ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΤΩΝ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ

ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΙΣΜΕΝΑ ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ

1ο : Σαβ 18.10.14 Σύνολα
2ο : Σαβ 1.11.14 Συνδυαστική
3ο : Σαβ 22.11.14 Αρχές / Διαφορές
4ο : Σαβ 6.12.14 Λογική
5ο : Σαβ 20.12.14 Λογική
6ο : Σαβ 17.1.15 Θεωρία Αριθμών

Γιάννης Τασούλας jtas@unipi.gr Γραφείο 542

Σήμερα: Επανάληψη στα σύνολα και σχέσεις

Ερώτηση 1: Ποια είναι η διαφορά μεταξύ συνόλου και οικογένειας;

Απάντηση: Στα σύνολα δεν επιτρέπεται να επαναλαμβάνεται ένα στοιχείο του, στις οικογένειες επιτρέπεται.

* Η οικογένεια συχνά ονομάζεται και πολυσύνολο.

Π.χ. $\{1,2,3\}$ σύνολο και οικογένεια
$\{1,1,2\}$ οικογένεια

Ερώτηση 2: Πώς αναπαρίστανται τα σύνολα στον υπολογιστή;

Απάντηση: Υπάρχουν πολλοί τρόποι. Ένας απλός τρόπος είναι ο επόμενος:
Προϋπόθεση: Θεωρούμε ότι υπάρχει ένα βασικό σύνολο αναφοράς E το οποίο είναι πεπερασμένο και κάθε σύνολο A που θα χρειαστούμε είναι υποσύνολο του E.

Επίσης θα χρειαστεί να ορίσουμε μια διάταξη (σειρά) στα στοιχεία του Ε

Έστω $E = \{x_1, x_2, \ldots x_n\}$ και ας υποθέσουμε ότι η διάταξη (σειρά) των στοιχείων του είναι $x_1, x_2, \ldots x_n$

Κάθε $A \subseteq E$ μπορεί να κωδικοποιηθεί από μια δυαδική λέξη μήκους n:

$$a_1 a_2 a_3 \ldots a_n$$

όπου $a_i = \begin{cases} 1 & \text{αν το } i\text{-στοιχείο του } E \text{ ανήκει στο } A \\ 0 & \text{αν το } i\text{-στο στοιχείο του } E \text{ δεν ανήκει στο } A \end{cases}$

Παραδείγματα

$E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\} = [10]$

Θεωρούμε τα στοιχεία του Ε διατεταγμένα σύμφωνα με την διάταξή τους ως αριθμοί

Το σύνολο

$A_1 = \{1, 3, 8\} \subseteq E$ έχει αναπαράσταση

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	0	1	0	0	0	0	1	0	0

$A_2 = \{2, 4, 6, 8, 10\} \subseteq E$ έχει αναπαράσταση

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	1	0	1	0	1	0	1	0	1

Η λέξη 1001001001 αναπαριστά το σύνολο

$A_3 = \{1, 4, 7, 10\}$

Η λέξη 000 000 000 0 αναπαριστά το κενό σύνολο $\emptyset$

Το σύνολο Ε αναπαρίσταται από την λέξη 111 111 1111

Πλεονεκτήματα της αναπαράστασης αυτής

- Είναι "εύκολο" να εξετάσουμε αν ένα στοιχείο του E ανήκει σε ένα υποσύνολο A

- Είναι "εύκολο" να κάνουμε πράξεις στα σύνολα χρησιμοποιώντας αυτή την αναπαράσταση.

Παράδειγμα

πλήθος στοιχείων του E

Έστω $|E|=n$ υπάρχει μια διάταξη στα στοιχεία του $A, B \subseteq E$ και $a_1 a_2 \dots a_n$, $b_1 b_2 \dots b_n$ είναι οι αναπαραστάσεις τους.

Το συμπλήρωμα του A: A' ή $\bar{A}$ έχει αναπαράσταση

$c_1 c_2 \dots c_n$

όπου $c_i = 1 - a_i$ για κάθε $i \in [n]$.

