Άρα η φ έχει 3 μοντέλα

- $v(p_1) = v(p_2) = 1$, $v(p_3) = 0$

$$p_1 \wedge p_2 \wedge \neg p_3$$

- $v(p_1) = v(p_3) = 1$, $v(p_2) = 0$

$$p_1 \wedge \neg p_2 \wedge p_3$$

- $v(p_1) = 0$, $v(p_2) = v(p_3) = 1$

οποτε η ζητουμενη προταση ειναι η

$$(p_1 \wedge p_2 \wedge \neg p_3) \vee (p_1 \wedge \neg p_2 \wedge p_3) \vee (\neg p_1 \wedge p_2 \wedge p_3)$$

14/11/15 (Φροντιστήριο Μαθηματικά των Υπολογιστών)

Σήμερα: Λογική

ΠΙΝΑΚΕΣ ΑΛΗΘΕΙΑΣ

p	q	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \to q$	$p \leftrightarrow q$
Α	Α	Α	Α	Α	Α
Α	Ψ	Ψ	Α	Ψ	Ψ
Ψ	Α	Ψ	Α	Α	Ψ
Ψ	Ψ	Ψ	Ψ	Α	Α

p	$\neg p$
Α	Ψ
Ψ	Α

- v εκτίμηση (valuation) $v: P \to \{0, 1\}$
- Αν $v(\varphi) = 1$, τοτε η v ικανοποιει την φ
  η v ειναι μοντελο της φ
- Αν $v(\varphi) = 1$, για καθε $\varphi \in \Sigma$, τοτε γραφουμε $v \models \Sigma$
  η v ικανοποιει το Σ
  η v ειναι μοντελο του Σ

- Το Σ είναι ικανοποιήσιμο αν υπάρχει v ώστε $v \models \Sigma$

- Αν για κάθε v, με $v \models \Sigma$ ισχύει ότι $v \models \psi$, τότε γράφουμε $\Sigma \models \psi$ (η ψ είναι λογικό συμπέρασμα του Σ)

- Αν $v \models \varphi \Leftrightarrow v \models \psi$ τότε $\varphi \mathrel{\models\!\!\!|} \psi$ (λογικά ισοδύναμες)

- Αν για κάθε v ισχύει ότι $v \models \varphi$, τότε η φ λέγεται ταυτολογία.

$\boxed{\text{Άσκηση 1}}$

Να εξετασθεί αν κάποιο από τα παρακάτω ζεύγη προτάσεων είναι λογικά ισοδύναμα

(α) $\neg(p \leftrightarrow q)$ $\qquad \neg p \leftrightarrow \neg q$

p	q	$\neg(p \leftrightarrow q)$	$\neg p \leftrightarrow \neg q$
Α	Α	Ψ	Α
Α	Ψ	Α	Ψ
Ψ	Α	Α	Ψ
Ψ	Ψ	Ψ	Α

Άρα, το ζεύγος αυτό δεν είναι λογικά ισοδύναμο
Στην πραγματικότητα, ισχύει ότι $\neg p \leftrightarrow \neg q \mathrel{\models\!\!\!|} p \leftrightarrow q$

(β) $p \vee (q \leftrightarrow r)$ $\qquad (p \vee q) \leftrightarrow (p \vee r)$

p	q	r	$q \leftrightarrow r$	$p \vee (q \leftrightarrow r)$	$p \vee q$	$p \vee r$	$(p \vee q) \leftrightarrow (p \vee$
Α	Α	Α	Α	Α	Α	Α	Α
Α	Α	Ψ	Ψ	Α	Α	Α	Α
Α	Ψ	Α	Ψ	Α	Α	Α	Α
Α	Ψ	Ψ	Α	Α	Α	Α	Α
Ψ	Α	Α	Α	Α	Α	Α	Α
Ψ	Α	Ψ	Ψ	Ψ	Α	Ψ	Ψ
Ψ	Ψ	Α	Ψ	Ψ	Ψ	Α	Ψ
Ψ	Ψ	Ψ	Α	Α	Ψ	Ψ	Α

Άρα, το ζεύγος αυτό είναι λογικά ισοδύναμο

$$p \vee (q \leftrightarrow r) \;\dashv\vdash\; (p \vee q) \leftrightarrow (p \vee r)$$

