20.12.14

Μαθηματικά Των Υπολογιστών Φροντιστήριο 5ο

Μέθοδοι απόδειξης στον προτασιακό λογισμό

1. Μέθοδος πινάκων αληθείας
2. Μέθοδος της επαγωγής/αναδρομής
3. Μέθοδος των αξιωμάτων
4. Μέθοδος της αρχής απόφασης
5. Μέθοδος των δένδρων αληθείας

• Αρχή Της Απόφασης (Resolution principle - Αρχή του Robinson).

Κεντρικές ιδέες:

✓ Από τις προτάσεις $q \lor p$ και $r \lor \neg q$ προκύπτει ως συμπέρασμα η πρόταση $p \lor r$.

✓ Η αρχή της απόφασης είναι μία μέθοδος εις άτοπον απαγωγής.

Άσκηση 1

Αν δεχτούμε ότι ισχύουν οι παρακάτω προτάσεις, να αποδειχθεί ότι θα ισχύει η πρόταση "θα δω οπωσδήποτε την ταινία

α) Αν έχω TV και δεν είμαι απασχολημένος, θα δω την ταινία.

β) Αν έχω video και είμαι απασχολημένος, θα γράψω την ταινία.

γ) Αν γράψω τη ταινία, θα τη δω.

δ) Έχω TV

ε) Έχω video.

Θεωρούμε τις εξής προτάσεις:

p: Θα δω την ταινία

q: Έχω TV

r: Είμαι απασχολημένος

s: Θα γράψω την ταινία

t: Έχω video.

Εκφράζουμε τις προτάσεις α), β), γ), δ), ε) στη γλώσσα του Προτασιακού Λογισμού:

α) $(q \land \neg r) \to p$
β) $(t \land r) \to s$
γ) $s \to p$
δ) q
ε) t

Στο πρόβλημα ζητείται να δειχθεί ότι

$\Sigma = \{(q \land \neg r) \to p, (t \land r) \to s, s \to p, q, t\} \vdash p$

Για να εφαρμόσουμε την αρχή της απόφασης πρέπει να γράψουμε τις προτάσεις του Σ σε μορφή CNF (και να τις διασπάσουμε αν χρειάζεται).

$q \land \neg r \to p \vDash\dashv \neg(q \land \neg r) \lor p \vDash\dashv \neg q \lor r \lor p$

$\boxed{\text{Υπενθύμιση: } a \to b \vDash\dashv \neg a \lor b}$

$\boxed{\text{Υπενθύμιση: } \neg(a \land b) \vDash\dashv \neg a \lor \neg b}$

$(t \land r) \to s \vDash\dashv \neg(t \land r) \lor s \vDash\dashv \neg t \lor \neg r \lor s$

$s \to p \vDash\dashv \neg s \lor p$

q, t $\boxed{\text{ok}}$

Στη συνέχεια, θεωρούμε την άρνηση της αποδεικτέας: $\neg p$. (Δεν χρειάζεται να την γράψω σε άλλη μορφή, είναι ήδη στη μορφή που μας ενδιαφέρει.)

Έπειτα, εφαρμόζουμε επαναληπτικά την αρχή της απόφασης μέχρι να καταλήξουμε σε αντίφαση.

1. $\boxed{\neg q \lor r} \lor \boxed{p}$
2. $\neg t \lor \neg r \lor s$
3. $\neg s \lor p$
4. q

(5) t
(6) $\boxed{\neg p}$

(1), (6) $\Rightarrow \neg q \vee r$ (7)
(4), (7) $\Rightarrow r$ (8)
(2), (8) $\Rightarrow \neg t \vee s$ (9)
(5), (9) $\Rightarrow s$ (10)
(3), (10) $\Rightarrow p$ (11)
(6), (11) $\Rightarrow$ αντίφαση

Δηλαδή, προκύπτει ότι από τις προτάσεις του Σ, έπεται η πρόταση p.