Η ένωση των A και B: $A \cup B$ έχει αναπαράσταση

$c_1 c_2 \dots c_n$

όπου $c_i = a_i + b_i - a_i b_i = \max\{a_i, b_i\}$

Η τομή των A και B: $A \cap B$ έχει αναπαράσταση

$c_1 c_2 c_3 \dots c_n$

όπου $c_i = a_i b_i = \min\{a_i, b_i\}$

Μειονεκτήματα αυτής της αναπαράστασης

- Αν το σύνολο αναφοράς E είναι "πολύ μεγάλο" και τα σύνολα A που μας ενδιαφέρουν είναι "πολύ μικρά" τότε η αναπαράσταση του A έχει μεγάλο μήκος και αποτελείται εξ ολοκλήρου από 0 και λίγα 1. (Σπατάλη μνήμης)

• Δεν είναι εύκολο πάντα, να βρίσκουμε γρήγορα τη θέση ενός στοιχείου στη διάταξη.

Καρτεσιανό Γινόμενο

Αν A, B είναι δύο μη κενά σύνολα τότε καρτεσιανό γινόμενο με πρώτο παράγοντα το A και δεύτερο παράγοντα το B ονομάζεται το σύνολο όλων των διατεταγμένων ζευγών (a, b) με $a \in A$, $b \in B$ και συμβολίζεται με $A \times B$ δηλαδή

$$A \times B = \{(a, b) : a \in A \text{ και } b \in B\}$$

* Αν κάποιο από τα σύνολα A, B είναι κενό ορίζουμε το καρτεσιανό γινόμενο $A \times B$ να είναι το κενό σύνολο.

Παράδειγμα

$A = \{1, 2, 3\}$
$B = \{x, y\}$

$A \times A = \{(1,1), (1,2), (1,3), (2,1), (2,2), (2,3), (3,1), (3,2), (3,3)\}$

$B \times B = \{(x,x), (x,y), (y,x), (y,y)\}$

$A \times B = \{(1,x), (2,x), (3,x), (1,y), (2,y), (3,y)\}$

$B \times A = \{(x,1), (x,2), (x,3), (y,1), (y,2), (y,3)\}$

Ερώτηση: Πότε $A \times B = B \times A$;

Απάντηση: ① Αν ένα από τα A, B είναι το κενό σύνολο
② Αν $A \equiv B$

Σχέσεις

R: Relation
$\mathbb{R}$: Reals

Έστω A, B δύο μη κενά σύνολα. Κάθε μη κενό υποσύνολο R του καρτεσιανού γινομένου $A \times B$ ονομάζεται διμελής σχέση ή δυαδική σχέση ή απλά σχέση των στοιχείων των A, B.

Αν για τα στοιχεία $a \in A$ και $b \in B$ ισχύει ότι $(a, b) \in R$ τότε λέμε ότι τα a, b σχετίζονται μέσω της σχέσης R και γράφουμε aRb

Παραδείγματα

$A = \{1, 2, 3\}$
$B = \{x, y\}$

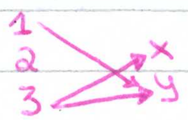
- Μια σχέση R στο $A \times B$ είναι το σύνολο $R = \{(1,x), (2,y)\}$

Αν $(a, b) \notin R$ τότε λέμε ότι τα a, b δεν σχετίζονται μέσω της σχέσης R. Το 1 σχετίζεται με το x, ενώ το 1 δεν σχετίζεται με το y σύμφωνα με τη σχέση R.