(γ) $p \wedge (q \leftrightarrow r)$ $(p \wedge q) \leftrightarrow (p \wedge r)$

p	q	r	$q \leftrightarrow r$	$p \wedge (q \leftrightarrow r)$	$p \wedge q$	$p \wedge r$	$(p \wedge q) \leftrightarrow (p \wedge$
Α	Α	Α	Α	Α	Α	Α	Α
Α	Α	Ψ	Ψ	Ψ	Α	Ψ	Ψ
Α	Ψ	Α	Ψ	Ψ	Ψ	Α	Ψ
Α	Ψ	Ψ	Α	Α	Ψ	Ψ	Α
Ψ	Α	Α	Α	Ψ	Ψ	Ψ	Α
Ψ	Α	Ψ	Ψ	Ψ	Ψ	Ψ	Α
Ψ	Ψ	Α	Ψ	Ψ	Ψ	Ψ	Α
Ψ	Ψ	Ψ	Α	Ψ	Ψ	Ψ	Α

Άρα, οι προτάσεις ~~[illegible]~~ $p \wedge (q \leftrightarrow r)$ και $(p \wedge q) \leftrightarrow (p \wedge r)$ είναι λογικά ισοδύναμες.

Άσκηση 9

Να βρεθεί ποιες απο τις παρακάτω προτάσεις είναι αληθείς η ψευδείς. Να αιτιολογηθούν οι απαντήσεις

i) Το σύνολο P_0 των ατόμων είναι ικανοποιήσιμο.

ΑΛΗΘΗΣ : Διότι η εκτίμηση v με $v(p)=1$ για κάθε άτομο ικανοποιεί το σύνολο P_0

ii) Το σύνολο P (όλων) των προτάσεων είναι ικανοποιήσιμο.

ΨΕΥΔΗΣ : Διότι περιέχει τις προτάσεις $p, \neg p$ οι οποίες ποτέ δεν συναληθεύουν.

iii) Το σύνολο P_0' που περιεχει τις αρνησεις των ατόμων δεν ειναι ικανοποιησιμο

ΨΕΥΔΗΣ : Διότι η εκτιμηση v με $v(p)=0$ για κάθε άτομο p ικανοποιει όλες τις αρνήσεις των ατόμων, αρα ικανοποιεί το P_0'

iv) Αν τα συνολα Σ_1, Σ_2 είναι ικανοποιήσιμα, τοτε το σύνολο $\Sigma_1 \cup \Sigma_2$ ειναι ικανοποιήσιμο.

ΨΕΥΔΗΣ : Πχ $\Sigma_1 = \{p\}$ ικανοποιησιμο

$\Sigma_2 = \{\neg p\}$ ικανοποιησιμο

$\Sigma_1 \cup \Sigma_2 = \{p, \neg p\}$ μη ικανοποιήσιμο

v) Αν τα σύνολα Σ_1, Σ_2 είναι ικανοποιήσιμα, τοτε το σύνολο $\Sigma_1 \cup \Sigma_2$ δεν ειναι ικανοποιησιμο

ΨΕΥΔΗΣ : πχ $\Sigma_1 = \{p\}$ ικανοποιησιμο

$\Sigma_2 = \{q\}$ —||—

$\Sigma_1 \cup \Sigma_2 = \{p, q\}$ —||—

vi) Αν το Σ είναι ικανοποιήσιμο, τοτε το συνολο Σ' που περιέχει τις αρνησεις όλων των προτασεων του Σ είναι επίσης ικανοποίησιμο

ΨΕΥΔΗΣ : Διότι έστω $\Sigma = \{p \vee \neg p\}$ ικανοποιήσιμο

$\Sigma' = \{\neg(p \vee \neg p)\}$ μη ικανοποιήσιμ

vii) Αν το Σ είναι ικανοποιήσιμο και $\Sigma \models \varphi$, τοτε το $\Sigma \cup \{\varphi\}$ είναι ικανοποιήσιμο.

ΑΛΗΘΗΣ : Διότι αφου το Σ είναι ικανοποιήσιμο, υπαρχει $v \models \Sigma$.

Αφου φ είναι λογικό συμπερασμα του Σ κάθε v με $v \models \Sigma$ ισχύει ότι $v \models \varphi$

Άρα, $v \models \Sigma \cup \{\varphi\}$. Άρα το σύνολο $\Sigma \cup \{\varphi\}$ είναι ικανοποιήσιμο.

viii) Αν $\Sigma \models \varphi$, τότε $\Sigma \cup \{\varphi\}$ είναι ικανοποιήσιμο

ΨΕΥΔΗΣ : Αν το Σ είναι μη ικανοποιήσιμο (αντιφατικό), τότε $\Sigma \models \varphi$ για καθε $\varphi \in P$.

