Αρχες / Διαφορές

Άσκηση 1

Έστω E ένα σύνολο με 1000 στοιχεία και $A, B \subseteq E$ για τα οποία ισχύουν $|A|=400$, $|B|=370$, $|C|=600$, $|A\cap B|=180$, $|A\cap C|=250$, $|B\cap C|=200$, $|A\cap B\cap C|=80$. Να βρεθεί το πλήθος των στοιχείων του E

α) που ανήκουν σε ένα τουλάχιστον από το A, B, C

Τα στοιχεία που ανήκουν σε ένα τουλάχιστον από τα A, B, C είναι αυτά που ανήκουν στην ένωση των A, B, C

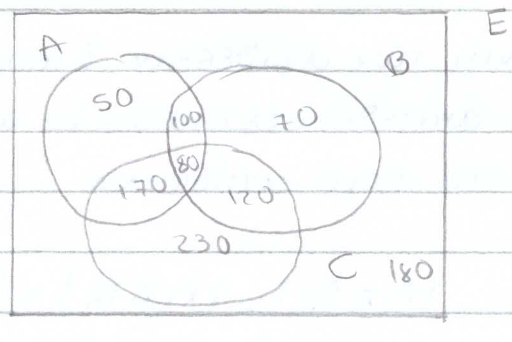
$$|A\cup B\cup C| = |A|+|B|+|C| - (|A\cap B|+|A\cap C|+|B\cap C|) + |A\cap B\cap C|$$
$$= 400+370+600-(180+250+200)+80$$
$$= 820$$

β) που δεν ανήκουν σε κανένα από τα A, B, C

Τα στοιχεία του E που δεν ανήκουν σε κανένα από τα A, B, C ανήκουν στην τομή των συμπληρωμάτων των, $\bar{A}\cap\bar{B}\cap\bar{C}$

$$|\bar{A}\cap\bar{B}\cap\bar{C}| = |\overline{A\cup B\cup C}| = |E\setminus A\cup B\cup C| = |E| - |A\cup B\cup C|$$
$$= 1000-820 = 180$$

γ) που ανήκουν ακριβώς σε ένα από τα σύνολα A, B, C



Από διπλανό σχήμα η απάντηση είναι

$$\underset{|A\cap\bar{B}\cap C|}{50} + \underset{|\bar{A}\cap B\cap\bar{C}|}{70} + \underset{|\bar{A}\cap\bar{B}\cap C|}{230} = 350$$

Άσκηση 2

Να βρεθεί με πόσους τρόπους μπορεί να γίνει ανάθεση 7 ατομικών εργασιών σε 4 άτομα, έτσι ώστε κάθε άτομο να αναλάβει τουλάχιστον μια εργασία

1ος τρόπος

χωρίζουμε (διαμερίζουμε) τις 7 εργασίες σε 4 ομάδες εργασιών. Στη συνέχεια πρέπει να διαλέξουμε πως θα αντιστοιχίσουμε κάθε μια από τις 4 ομάδες σε κάθε ένα από τα 4 άτομα.

Αν υπάρχουν x τρόποι για να κάνουμε τη διαμέριση και y τρόποι για να κάνουμε την αντιστοίχιση

Συνολικά υπάρχουν $x \cdot y$ για να γίνει η ανάθεση

$y = 4!$ $x = ?$ (Διακριτά Μαθηματικά)

2ος τρόπος

Έστω P το σύνολο όλων των αναθέσεων 7 ατομικών εργασιών σε 4 άτομα (χωρίς περιορισμούς)

Για την 1η εργασία υπάρχουν 4 επιλογές

2η εργασία υπάρχουν 4 επιλογές

⋮

7η εργασία υπάρχουν 4 επιλογές

Άρα $|P| = 4^7 = 16384$

Έστω P_1, P_2, P_3, P_4 τα σύνολα όλων των αναθέσεων 7 ατομικών εργασιών σε 4 άτομα ώστε να μην ανατεθεί εργασία στο 1ο άτομο, στο 2ο άτομο, στο 3ο άτομο, στο 4ο άτομο αντίστοιχα

$|P_1| = |P_2| = |P_3| = |P_4| = 3^7$ $|P_1 \cap P_2| = |P_1 \cap P_3| = |P_1 \cap P_4|$

$|P_2 \cap P_3| = |P_2 \cap P_4| = |P_3 \cap P_4| = 2^7$

$|P_1 \cap P_2 \cap P_3| = |P_1 \cap P_2 \cap P_4| = |P_1 \cap P_3 \cap P_4| = |P_2 \cap P_3 \cap P_4| = 1^7 = 1$

$|P_1 \cap P_2 \cap P_3 \cap P_4| = 0$

Οι αναθέσεις που ζητούνται είναι αυτές που ανήκουν στο σύνολο $|\bar{P_1} \cap \bar{P_2} \cap \bar{P_3} \cap \bar{P_4}|$

* Το πρώτο άτομο αναλαμβάνει τουλάχιστον μια εργασία
Ομοίως για τα $\bar{P_2}$, $\bar{P_3}$, $\bar{P_4}$