- Άλλη μια σχέση R' είναι το σύνολο $R' = \{(1,y), (3,x), (3,y)\}$

Τρόποι αναπαράστασης μιας σχέσης

1) Με γράφημα



Η σχέση R' μπορεί να περιγραφεί στο διπλανό σχήμα

Γράφημα της σχέσης

2) Με πίνακα

Η R' μπορεί να αποθηκευθεί στον επόμενο πίνακα.

$$\begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cc} x & y \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

3 γραμμές 2 στήλες

Πίνακας γειτνίασης ή πρόσπτωσης της σχέσης

Διαμερίσεις και σχέσεις ισοδυναμίας

Μια οικογένεια $(A_i)_{i \in I}$ μη κενών υποσυνόλων ενός συνόλου E ονομάζεται διαμέριση αν:

1. $A_i \cap A_j = \emptyset$ για κάθε $i \neq j$
2. $\bigcup_{i \in I} A_i = E$

Παράδειγμα

$E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\} = [8]$

Τα σύνολα

$A_1 = \{1, 2, 5\}$ $A_2 = \{3, 4\}$ $A_3 = \{6, 7, 8\}$ αποτελούν μια διαμέριση του E.

Μια άλλη διαμέριση του E είναι τα σύνολα $\{1\}$, $\{2, 8\}$, $\{4, 5\}$, $\{3, 6, 7\}$

Μια επιπλέον διαμέριση του E αποτελούν τα σύνολα $\{1\}$, $\{2\}$, $\{3\}$, $\{4\}$, $\{5\}$ $\{6\}$, $\{7\}$, $\{8\}$

Τα σύνολα $A_1 = \{1, 2, 3, 4\}$, $A_2 = \{4, 5, 6, 7, 8\}$ δεν είναι διαμέριση.

Ούτε τα σύνολα $B_1 = \{1, 2, 3, 4\}$, $B_2 = \{5, 6, 7\}$ είναι διαμέριση.

Το Ε είναι διαμέριση του εαυτού του.

Μια (δυαδική) σχέση R στο Ε×Ε ονομάζεται ισοδυναμία ή σχέση ισοδυναμίας αν ικανοποιεί τις εξής ιδιότητες:

(α) xRx για κάθε $x \in E$ (ανακλαστική)

(β) Αν xRy τότε yRx για κάθε $x, y \in E$ (συμμετρική)

(γ) Αν xRy και yRz τότε xRz για κάθε $x, y, z \in E$ (μεταβατική)

Συνήθως μια σχέση ισοδυναμίας συμβολίζεται με ~ και αν aRb γράφουμε $a \sim b$ και λέμε ότι τα a, b είναι ισοδύναμα.

Αν S είναι μια σχέση ισοδυναμίας στο Ε και $a \in E$ τότε το σύνολο

$$C_a = \{ b \in E : a \sim b \}$$

ονομάζεται κλάση ισοδυναμίας του a.

Το σύνολο όλων των κλάσεων ισοδυναμίας μιας σχέσης ισοδυναμίας S ονομάζεται σύνολο πηλίκο.

Παράδειγμα

E = {το σύνολο όλων των φοιτητών του Πα.Πει}

Στο σύνολο Ε (πιο αυστηρά Ε×Ε) ορίζουμε τη σχέση R

xRy αν και μόνο αν οι x, y είναι στο ίδιο τμήμα για κάθε $x, y \in E$

Η σχέση R είναι ανακλαστική.

Η σχέση R είναι συμμετρική.

Η σχέση R είναι μεταβατική

Άρα η σχέση R είναι σχέση ισοδυναμίας

Η κλάση ισοδυναμίας ενός φοιτητή x είναι το σύνολο όλων των φοιτητών που βρίσκονται στο ίδιο τμήμα με τον x.

Το σύνολο πηλίκο αυτής της σχέσης είναι το σύνολο των τμημάτων του Πα.Πει.

* Η κλάση ισοδυναμίας περιέχει φοιτητές.
** Το σύνολο πηλίκο περιέχει τμήματα σύνολα φοιτητών.

Παράδειγμα

$E = \{$σύνολο παιχτών που συμμετέχουν σε ένα πρωτάθλημα$\}$

R: $xRy \Leftrightarrow$ x, y παίζουν στην ίδια ομάδα
S: $xSy \Leftrightarrow$ x, y έχουν την ίδια Εθνικότητα.