Όμως προφανώς το $\Sigma \cup \{\varphi\}$ είναι μη ικανοποιήσιμο. (αφού δεν γνωρίζουμε αν Σ ικανοποιήσιμο)

Το πρόβλημα των 5 καρτών

Έχουμε 5 κάρτες οι οποιες εχουν στην μια οψη εναν αριθμό και στην άλλη όψη ένα γραμμα.
Είναι τοποθετημενες πανω σε μια επιφάνεια.

A	K	5	6	7

Θέλουμε να ελέγξουμε αν ισχυει η οχι η πρόταση:

φ: "Αν η κάρτα εχει άρτιο αριθμό στην μια πλευρά τοτε έχει φωνηεν στην άλλη πλευρά."

Ποιος είναι ο ελάχιστος αριθμός απο κάρτες που πρέπει να γυρίσω ώστε να βεβαιωθούμε αν ισχύει η πρόταση;

Σχήμα αντιθετο-αντιστροφής

Η προταση

"Αν p τοτε q" $p \to q$

είναι λογικά ισοδυναμη με την προταση

"Αν οχι q, τοτε οχι p" $\neg q \to \neg p$

Στο προβλημα έχουμε:

p: Η καρτα εχει αρτιο αριθμο

q: Η καρτα εχει φωνηεν

Η φ είναι η πρόταση

$\varphi: p \to q$

Η φ είναι ισοδυναμη με την προταση : $\neg q \to \neg p$

δηλαδή,

Αν η καρτα εχει σύμφωνο, τοτε πρέπει να εχει περιττό στην άλλη πλευρά

Αρα, δεν μας ενδιαφέρουν οι περιπτώσεις που έχουν περιττό στην μια πλευρά η φωνηεν στην μια πλευρά

Αρα, αρκεί να γυρίσω τις κάρτες που έχουν άρτιο αριθμό ή έχουν σύμφωνο.

Δηλαδή, τις κάρτες $\boxed{K}$, $\boxed{6}$

Αρχή της επαγωγικής αποδειξης στον Π. Λ

Εστω $A(\varphi)$ μια ιδιοτητα που αναφερεται σε προτασεις φ του Π. Λ.

Αν ισχυουν οι παρακατω ιδιοτητες :

1. Η $A(p)$ ειναι αληθης, για κάθε άτομο $p, p \in P_0$
2. Αν η $A(\varphi)$ ειναι αληθης, τοτε και η $A(\neg\varphi)$ ειναι επισης αληθης
3. Αν οι προτάσεις $A(\varphi), A(\psi)$ ισχύουν, τοτε ισχυουν και οι προτάσεις $A(\varphi \square \psi)$. $\square = \wedge, \vee, \leftrightarrow, \rightarrow$

Αν ισχυουν και οι 3 ιδιοτητες, τοτε η προταση $A(\varphi)$ ειναι αληθης, για καθε $\varphi \in P$

Ασκηση 3

Να δοθει ο επαγωγικος ορισμος των παρακατω εννοιων

α) $a(\varphi)$: Ο αριθμος των θεσεων οπου εμφανιζεται ατομο στην φ.

πχ $\quad p \vee q \quad a(p \vee q) = 2$

$p \vee (q \leftrightarrow p) \quad a(p \vee (q \leftrightarrow p)) = 3$

Πρέπει να ορίσουμε την συνάρτηση $a(\varphi)$ στις παρακάτω 3 περιπτώσεις :

$a(\varphi) = ;$ οπου $\varphi =$ άτομο

$a(\neg\varphi) = ;$ οταν γνωριζουμε την τιμη του $a(\varphi)$

$a(\varphi \Box \psi) = ;$ οταν γνωριζουμε τις τιμες των $a(\varphi), a(\psi)$.

Οριζουμε :

$a(p) = 1$, για καθε $p \in P_0$

$a(\neg\varphi) = a(\varphi)$, για καθε $\varphi \in P$

$a(\varphi \Box \psi) = a(\varphi) + a(\psi)$, για καθε $\varphi, \psi \in P$

πχ $\quad a((p \vee q) \leftrightarrow p)) = a(p \vee q) + a(p) =$

$a(p) + a(q) + a(p) = 1+1+1 = 3$

{Για να κανω επαγωγική αποδειξη, χρειαζομαι επαγωγικό ορισμό}

β) Ο αριθμός των θέσεων της φ οπου εμφανιζεται <u>διμελής</u> συνδεσμος

πχ $p \vee q$ $\quad B(p \vee q) = 1$

$p \vee (q \leftrightarrow p)$ $\quad B(p \vee (q \leftrightarrow p)) = 2$

Οριζουμε:

$B(p) = 0$, για κάθε $p \in P_0$.