$|\bar{P_1} \cap \bar{P_2} \cap \bar{P_3} \cap \bar{P_4}| = |\bar{P}| - |P_1 \cup P_2 \cup P_3 \cup P_4| = 4^7 - (4 \cdot 3^7 - 6 \cdot 2^7 + 4 \cdot$

$= 16384 - 8748 + 768 - 4 = 8400$

Ασκηση 3

Μια κληρωτίδα περιέχει 5 κόκκινα, 8 μπλε, 10 λευκά, 12 πράσινα και 7 ροζ σφαιρίδια
Να βρεθεί ο ελάχιστος αριθμός σφαιριδίων που πρέπει να κληρωθούν ώστε να εξασφαλίσουμε ότι θα υπάρχουν

α) τουλάχιστον 2 σφαιρίδια του ίδιου χρώματος

$5 + 1 = 6$

β) τουλάχιστον 2 σφαιρίδια διαφορετικού χρώματος

$12 + 1 = 13$

γ) τουλάχιστον 3 σφαιρίδια ίδιου χρώματος

$2κ + 2μ + 2λ + 2π + 2ρ + 1 = 11$

δ) τουλάχιστον 3 διαφορετικού χρώματος

12Π + 10Λ + 1 = 23

ε) τουλάχιστον 1 σφαιρίδιο από κάθε χρώμα

12Π + 10Λ + 8Μ + 7ρ + 1 = 38

στ) τουλάχιστον 2 πράσινα σφαιρίδια

10Λ + 8Μ + 7ρ + 5Κ + 2 = 32

Άσκηση 4

Αν υποθέσουμε ότι η σχέση γνωριμίας είναι συμμετρική δηλαδή ο x γνωρίζει τον y αν και μόνο αν ο y γνωρίζει τον x.
Να δειχθεί ότι σε κάθε συγκέντρωση n ατόμων ($n \geq 2$) υπάρχουν τουλάχιστον 2 άτομα που έχουν τον ίδιο αριθμό γνωστών (μέσα στη συγκέντρωση)

Κάθε άτομο μπορεί να έχει από 0 έως n-1 γνωστούς στη συγκέντρωση
Δεν γίνεται να υπάρχουν ταυτόχρονα δύο άτομα που έχουν 0 και n-1 γνωστούς αντίστοιχα (διότι η σχέση γνωριμίας είναι συμμετρική)

Άρα υπάρχουν 2 περιπτώσεις:

- Είτε τα άτομα θα έχουν από $\underbrace{0 \text{ έως } n-2}$ → n-1 διαφορετικές τιμές
- Είτε τα άτομα θα έχουν από 1 έως n-1

Άσκηση 5

Στο παιχνίδι Λόττο κληρώνονται 6 από τους αριθμούς $\{1, 2, \ldots 49\}$. Αν υποθέσουμε ότι δημιουργούνταν ένα "βραβείο παρηγορίας" για τα δελτία που δεν περιέχουν κανένα από τους εκλεγμένους αριθμούς, να βρεθεί ο ελάχιστος αριθμός δελτίων που απαιτούνται για να εξασφαλίσουμε το βραβείο.

Αρκούν 7 δελτία

Για παράδειγμα
Δ1 1,2,3,4,5,6
Δ2 7,8,9,10,11,12
Δ3 13,14,15,16,17,18
Δ4 19, ... ,24
Δ5 25, ... ,30
Δ6 31, ... ,36
Δ7 37, ... ,42

Αρκεί να διαλέξουμε 42 διαφορετικούς αριθμούς στα 7 δελτία.

sos

Άσκηση 6

Να υπολογισθεί το άθροισμα $\sum_{k=1}^{n}(k^2+2k)$ με τη βοήθεια των παραγοντικών πολυωνύμων

Υπενθύμιση

$F_0(x) = 1$

$F_k(x) = \underbrace{x(x-1)\ldots(x-k+1)}_{k \text{ όροι}} \quad k \geq 1$ $\qquad F_p(x) = \dfrac{\Delta F_{p+1}(x)}{p+1} \quad k \in \mathbb{N}$

Θα εκφράσουμε τα μονώνυμα k^2 και $2k$ με τη βοήθεια παραγοντικών πολυωνύμων

$F_1(x) = x \implies \boxed{x = F_1(x)}$

$F_2(x) = x(x-1) = x^2 - x \implies x^2 = F_2(x) + x = F_2(x) + F_1(x)$

$$\Rightarrow k^2 = F_2(k) + F_1(k)$$

$$k^2 + 2k = F_2(k) + F_1(k) + 2F_1(k)$$
$$= F_2(k) + 3F_1(k)$$
$$= \frac{\Delta F_3(k)}{3} + \frac{3\,\Delta F_2(k)}{2}$$

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{Υπενθύμιση} \\ \displaystyle\sum_{k=a}^{b} \Delta g(k) = g(b+1) - g(a)\end{array}}$$

$$\sum_{k=1}^{n} k^2+2k = \sum_{k=1}^{n} \Delta\left(\frac{F_3(k)}{3} + \frac{3}{2}F_2(k)\right)$$