Άσκηση 2

Να δειχθεί με τη βοήθεια της αρχής της απόφασης ότι

$$\Sigma = \{p \to (q \vee s), \neg s \vee r, \neg r \vee p, \neg r \vee s, \neg q \vee r\} \vdash p \to (s \wedge r)$$

Οι προτάσεις του Σ είναι στην επιθυμητή μορφή εκτός από την πρόταση $p \to (q \vee s) \vDash\!\dashv \neg p \vee q \vee s$

Η άρνηση της αποδεικτέας είναι
$\neg(p \to (s \wedge r)) \vDash\!\dashv \neg(\neg p \vee (s \wedge r)) \vDash\!\dashv p \wedge \neg(s \wedge r) \vDash\!\dashv p \wedge (\neg s \vee \neg r)$
Διασπάμε την πρόταση στις προτάσεις: p, $\neg s \vee \neg r$

(1) $\neg p \vee q \vee s$
(2) $\neg s \vee r$
(3) $\neg r \vee p$
(4) $\neg r \vee s$
(5) $\neg q \vee r$
(6) p
(7) $\neg s \vee \neg r$

(1), (6) $\Rightarrow q \vee s$ (8)

8, 7 $\Rightarrow q \vee \neg r$ 9
9, 2 $\Rightarrow q \vee \neg s$ 10
10, 8 $\Rightarrow q$ 11
11, 5 $\Rightarrow r$ 12
4, 7 $\Rightarrow \neg r$ 13
12, 13 $\Rightarrow$ αντίφαση

Άρα, ισχύει $\Sigma \vdash p \to (s \wedge r)$

Παρατηρήσεις:

1 Αν το Σ είναι αντιφατικό, τότε $\Sigma \vdash \phi$ για κάθε πρόταση φ.
$\Sigma = \{p, \neg p, \dots\} \overset{?}{\vdash} \phi$

Προσοχή!
2 Από τις προτάσεις $\neg p \vee q$ και $p \vee \neg q$ δεν βγαίνει κανένα χρήσιμο συμπέρασμα. Συγκεκριμένα, από τις προτάσεις προκύπτει ταυτολογία

Άσκηση 3

Πως φτιάχνουμε ασκήσεις για την αρχή της απόφασης.

Διαλέγουμε πόσα άτομα θα εμφανίζονται
π.χ. p, q, r, s, t.

Γράφουμε στην "τύχη" μία αλυσίδα από συνεπαγωγές που το δεύτερο μέλος της κάθε μιας είναι πρώτο μέλος της επόμενης.
π.χ. $p \to (q \vee \neg s)$
$(q \vee \neg s) \to t$
$t \to (s \wedge r)$
$(s \wedge r) \to t \vee q$

Τότε προφανώς θα ισχύει ότι από αυτές τις συνεπαγωγές προκύπτει η συνεπαγωγή $p \to (t \vee q)$
Στη συνέχεια, "μπλέκουμε" τις συνεπαγωγές μετασχηματίζοντας τες σε ισοδύναμες προτάσεις και τις "ανακατεύουμε"

$p \to (q \vee \neg s)$

$(q \vee \neg s) \to t \models\!\!\!\dashv \neg(q \vee \neg s) \vee t \models\!\!\!\dashv (\neg q \wedge s) \vee t \models\!\!\!\dashv (\neg q \vee t) \wedge (s \vee t)$

$\neg q \vee t \quad , \quad s \vee t$

$t \to (s \wedge r) \models\!\!\!\dashv \neg t \vee (s \wedge r) \models\!\!\!\dashv (\neg t \vee s) \wedge (\neg t \vee r)$

$\neg t \vee s \quad , \quad \neg t \vee r$

$(s \wedge r) \to t \vee q \models\!\!\!\dashv \neg(s \wedge r) \vee t \vee q \models\!\!\!\dashv \neg s \vee \neg r \vee t \vee q$

Άρα, η άσκηση θα είναι: Να δειχθεί ότι:

$\Sigma = \{p \to (q \vee \neg s), \overset{5}{\neg t \vee r}, \overset{6}{\neg t \vee \neg r \vee t \vee q}, \overset{7}{\neg t \vee s}, \overset{8}{s \vee t}, \overset{9}{\neg q \vee t}\} \vdash p \to (t \vee q)$