Πρόταση (Σύνδεση μεταξύ διαμερίσεων και σχέσεων ισοδυναμίας)

Κάθε σχέση ισοδυναμίας σε ένα σύνολο E ορίζει μια διαμέριση του E. Τα στοιχεία της διαμέρισης είναι οι κλάσεις ισοδυναμίας της σχέσης.

Σχέση διάταξης

Μια σχέση R στο E ονομάζεται μερική διάταξη ή απλά διάταξη όταν ικανοποιεί τις ιδιότητες:

(a) aRa για κάθε $a \in E$ (ανακλαστική)
(b) Αν aRb και bRa τότε $a = b$ $\forall a, b \in E$ (αντισυμμετρική)

Συνήθως μια σχέση διάταξης συμβολίζεται με $\leq$

Αλλη γραφή για το (B)

(B) Αν $a \neq b$ και aRb τότε $b \not R a$

Μια διάταξη ονομάζεται ολική αν ικανοποιεί την ιδιότητα:
Για κάθε $a, b \in E$ ισχύει ότι
aRb ή/και bRa

Παραδείγματα

Powerset

Εστω $x = \{1,2,3\}$ και E το σύνολο των υποσυνόλων του x: (δυναμοσύνολο του x: $P(x)$)

Για κάθε $A, B \in E$ (ισοδύναμα $A, B \subseteq x$) ορίζουμε
$\boxed{ARB \text{ αν } A \subseteq B}$

πχ $A = \{1\}$, $B = \{1,2\}$ τότε ARB
διότι $\{1\} \subseteq \{1,2\}$, $B \not R A$ διότι $\{1,2\} \subseteq \{1\}$

$A = \{1,2\}$ $B = \{1,3\}$
ARB;
BRA;

Η σχέση R είναι ανακλαστική αφού $A \subseteq A$ για κάθε $A \in E$

Η σχέση R είναι αντισυμμετρική αφού
αν ARB και BRA

$$\underbrace{\begin{array}{ccc} ARB & \text{και} & BRA \\ \Downarrow & & \Downarrow \\ A \subseteq B & \text{και} & B \subseteq A \end{array}}_{A = B}$$

Η σχέση R είναι μεταβατική αφού

$$\left.\begin{array}{l} ARB \Rightarrow A \subseteq B \\ BRC \Rightarrow B \subseteq C \end{array}\right\} A \subseteq C \Rightarrow ARC$$

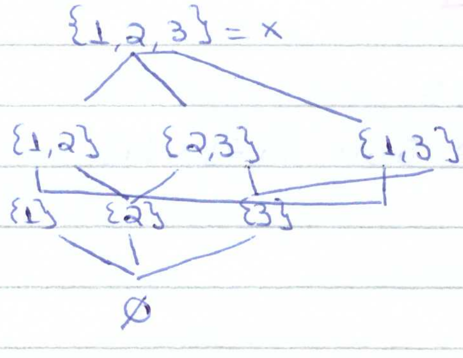
Επομένως η σχέση R είναι σχέση διάταξης.
Όμως η σχέση R <u>δεν είναι</u> ολική διάταξη.

π.χ. $A = \{1\}$, $B = \{2\}$ τότε ούτε $A \subseteq B$
ούτε $B \subseteq A$

Οι σχέσεις μερικής διάταξης μπορούν να απεικονιστούν στο λεγόμενο <u>διάγραμμα Hasse</u>.

$$X = \{1,2,3\}$$

$$E = P(X) = \{\emptyset, X, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}\}$$



<u>Παράδειγμα</u>

$E = \{$οι διαιρέτες του $36\} = \{1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36\}$

Ορίζουμε τη σχέση $|$ στο σύνολο E ως εξής: $a|b \Leftrightarrow a$ διαιρεί το b $\forall a,b \in E$

Η σχέση $|$ είναι ανακλαστική, αντισυμμετρική, μεταβατική. Άρα είναι μερική διάταξη.

Η σχέση $|$ δεν είναι ολική αφού ούτε $2|3$ ούτε $3|2$.