Σήμερα: Αρχή της Επαγωγής
Σύνολα, Σχέσεις, Ισοδύναμα Σύνολα

Άσκηση 1

Να δειχθεί ότι $\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\dots+\frac{1}{n!} \leq 2-\frac{1}{n}$, για κάθε $n \geq 2$

Υπενθύμιση: $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (n-1)n$

$1! = 1 \quad 2! = 1 \cdot 2 = 2 \quad 3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$

$0! = 1 \qquad n! = (n-1)! \cdot n$

Έστω η πρόταση $\Pi(n)$

$\Pi(n)$: Ισχύει ότι $\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\dots\frac{1}{n!} \leq 2-\frac{1}{n}$

$\boxed{1}$ Η $\Pi(2)$ είναι αληθής, διότι:

$\boxed{n=2}$ $$\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!} \leq 2-\frac{1}{2} \Leftrightarrow 1+\frac{1}{2} \leq 2-\frac{1}{2} \Leftrightarrow 2 \leq 2$$

$\boxed{2}$ Έστω ότι η $\Pi(k)$ είναι αληθής για κάποιο $k \geq 2$, δηλαδή

$$\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\dots+\frac{1}{k!} \leq 2-\frac{1}{k}$$

Θα δείξουμε ότι ισχύει και η $\Pi(k+1)$, δηλαδή

$$\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\dots+\frac{1}{k!}+\frac{1}{(k+1)!} \leq 2-\frac{1}{k+1}$$

Έχουμε ότι:

$$\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\dots+\frac{1}{k!}+\frac{1}{(k+1)!} \leq 2-\frac{1}{k}+\frac{1}{(k+1)!}$$

$\rightarrow$

Αρκεί να δείξουμε ότι:

$$2-\frac{1}{k}+\frac{1}{(k+1)!}\le 2-\frac{1}{k+1}$$

Ισοδύναμα έχουμε ότι:

$$\frac{1}{(k+1)!}\le \frac{1}{k}-\frac{1}{k+1} \iff \frac{1}{(k+1)!}\le \frac{(k+1)-k}{k(k+1)} \iff$$

$$\frac{1}{(k+1)!}\le \frac{1}{k(k+1)} \iff \frac{1}{\cancel{(k+1)}\,\cancel{k}(k-1)!}\le \frac{1}{\cancel{k}\cancel{(k+1)}} \iff$$

$$\frac{1}{(k-1)!}\le \frac{1}{1} \iff \underset{\text{ισχύει}}{(k-1)!\ge 1}, \qquad k-1\ge 1$$

Άρα η $\Pi(k+1)$ είναι αληθής. Επομένως, από την αρχή της επαγωγής, η $\Pi(n)$ είναι αληθής για κάθε $n\ge 2$.

Άσκηση 2

Μια ομάδα n ατόμων κουτσομπολεύουν διακριτικά μεταξύ τους μέσω τηλεφώνου. Σε μια κλήση ανάμεσα στον Α και στον Β, ο Α λέει στον Β όλα τα κουτσομπολιά που γνωρίζει και ο Β ανταποδίδει. Κάθε άτομο γνωρίζει τουλάχιστον ένα κουτσομπολιό που δεν το γνωρίζουν οι άλλοι.

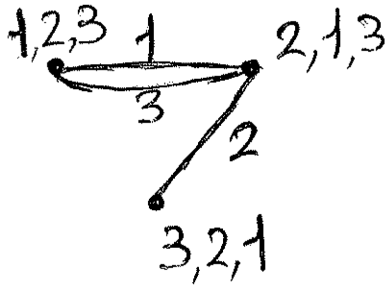
Έστω a_n ο ελάχιστος αριθμός κλήσεων που πρέπει να γίνουν ώστε όλα τα κουτσομπολιά να είναι γνωστά σε όλους.