$B(\neg\varphi) = B(\varphi)$, για κάθε $\varphi \in P$.

$B(\varphi \square \psi) = B(\varphi) + B(\psi) + 1$, για κάθε $\varphi, \psi \in P$

! γ) Να δειχθεί οτι για $\varphi \in P$ ισχύει οτι

$$a(\varphi) = B(\varphi) + 1$$

<u>Αποδειξη</u>: Για καθε $p \in P_0$ ισχυει οτι

$$a(p) = 1 = 0 + 1 = B(p) + 1$$

αρα, η προταση ισχυει για καθε $p \in P_0$

{αποδεικνυουμε οτι ισχυει για τα ατομα}

Εστω ~~[illegible]~~ $\varphi \in P$ για την οποία ισχύει οτι

$$a(\varphi) = B(\varphi) + 1$$

Θα δειξουμε οτι και

$$a(\neg\varphi) = B(\neg\varphi) + 1$$

{αποδεικνύουμε οτι ισχυει και για $\neg\varphi$}

$$a(\neg\varphi) = a(\varphi) = B(\varphi) + 1 = B(\neg\varphi) + 1$$

αρα, και σ'αυτη την περιπτωση ισχύει η προταση

Εστω $\varphi, \psi \in P$ για τις οποίες ισχύουν {αποδεικνουμε οτι ισχυει για $\varphi \square \psi$}

$$a(\varphi) = B(\varphi) + 1$$
$$a(\psi) = B(\psi) + 1$$

Θα δειξουμε οτι

$$a(\varphi \square \psi) = B(\varphi \square \psi) + 1$$

Πράγματι, $a(\varphi \square \psi) = a(\varphi) + a(\psi)$

$$= B(\varphi) + 1 + B(\psi) + 1$$
$$= B(\varphi \square \psi) + 1$$

Αρα, η πρόταση ισχύει και σ'αυτη την περίπτωση
Αρα, <u>απο την επαγωγική αρχή</u> ~~xxxxxx~~ η ισότητα $a(\varphi) = B(\varphi) + 1$ ισχυει για καθε $\varphi \in P$

δ) Να ορισθει επαγωγικά η συναρτηση

$$\xi(\varphi) = \begin{cases} 1, & \text{αν η } \varphi \text{ περιεχει διμελή συνδεσμο} \\ 0, & \text{αν η } \varphi \text{ δεν περιέχει διμελή σύνδεσμο} \end{cases}$$

Ορίζουμε :

$$\xi(p) = 0, \text{ για καθε } p \in P_0$$
$$\xi(\neg\varphi) = \xi(\varphi), \text{ για καθε } \varphi \in P$$
$$\xi(\varphi \square \psi) = 1, \text{ για καθε } \varphi, \psi \in P$$

ε) Να ορισθει επαγωγικά η συναρτηση $\zeta(\varphi)$ οπου

$$\zeta(\varphi) = \begin{cases} 1 & \text{αν η } \varphi \text{ περιεχει αρνηση} \\ 0 & \text{αλλιως} \end{cases}$$

Ορίζουμε :

$$\zeta(p) = 0$$
$$\zeta(\neg\varphi) = 1$$

!!! $\zeta(\varphi \square \psi) = \max\{\zeta(\varphi), \zeta(\psi)\} = \zeta(\varphi) + \zeta(\psi) - \zeta(\varphi) \cdot \zeta(\psi)$

Άσκηση 4

Δίνεται η πρόταση φ

$$\varphi = (p \to q) \to \neg(r \leftrightarrow (p \land \neg q))$$

Να γραφεί η πρόταση φ σε (πλήρη) κανονική συζευκτική μορφή

Θα χρειαστούμε να βρούμε όλα τα μοντέλα της φ

p	q	r	$p \to q$	$p \land \neg q$	$r \leftrightarrow (p \land \neg q)$	$\neg(r \leftrightarrow (p \land \neg q))$	φ
Α	Α	Α	Α	Ψ	Ψ	Α	Α
Α	Α	Ψ	Α	Ψ	Α	Ψ	Ψ
Α	Ψ	Α	Ψ	Α	Α	Ψ	Α
Α	Ψ	Ψ	Ψ	Α	Ψ	Α	Α
Ψ	Α	Α	Α	Ψ	Ψ	Α	Α
Ψ	Α	Ψ	Α	Ψ	Α	Ψ	Ψ
Ψ	Ψ	Α	Α	Ψ	Ψ	Α	Α
Ψ	Ψ	Ψ	Α	Ψ	Α	Ψ	Ψ