Θα γράψουμε όλες τις προτάσεις σε μορφή CNF

$p \to (q \vee \neg s) \models\!\!\!\dashv \neg p \vee q \vee \neg s \quad 1$

Θεωρούμε την άρνηση της αποδεικτέας

$\neg(p \to (t \vee q)) \models\!\!\!\dashv \neg(\neg p \vee t \vee q) \models\!\!\!\dashv p \wedge \neg t \wedge \neg q$

$\overset{2}{p}, \overset{3}{\neg t}, \overset{4}{\neg q}$

2, 1 $\Rightarrow q \vee \neg s$ 10

10, 4 $\Rightarrow \neg s$ 11

7, 8 $\Rightarrow s$ 12

Άρα, από 11, 12 $\Rightarrow$ αντίφαση

Επομένως, ισχύει το ζητούμενο.

Άσκηση 4

Για τα ζώα ενός σπιτιού ισχύουν οι εξής προτάσεις:

1. Τα μοναδικά ζώα σ'αυτό το σπίτι είναι γάτες.
2. Κάθε ζώο που απολαμβάνει να κοιτάει το φεγγάρι είναι κατάλληλο για κατοικίδιο.
3. Όταν αντιπαθώ ένα ζώο το αποφεύγω
4. Κανένα ζώο δεν είναι σαρκοφάγο, εκτός αν κυνηγάει το βράδυ.
5. Οι γάτες σκοτώνουν τα ποντίκια.

⑥ Κανένα ζώο δεν μου μιλάει, εκτός από αυτά που είναι σ'αυτό το σπίτι.

⑦ Τα καγκουρό είναι ακατάλληλα για κατοικίδια.

⑧ Μόνο τα σαρκοφάγα σκοτώνουν ποντίκια

⑨ Αντιπαθώ τα ζώα που δεν μου μιλάνε

⑩ Τα ζώα που κυνηγάνε το βράδυ, απολαμβάνουν πάντα να κοιτάνε το φεγγάρι.

Ζητείται, το τελικό συμπέρασμα που προκύπτει <u>και</u> από τις 10 προτάσεις.

Μέθοδος Των Δένδρων Αληθείας (Μέθοδος των Tableaux).

Χρησιμοποιεί τους παρακάτω συμπερασματικούς κανόνες:

$$\begin{array}{cc} \multicolumn{2}{c}{X \to Y} \\ \diagup & \diagdown \\ \neg X & Y \end{array} \qquad \begin{array}{c} X \wedge Y \\ | \\ X \\ | \\ Y \end{array} \qquad \begin{array}{cc} \multicolumn{2}{c}{X \vee Y} \\ \diagup & \diagdown \\ X & Y \end{array} \qquad \begin{array}{cc} \multicolumn{2}{c}{X \leftrightarrow Y} \\ \diagup & \diagdown \\ X & \neg X \\ | & | \\ Y & \neg Y \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \neg(X \to Y) \\ | \\ X \\ | \\ \neg Y \end{array} \qquad \begin{array}{cc} \multicolumn{2}{c}{\neg(X \wedge Y)} \\ \diagup & \diagdown \\ \neg X & \neg Y \end{array} \qquad \begin{array}{c} \neg(X \vee Y) \\ | \\ \neg X \\ | \\ \neg Y \end{array} \qquad \begin{array}{cc} \multicolumn{2}{c}{\neg(X \leftrightarrow Y)} \\ \diagup & \diagdown \\ \neg X & X \\ | & | \\ Y & \neg Y \end{array}$$

Είναι παραλλαγή της μεθόδου εις άτοπον απαγωγής.

<u>Άσκηση 5</u>

Να εξετασθεί με χρήση δένδρων αληθείας αν ισχύει κάθε ένα από τα παρακάτω

α) $\Sigma = \{A \to B,\ B \to C,\ C \to D\} \vdash A \to D$

Για να εφαρμόσουμε τη μέθοδο των δένδρων αληθείας θεωρούμε τις προτάσεις του Σ καθώς και την άρνηση της αποδεικτέας:

$(A \to B) \wedge (B \to C) \wedge (C \to D) \wedge (\neg (A \to D))$

Θα ελέγξουμε αν η παραπάνω πρόταση είναι αντίφαση ή όχι.