α) Να δειχθεί ότι $a_2=1, a_3=3, a_4=4$

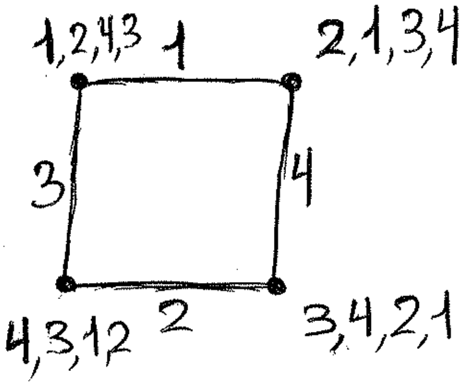
β) Να δειχθεί ότι $a_n\le 2n-4$, για κάθε $n\ge 4$

α)

$a_2=1$



$a_3=3$



β) Έστω η πρόταση $\Pi(n)$: $a_n \leq 2n-4$

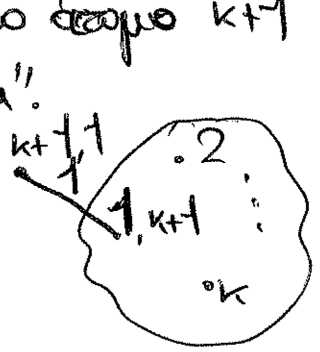
Για $n=4$ έχουμε ότι $a_4 \leq 2\cdot 4-4=4$, άρα η $\Pi(4)$ είναι αληθής.

Έστω ότι η $\Pi(\kappa)$ είναι αληθής για κάποιο $\kappa \geq 4$

Θα δείξουμε ότι και η $\Pi(\kappa+1)$ είναι αληθής, δηλαδή

$a_{\kappa+1} \leq 2(\kappa+1)-4$

Πράγματι, έστω ότι έχουμε $\kappa+1$ άτομα. Αρχικά, το άτομο $\kappa+1$ επικοινωνεί με το άτομο 1 και ανταλλάσουν "νέα".



Στη συνέχεια τα κ άτομα ανταλλάσουν τα "νέα" με a_κ κλήσεις (αγνοώντας το $\kappa+1$).

Στο τέλος το άτομο 1 καλεί το άτομο $\kappa+1$ και του μεταφέρει όλα τα νέα.

Άρα $a_{\kappa+1} \leq 1 + a_\kappa + 1 \underset{\text{επαγ.}}{\overset{\text{υπόθ.}}{\leq}} 1+(2\kappa-4)+1 \leq 2(\kappa+1)-4$

Επομένως η $\Pi(\kappa+1)$ είναι αληθής, άρα η $\Pi(n)$ είναι αληθής για κάθε $n \geq 4$.

Άσκηση 3

Έστω $x \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε $x + \frac{1}{x} \in \mathbb{Z}$

Να δειχτεί ότι $x^n + \frac{1}{x^n} \in \mathbb{Z}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$

(π.χ. $x = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$

$x + \frac{1}{x} = 3$)

• Έστω $\Pi(n)$: $x^n + \frac{1}{x^n} \in \mathbb{Z}$

$\Pi(0)$: $x^0 + \frac{1}{x^0} = 1 + 1 = 2 \in \mathbb{Z}$. Η $\Pi(0)$ είναι αληθής

$\Pi(1)$: $x^1 + \frac{1}{x^1} \in \mathbb{Z}$. Η $\Pi(1)$ είναι αληθής.

Εδώ θα χρησιμοποιήσουμε την ισχυρή μορφή της επαγωγής.