Για την DNF μορφή ελέγχουμε όλες τις εκτιμήσεις που επαληθεύουν την φ

Άρα, η DNF μορφή της φ είναι:

$$(p \land q \land r) \lor (p \land \neg q \land r) \lor (p \land \neg q \land \neg r) \lor (\neg p \land q \land r) \lor (\neg p \land \neg q \land r)$$

Για την $\boxed{CNF}$ μορφη ελεγχουμε ολες τις εκτιμησεις που δεν επαληθευουν την φ

Αρα, η CNF μορφη της φ ειναι :

$$(\neg p \vee \neg q \vee r) \wedge (p \vee \neg q \vee r) \wedge (p \vee q \vee r)$$

Άσκηση 5

Γρίφοι

Σε ενα νησί υπαρχουν 2 είδη κατοίκων:

- Οι αφεντες που λενε παντα αληθεια
- Οι υπηρετες που λενε παντα ψεματα.

Συνανταμε 2 ανθρωπους, τον Α και τον Β.

α) Ο Α λεει : ο Β ειναι αφέντης

Ο Β λεει : οι δυο μας ειμαστε διαφορετικοι

Να βρεθεί τι είναι οι Α, Β.

Διακρινουμε περιπτώσεις :

Α αφεντης ⇒ Α λέει αληθεια ⇒ Β ειναι αφεντης
⇒ Β λεει αληθεια ⇒ άτοπο

Άρα, Α υπηρετης ⇒ Α λεει ψεματα ⇒ Β υπηρετης

Β λεει ψεματα ⇒ ισχύει

Αρα Α, Β υπηρέτες

β)

Ο Α λεει : Και οι δυο ειμαστε αφεντες

Ο Β λεει : Ο Α ειναι υπηρετης $(\neg(p \wedge q)) \equiv$

$\vee$

$\neg p \vee \neg q$

Να βρεθεί τι ειναι οι Α, Β

Διακρίνουμε περιπτώσεις

A αφεντης ⇒ A λεει αληθεια ⇒ B ειναι αφεντης ⇒ B λεει αληθεια ⇒ A ειναι υπηρετης ⇒ ατοπο

A υπηρετης ⇒ A λέει ψέματα ⇒ Το πολυ ενας απο τους 2 ειναι αφεντης

B λεει ο A ειναι υπηρετης ⇒ B λεει αλήθεια ⇒ B είναι αφεντης ⇒ Το πολυ ενας απο τους δυο είναι αφεντης ⇒ A υπηρέτης

Αρα, A υπηρέτης, B αφέντης

$\boxed{\text{Ασκηση 6}}$

Σε ενα νησί υπάρχουν 3 κατηγορίες κατοίκων:

- Οι αφεντες που λενε παντα αληθεια
- Οι υπηρετες που λεντε παντα ψεματα
- Οι κατασκοποι που λενε η αληθεια η ψέμα

Συναντάμε 3 ανθρωπους, τους A, B, Γ,
Το καθε ατομο γνωριζει σε ποια κατηγορια ειναι οι υπολοιποι

a) Αν ξερουμε οτι ενας ειναι αφεντης, ενας υπηρετης, ενας κατασκοπος και

Ο A λεει: ο Γ ειναι ~~αφεντης~~ υπηρετης
Ο B λεει: ο A ειναι αφεντης
Ο Γ λεει: Εγω ειμαι ο κατασκοπος

Να βρεθει τι ειναι οι A, B, Γ

Ασκηση 7

Ενας Μ μαθηματικός ειπε στους μαθηματικούς Π, Σ:
Εχω σκεφτεί δυο αριθμους Φυσικούς μεγαλυτερους απο 1
και το αθροισμα τους μικροτερο απο το 100.
Ο Μ λεει κρυφα στον Π το γινομενο των αριθμών
Ο Μ λεει κρυφα στον Σ το αθροισμα των αριθμων
Η στιχομυθια που ακολουθεί είναι η εξης:

Π: δεν μπορω να βρω ποιοι ειναι οι αριθμοί
Σ: Το ήξερα απο πριν οτι δεν μπορεις να τους βρεις
Π: Αφου ειναι ετσι τοτε τους βρηκα
Σ: Αφου τους βρηκες τους γνωρίζω κι εγώ

!!! Να βρεθουν οι αριθμοί που σκεφτηκε ο Μ