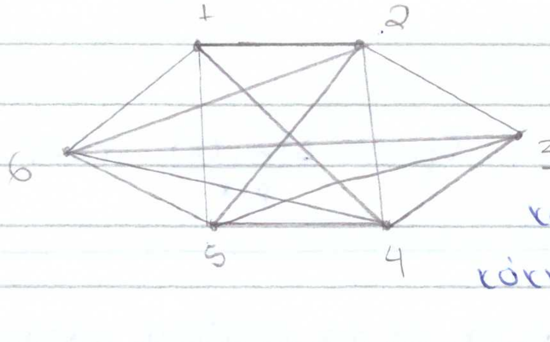
$$= \frac{F_3(n+1)}{3} + \frac{3}{2}F_2(n+1) - \left(\frac{F_3(1)}{3} + \frac{3}{2}F_2(1)\right)$$

$$= \frac{(n+1)(n-1)n}{3} + \frac{3}{2}(n+1)n - \left(\frac{10(-1)}{3} + \cancel{\frac{3\cdot 1\cdot 0}{2}} \rightarrow 0\right)$$

Άσκηση 7 (Πρόβλημα της θεωρίας Ramsey)

Σε κάθε ομάδα 6 ατόμων υπάρχουν σίγουρα 3 που δεν γνωρίζονται ή/και 3 που γνωρίζονται ανά δύο

(Η σχέση γνωριμίας είναι συμμετρική)



Επαναδιατύπωση:

Αν ζωγραφίσουμε τις ακμές του διπλανού σχήματος πράσινες ή κόκκινες τότε υπάρχουν σίγουρα ένα κόκκινο τρίγωνο ή ένα πράσινο τρίγωνο

Υπάρχουν

$\binom{6}{2} = 15$ γραμμές

Κάθε γραμμή έχει 2 επιλογές χρωματισμού

Άρα υπάρχουν $\underbrace{2\cdot 2\cdot 2\cdots 2}_{15\ \text{φορές}} = 2^{15}$ διαφορετικοί τρόποι χρωματισμού

$= 32532$

Παιχνίδι

2 παίχτες επιλέγουν εναλλάξ αριθμούς από το 1 έως το 9

Κάθε αριθμός επιλέγεται το πολύ μια φορά

Κερδίζει όποιος παίχτης διαλέξει 3 πρώτος αριθμούς που αθροίζουν στο $\boxed{15}$

1	2	3	4	5	6	7	8	9
	A	A	A	B	B		B	

A

3, 4, 2, 9

B

5, 8, 6

1	2	3	4	5	6	7	8	9
A	B	B	A		A		A	

A

4, 8, 6, 1

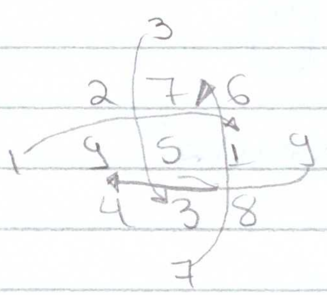
B

2, 35

Μαγικό τετράγωνο
Lo-shu

2	7	6
9	5	1
4	3	8

2	7	6
9	5	1
4	3	8



Άσκηση 8

Να υπολογισθούν τα αθροίσματα

α) $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{Τύπος του διωνύμου του Νεύτωνα}\\ \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} = (a+b)^n\end{array}}$$

Αν τεθεί $a=b=1$ τότε

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 1^k 1^{n-k} = (1+1)^n = 2^n$$

β) $$\sum_{k=0}^{n} n\binom{n}{k} = n\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = n \cdot 2^n$$

γ) $$\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} = \sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k} = \sum_{k=1}^{n} n\binom{n-1}{k-1} = n\sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1} = n\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} = n2^{n-1}$$

Ισχύει ότι

$$\binom{n}{k} = \frac{n}{k}\binom{n-1}{k-1} \Rightarrow k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}$$

δ) $$\sum_{k=0}^{n} (2k+1)\binom{n}{k} = \sum_{k=0}^{n} 2k\binom{n}{k} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$$

$$= 2\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$$

$$= 2 \cdot n \cdot 2^{n-1} + 2^n = (n+1)2^n$$

ε) $$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1}\binom{n}{k} = \sum_{k=0}^{n}$$

$$\binom{n}{k} = \frac{n}{k}\binom{n-1}{k-1} \xrightarrow[\text{θέτω } n=n+1]{\text{θέτω } k=k+1} \binom{n+1}{k+1} = \frac{n+1}{k+1}\binom{n}{k}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{k+1}\binom{n}{k} = \frac{1}{n+1}\binom{n+1}{k+1}$$

Άρα $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1}\binom{n}{k} = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{n+1}\binom{n+1}{k+1}$

$$= \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}\binom{n+1}{k+1} = \frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n+1}\binom{n+1}{k}$$

$$= \frac{1}{n+1}\left(2^{n+1} - 1\right)$$