Έστω ότι η $\Pi(k)$ είναι αληθής για κάθε $k \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$

Θα δείξουμε ότι και η $\Pi(n)$ είναι αληθής, δηλαδή ότι

$x^n + \frac{1}{x^n} \in \mathbb{Z}$

Ισχύει ότι: $x^n + \frac{1}{x^n} = x^n + \left(x^{n-2} + \frac{1}{x^{n-2}}\right) + \frac{1}{x^n} - \left(x^{n-2} + \frac{1}{x^{n-2}}\right)$

$$= x\left(x^{n-1} + \frac{1}{x^{n-1}}\right) + \frac{1}{x}\left(x^{n-1} + \frac{1}{x^{n-1}}\right) - \left(x^{n-2} + \frac{1}{x^{n-2}}\right) =$$

$$= \left(x + \frac{1}{x}\right)\left(x^{n-1} + \frac{1}{x^{n-1}}\right) - \left(x^{n-2} + \frac{1}{x^{n-2}}\right)$$

Από την υπόθεση της επαγωγής, αφού $n \geq 2$, $0 \leq n-1, n-2 \leq n$

ισχύει ότι: $x^{n-1} + \frac{1}{x^{n-1}} \in \mathbb{Z}$ και $x^{n-2} + \frac{1}{x^{n-2}} \in \mathbb{Z}$

Άρα η παράσταση $\left(x + \frac{1}{x}\right)\left(x^{n-1} + \frac{1}{x^{n-1}}\right) - \left(x^{n-2} + \frac{1}{x^{n-2}}\right) \in \mathbb{Z}$

αφού περιέχει πολλαπλασιασμούς και αφαιρέσεις ακεραίων.

Άρα, η $\Pi(n)$ είναι αληθής. Άρα από την αρχή της (ισχυρής) επαγωγής, η $\Pi(n)$ είναι αληθής για κάθε $n \geq 0$.

Άσκηση 4 (ATM)

Να δειχθεί ότι για κάθε $n \in \mathbb{N}$ με $n \geq 4$ υπάρχουν $p, q \in \mathbb{N}$ ώστε $10n = 20p + 50q$.

Έστω η πρόταση

$\Pi(n)$: Υπάρχουν $p, q \in \mathbb{N}$ ώστε $10n = 20p + 50q$

Η $\Pi(4)$ είναι αληθής, διότι $10 \cdot 4 = 20 \cdot 2 + 50 \cdot 0$, $p = 2 \in \mathbb{N}$, $q = 0 \in \mathbb{N}$

Η $\Pi(5)$ είναι αληθής, διότι $10 \cdot 5 = 20 \cdot 0 + 50 \cdot 1$, $p = 0 \in \mathbb{N}$, $q = 1 \in \mathbb{N}$

Έστω ότι η $\Pi(k)$ είναι αληθής για κάθε $k \in \{5, 6, \ldots, n-1\}$. Θα δείξουμε ότι και η $\Pi(n)$ είναι αληθής.

Επειδή $n-1 \geq 5$ έπεται ότι $n-2 \geq 4$. Ισχύει ότι

$$10n = 10(n-2+2) = 10(n-2) + 20$$

Επειδή $4 \leq n-2 < n$, από την υπόθεση της επαγωγής υπάρχουν $p, q \in \mathbb{N}$ ώστε $10(n-2) = 20p + 50q$

Άρα $10n = 10(n-2) + 20 = 20p + 50q + 20 = 20(p+1) + 50q$

όπου $p+1 \in \mathbb{N}$ και $q \in \mathbb{N}$. Άρα, η $\Pi(n)$ είναι αληθής.

Από την αρχή της επαγωγής, η $\Pi(n)$ είναι αληθής για κάθε $n \geq 4$.

$60 = 40 + 20 = 20 \cdot 2 + 50 \cdot 0 + 20 = 20 \cdot 3 + 50 \cdot 0$

$70 = 50 + 20 = 20 \cdot 0 + 50 \cdot 1 + 20 = 20 \cdot 1 + 50 \cdot 1$

$80 = 60 + 20 = 20 \cdot 4 + 50 \cdot 0$

$\vdots$

n

Άσκηση 5

Αν για μια πρόταση Π(n) μπορούμε να αποδείξουμε ότι αν η Π(k) είναι αληθής, τότε και η Π(k+2) είναι αληθής. Τι πρέπει να ισχύει ώστε η Π(n) να είναι αληθής για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