Κατασκευάζουμε το δένδρο αληθείας ως εξής:

$A \to B \checkmark_2$

$B \to C \checkmark_3$

$C \to D \checkmark_4$

$\neg (A \to D) \checkmark_1$

A

$\neg D$

$\neg A$ $\times$ | B

$\neg B$ $\times$ | C

$\neg C$ $\times$ | D $\times$

Άρα, η πρόταση αυτή είναι αντίφαση, δηλαδή ισχύει το συμπέρασμα

$$\Sigma \vdash A \to D$$

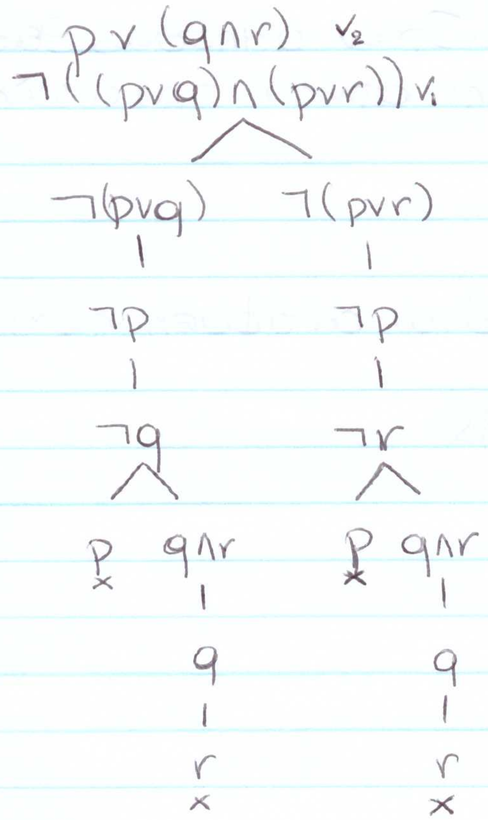
Άσκηση 6

Να δειχθεί με τη βοήθεια δένδρων αληθείας ότι η πρόταση
$p \vee (q \wedge r) \to (p \vee q) \wedge (p \vee r)$
είναι ταυτολογία.

$p \vee (q \wedge r)$

$\neg ((p \vee q) \wedge (p \vee r))$

$\Longrightarrow$



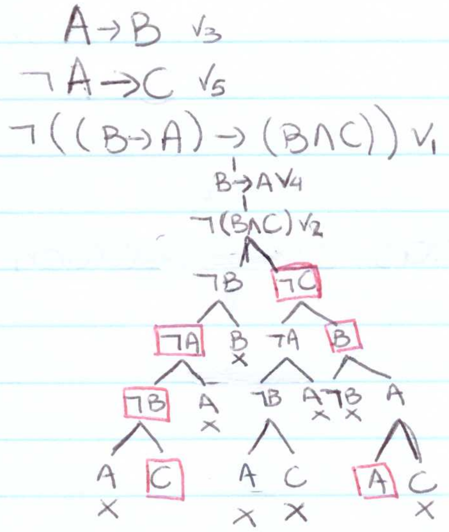
Άρα, η πρόταση είναι αντίφαση, δηλαδή ισχύει το συμπέρασμα.

Άσκηση 7

Να εξετασθεί αν ισχύει:

$\{A \to B, \neg A \to C\} \vdash (B \to A) \to (B \land C)$

Αν δεν ισχύει, να βρεθούν όλα τα αντιπαραδείγματα.



