emphasizes that proper documentation is essential for ensuring the integrity and reliability of the data collected. This involves not only recording the raw data but also noting any potential sources of error or bias that might affect the results.

In the second section, the author describes the methodology used for data collection. This includes details about the sampling process, the instruments used, and the procedures followed to ensure consistency and accuracy. The methodology is designed to minimize external influences and maximize the internal validity of the study.

The third part of the document presents the results of the study. The data shows a clear trend, indicating that the variables being studied are significantly related. The statistical analysis supports the hypothesis, showing a strong positive correlation between the two variables. These findings are consistent with previous research in the field.

Finally, the document concludes with a discussion of the implications of the results. The findings suggest that the theoretical model being tested is supported by the empirical data. This has important implications for future research and for the practical application of the study's findings. The author also identifies some limitations of the study and suggests areas for further investigation.