- Αρκεί να είναι αληθής η Π(0) και η Π(1). Τότε μπορούμε να δείξουμε ότι η Π(n) είναι αληθής για κάθε άρτιο και είναι αληθής για κάθε περιττό n. Άρα, η Π(n) είναι αληθής για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Άσκηση 6 (Το 3n+1 πρόβλημα)

Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ εφαρμόζουμε τις εξής πράξεις:

- Αν n είναι άρτιος, τότε τον διαιρούμε με το 2

$$n \to \frac{n}{2}$$

- Αν n περιττός, τότε το πολλαπλασιάζουμε επί 3 και προσθέτουμε 1

$$n \to 3n+1$$

Επαναλαμβάνουμε τη διαδικασία μέχρι όταν να εμφανιστεί 1.
Να αποδειχθεί ότι για κάθε $n \in \mathbb{N}$ καταλήγουμε πάντα στο 1.

- $10 \to 5 \to 16 \to 8 \to 4 \to 2 \to 1$

$7 \to 22 \to 11 \to 34 \to 17 \to 52 \to 26 \to 13 \to 40 \to 20 \to \dots$

Άσκηση 7

Ορίζουμε τη συνάρτηση $M: \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ με

$$M(n) = \begin{cases} n-10, & n>100 \\ M(M(n+11)), & n \leq 100 \end{cases}$$

a) Να βρεθούν οι τιμές M(102), M(99), M(97), M(87)

→

- $M(102)=102-10=92$
- $M(99)=M(M(99+11))=M(M(110))=M(100)=M(M(100+11))=$
$=M(M(111))=M(101)=91$

- $M(97)=M(M(97+11))=M(M(108))=M(98)=M(M(98+11))=$
$=M(M(109))=M(99)=\ldots$

β) Να δειχθεί ότι $M(n)=91$, για κάθε $n\leq 100$.

Ασκηση 8

Εστω E το σύνολο των φοιτητών του Πα.Πει. Ορίζουμε τη σχέση R στο E ως εξής:

Για κάθε $x,y\in E$ xRy $R(x,y)$ αν και μόνο αν οι x,y είναι στο ίδιο τμήμα

α) Να δειχθεί ότι η σχέση R είναι σχέση ισοδυναμίας.

Υπενθύμιση: η R λέγεται σχέση ισοδυναμίας στο E αν
(ανακλαστική) i) aRa για κάθε $a\in E$
(συμμετρική) ii) Αν aRb τότε bRa, για κάθε $a,b\in E$
(μεταβατική) iii) Αν aRb και bRc, τότε aRc, για κάθε $a,b,c\in E$

Πράγματι,
i) Για κάθε φοιτητή $x\in E$ ισχύει ότι xRx.
ii) Εστω $x,y\in E$ με xRy τότε οι x,y είναι στο ίδιο τμήμα, άρα και οι y,x είναι στο ίδιο τμήμα, άρα yRx.
iii) Εστω $x,y,z\in E$ με
$xRy \Leftrightarrow$ Οι x,y είναι στο ίδιο τμήμα
και
$yRz \Leftrightarrow$ Οι y,z είναι στο ίδιο τμήμα
$\Rightarrow$ Οι x,z είναι στο ίδιο τμήμα
Άρα xRz

Άρα, η σχέση R είναι σχέση ισοδυναμίας στο E.
Η κλάση ισοδυναμίας ενός φοιτητή x είναι το τμήμα του.
Το σύνολο πηλίκο $R/\sim$ είναι το σύνολο των Τμημάτων του Πα.Πει.

Παρατήρηση:
Τα στοιχεία του E είναι φοιτητές, τα στοιχεία του $R/\sim$ είναι σύνολα.

Άσκηση 9

Έστω R μια σχέση στο $\mathbb{Z}$ με xRy αν και μόνο αν $x^2-y^2=5k$ για κάποιο $k\in\mathbb{Z}$. Να δειχτεί ότι η R είναι σχέση ισοδυναμίας στο $\mathbb{Z}$.