Άρα, η πρόταση δεν είναι αντίφαση, οπότε δεν ισχύει το συμπέρασμα.
Υπάρχουν 2 αντιπαραδείγματα:

1ο αντιπαράδειγμα	2ο αντιπαράδειγμα
A: ψευδές	A: Αληθές
B: ψευδές	B: Αληθές
C: αληθές	C: ψευδές

Βασικές Ισοδυναμίες Κατηγορηματικού Λογισμού

$\boxed{1}$ $\neg(\forall x)\phi \equiv (\exists x)(\neg\phi)$

$\boxed{2}$ $\neg(\exists x)\phi \equiv (\forall x)(\neg\phi)$

$\boxed{3}$ $(\forall x)(\forall y)\phi \equiv (\forall y)(\forall x)\phi$

$\boxed{4}$ $(\exists x)(\forall y)\phi \equiv (\forall y)(\exists x)\phi$

$\boxed{5}$ $(\exists x)(\exists y)\phi \equiv (\exists y)(\exists x)\phi$

Άσκηση 8

Μια ακολουθία (a_n) συγκλίνει στο $a \in \mathbb{R}$, αν και μόνο αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει τουλάχιστον ένα $n_0 \in \mathbb{N}$ με
$|a_n - a| < \varepsilon$ για κάθε $n \geq n_0$.

Να δοθεί ο $\boxed{\text{ορισμός}}$ για το πότε μία ακολουθία (a_n) δεν συγκλίνει στο $\mathbb{R}$.

Πρώτα θα εκφράσουμε τον ορισμό της σύγκλισης ακολουθίας με ποσοδείκτες.

$$a_n \to a \quad \text{αν} \quad (\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0)(\forall n)(n \geq n_0 \to |a_n - a| < \varepsilon)$$

Για να βρούμε πότε δεν συγκλίνει στον αριθμό a θα χρησιμοποιούμε τις ισοδυναμίες $\boxed{1}$, $\boxed{2}$ (και αυτές που γνωρίζουμε από τον προτασιακό λογισμό).

$$a_n \not\to a \quad \text{αν} \quad \neg(\forall \varepsilon > 0)\overbrace{(\exists n_0)(\forall n)(n \geq n_0 \to |a_n - a| < \varepsilon)}^{\phi}$$

$$(\exists \varepsilon > 0)\neg(\exists n_0)\underbrace{(\forall n)(n \geq n_0 \to |a_n - a| < \varepsilon)}$$

$$(\exists \varepsilon > 0)(\forall n_0)\neg(\forall n)(n \geq n_0 \to |a_n - a| < \varepsilon)$$

$$(\exists \varepsilon > 0)(\forall n_0)(\exists n)\neg(n \geq n_0 \to |a_n - a| < \varepsilon)$$

$$(\exists \varepsilon > 0)(\forall n_0)(\exists n)\neg(\neg(n \geq n_0) \vee |a_n - a| < \varepsilon)$$

$$(\exists \varepsilon > 0)(\forall n_0)(\exists n)(n \geq n_0 \wedge \neg(|a_n - a| < \varepsilon))$$

$$(\exists \varepsilon > 0)(\forall n_0)(\exists n)(n \geq n_0 \wedge |a_n - a| \geq \varepsilon)$$

Συμπέρασμα, η <u>a_n δεν συγκλίνει στον $a \in \mathbb{R}$</u>, όταν υπάρχει

$\varepsilon > 0$, τέτοιο ώστε για κάθε $n_0 \in \mathbb{N}$ να υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ με $n \geq n_0$ και $|a_n - a| \geq \varepsilon$

Ορισμός

Τι είναι ορισμός;

Χαρακτηριστικά ορισμού

$\boxed{1}$ Όχι το άγνωστο δια του αγνώστου.
Ελεύθερος σημαίνει αδέσμευτος

$\boxed{2}$ Όχι κύκλος
Δειλία είναι η έλλειψη θάρρους
Έλλειψη θάρρους είναι ο κατανίκητος φόβος στον κίνδυνο
Ακατανίκητος φόβος είναι δειλία

$\boxed{3}$ Ούτε πλατύτερος, ούτε στενότερος
Αθηναίος είναι όποιος κατοικεί στη Καλλιθέα (στενότερος)
Αθηναίος είναι όποιος κατοικεί στην Στερεά Ελλάδα (πλατύτερος).

Τι είναι δημοκρατία;