(Για κάθε)

i) Έστω $a\in\mathbb{Z}$. Τότε $a^2-a^2=0=5\cdot 0$, όπου $0\in\mathbb{Z}$

Άρα, aRa (ισχύει η ανακλαστική ιδιότητα)

ii) Έστω $a,b\in\mathbb{Z}$, με aRb, θα δείξουμε ότι bRa

$aRb \Leftrightarrow$ Υπάρχει $k\in\mathbb{Z}$ ώστε $a^2-b^2=5k \Leftrightarrow b^2-a^2=5(-k)$

όπου $-k\in\mathbb{Z}$

Άρα, bRa. (ισχύει η συμμετρική ιδιότητα)

iii) Έστω $a,b,c\in\mathbb{Z}$ με aRb και bRc, θα δείξουμε ότι aRc.

$aRb \Leftrightarrow$ Υπάρχει $k_1\in\mathbb{Z}$ ώστε $a^2-b^2=5k_1$
$bRc \Leftrightarrow$ Υπάρχει $k_2\in\mathbb{Z}$ ώστε $b^2-c^2=5k_2$

Προσθέτοντας κατά μέλη έχουμε ότι: $a^2-c^2=5(k_1+k_2)$ όπου $k_1+k_2\in\mathbb{Z}$

Άρα, aRc. (Ισχύει και η μεταβατική ιδιότητα)

Άρα η σχέση R είναι σχέση ισοδυναμίας στο $\mathbb{Z}$.

Άσκηση 10

Έστω R μια σχέση στο σύνολο $\mathbb{N}$ με $xRy \Leftrightarrow$ Υπάρχει $k \in \mathbb{N}^*$ ώστε $x = y^k$.

a) Να δειχθεί ότι η R είναι σχέση (μερικής) διάταξης στο $\mathbb{N}$.

> Υπενθύμιση:
> Η σχέση R είναι σχέση (μερικής) διάταξης στο E, αν και μόνο αν:
> i) aRa για κάθε $a \in E$
> ii) Αν aRb και bRa τότε $a = b$. (Αντισυμμετρική ιδιότητα)
> iii) Αν aRb και bRc, τότε aRc
> για κάθε $a, b, c \in E$

i) Για κάθε $a \in \mathbb{N}$ ισχύει ότι $a = a^1$ όπου $1 \in \mathbb{N}^*$, άρα aRa.

ii) Έστω aRb και bRa. Θα δείξουμε ότι $a = b$.

$aRb \Leftrightarrow$ Υπάρχει $k_1 \in \mathbb{N}^*$ ώστε $a = b^{k_1}$

$bRa \Leftrightarrow$ Υπάρχει $k_2 \in \mathbb{N}^*$ ώστε $b = a^{k_2}$

Αντικαθιστώντας τη δεύτερη στην πρώτη

$$a = (a^{k_2})^{k_1} \Leftrightarrow a^1 = a^{k_1 \cdot k_2}$$

Επειδή $k_1, k_2 \in \mathbb{N}^*$ πρέπει $k_1 \cdot k_2 = 1$, άρα $k_1 = k_2 = 1$

Άρα $a = b^{k_1} = b^1$, άρα $\boxed{a = b}$

iii) Έστω aRb και bRc, τότε θα δείξουμε ότι aRc

$aRb \Leftrightarrow$ Υπάρχει $k_1 \in \mathbb{N}^*$ ώστε $a = b^{k_1}$

$bRc \Leftrightarrow$ Υπάρχει $k_2 \in \mathbb{N}^*$ ώστε $b = c^{k_2}$

Αντικαθιστώντας, έχουμε ότι:

$$a = (c^{k_2})^{k_1} = c^{k_1 \cdot k_2} \text{ όπου } k_1 k_2 \in \mathbb{N}^*, \text{ Άρα } aRc$$

Επομένως, η σχέση R είναι σχέση μερικής διάταξης στο $\mathbb{N}$.

→

β) Είναι σχέση ολικής διάταξης;

Όχι, $2 \not R 3$, $3 \not R 2$.

Για κάθε $a,b \in E$ ή aRb, ή bRa

Άσκηση 11

Να βρεθεί το λάθος στην παρακάτω απόδειξη:

Αν μια σχέση R στο E είναι συμμετρική και μεταβατική, τότε είναι ανακλαστική.

"Απόδειξη" (Έστω $a,b \in E$)

$aRb \Rightarrow bRa$ (λόγω συμμετρικότητας)

$\left.\begin{matrix} aRb \\ bRa \end{matrix}\right\} \Rightarrow aRa$ (λόγω μεταβατικότητας)

Άρα, η R είναι ανακλαστική.

- Το λάθος βρίσκεται στην υπόθεση ότι για κάθε $a \in E$ υπάρχει b ώστε aRb.

Άσκηση 12

Έστω R μια σχέση ισοδυναμίας στο πεπερασμένο σύνολο A. Να δειχθεί ότι για τον πληθάριθμο του συνόλου πηλίκου της σχέσης R, ισχύει ο τύπος

$$|R/\sim| = \sum_{a \in A} \frac{1}{|C_a|} \quad \left(\frac{1}{5}+\frac{1}{2}+\frac{1}{1}+\dots+\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{5}+\dots\right)$$

Σύνολα

Πως αποδεικνύουμε ταυτότητες που αφορούν σύνολα;

Υπάρχουν οι εξής μέθοδοι:

$\boxed{1}$ Μέθοδος ισοδυναμίας

$A=B$ ανν $x\in A \Leftrightarrow x\in B$

$\boxed{2}$ Μέθοδος διπλού εγκλεισμού

$A=B$ ανν $A\subseteq B$ και $B\subseteq A$

$\boxed{3}$ Μέθοδος της χαρακτηριστικής συνάρτησης

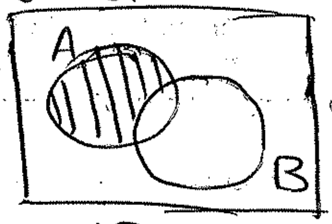
$A=B$ ανν $\chi_A(x)=\chi_B(x) \quad \forall x\in E$

$\boxed{4}$ Μέθοδος των πινάκων

Άσκηση 13.

Έστω $A,B,C\subseteq E$. Να δειχθεί ότι

α) $A\setminus B = A\cap\overline{B}$



Έστω $x\in A\setminus B \Leftrightarrow x\in A$ και $x\notin B \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x\in A$ και $x\in\overline{B} \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x\in A\cap\overline{B}$

← Μέθοδος ισοδυναμίας

Μέθοδος πινάκων: πού μπορεί να ανήκει ένα στοιχείο $x\in E$;

A	B	$A\setminus B$	$\overline{B}$	$A\cap\overline{B}$
1	1	0	0	0
1	0	1	1	1
0	1	0	0	0
0	0	0	1	0

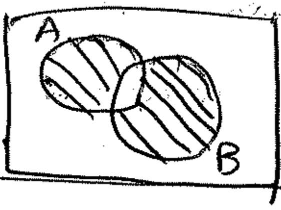
1 γράφουμε όταν ανήκει
0 γράφουμε όταν δεν ανήκει

Οι στήλες των $A\setminus B$ και $A\cap\overline{B}$ είναι ίσες, δηλαδή $A\setminus B=A\cap\overline{B}$.

Άσκηση 14

Να δειχθεί ότι $|A \Delta B| = |A| + |B| - 2|A \cap B|$

Υπενθύμιση: $A \underset{\oplus}{\Delta} B = (A \cup B) \setminus (A \cap B) = (A \cap \bar{B}) \cup (\bar{A} \cap B)$



Απόδειξη

$$|A \Delta B| = |(A \cup B) \setminus (A \cap B)| = |A \cup B| - |(A \cup B) \cap (A \cap B)|$$

$$= |A \cup B| - |A \cap B| = |A| + |B| - |A \cap B| - |A \cap B| = |A| + |B| - 2|A \cap B|$$