Σήμερα: Ασκήσεις Συνδιαστικής

Βασικές Γνώσεις

1 Κανόνας Αθροίσματος: Αν $A_1, A_2, \dots A_n$ είναι διαμέριση του E τότε

$$|E| = |A_1| + |A_2| + \dots + |A_n|$$

2 Κανόνας Γινομένου: Αν $A_1, A_2, \dots A_n \subseteq E$ τότε

$$|A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n| = |A_1| \cdot |A_2| \cdot \dots \cdot |A_n|$$

3 Επιλογή k αντικειμένων από n διακεκριμένα αντικείμενα

	Με σειρά	Χωρίς Σειρά
Με επανάληψη	Επαναληπτικές διατάξεις n^k	Επαναληπτικοί Συνδυασμοί $\left[{n \atop k}\right] = \binom{n+k-1}{k}$
Χωρίς επανάληψη	(Απλές) Διατάξεις $n!(n-k)!$	(Απλοί) Συνδυασμοί $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$

4 Μη αρνητικές ακέραιες λύσεις της $x_1 + x_2 + \dots + x_n = k$

$$\# \text{λύσεων} = \left[{n \atop k}\right] = \binom{n+k-1}{n}$$

5 Μεταθέσεις k ειδών στοιχείων με $n_1, n_2, \dots, n_k$ στοιχεία

$$\frac{(n_1 + n_2 + \dots + n_k)!}{n_1! \cdot n_2! \dots n_k!}$$

$\rightarrow$

Άσκηση 1 (SOS)

Να βρεθεί το πλήθος των 4-ψήφιων αριθμών που κατασκευάζονται με τα ψηφία $\{0,1,2,3,4,5,6,7\}$ όταν:

α) επιτρέπονται επαναλήψεις στα ψηφία τους

$\underline{x}$ $\underline{y}$ $\underline{z}$ $\underline{w}$

Για το x υπάρχουν 7 επιλογές (εξαιρείται το 0)
Για το y — // — 8 — // —
Για το z — // — 8 — // —
Για το w — // — 8 — // —

Άρα, από τον κανόνα του γινομένου υπάρχουν $7 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 8 = 3584$ αριθμοί επιλογές.

• Πως ελέγχουμε ότι σκεφτόμαστε σωστά;

Η απάντηση είναι αρκεί να κατασκευάσουμε τους αριθμούς και να τους μετρήσουμε ένα-ένα.

Επειδή αυτό δεν είναι πρακτικό, θα ασχοληθούμε με ένα πιο εύκολο πρόβλημα το οποίο θα λύσουμε με τον ίδιο τρόπο.

Ψηφία: $\{0,1,2\}$

Θα κατασκευάσουμε αντί για 4-ψήφιους: 2-ψήφιους

$\underline{x}$ $\underline{y}$

x: 2 επιλογές
y: 3 επιλογές

Άρα, αρχή γινομένου $2 \cdot 3 = 6$ αριθμοί

Είναι 6 οι αριθμοί; 10, 11, 12, 20, 21, 22 β) δεν επιτρέπονται επαναλήψεις στα ψηφία τους

$\underline{x}$ $\underline{y}$ $\underline{z}$ $\underline{w}$

x: 7 επιλογές (εξαιρείται το 0)
y: 7 επιλογές
z: 6 επιλογές
w: 5 επιλογές

Άρα, από την πολλαπλασιαστική αρχή συνολικά $7 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5$ τρόποι (αριθμοί)

γ) δεν επιτρέπονται επαναλήψεις και οι αριθμοί είναι **περιττοί.**

$\underline{x}$ $\underline{y}$ $\underline{z}$ $\underline{w}$

Για το x: 7 επιλογές
y: 7 επιλογές
z: 6 επιλογές
w: ?

Δεν μπορούμε να απαντήσουμε διότι δεν γνωρίζουμε πόσα από τα περιττά ψηφία 1, 3, 5, 7 έχουν ήδη χρησιμοποιηθεί σε προηγούμενες θέσεις.

$\underline{x}$ $\underline{y}$ $\underline{z}$ $\underline{w}$

Για το w υπάρχουν: 4 επιλογές (1, 3, 5, 7)
Για το x υπάρχουν: 6 επιλογές (το 0 εξαιρείται)
Για το y υπάρχουν: 6 επιλογές
Για το z υπάρχουν: 5 επιλογές

Άρα, από τον κανόνα του γινομένου συνολικά: $4 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 5$

Εμπειρικός Κανόνας

Ξεκινάμε από την πιο περιοριστική συνθήκη δ) επιτρέπονται επαναλήψεις στα ψηφία τους και το άθροισμα του 2ου και του 3ου ψηφίου τους ισούται με 8.

$\underline{x}$ $\underline{y}$ $\underline{z}$ $\underline{w}$

Για τα ψηφία y, z έχουμε τις επιλογές:

$(4,4)$, $(3,5)$, $(2,6)$, $(1,7)$, $(5,3)$, $(6,2)$, $(7,1)$ 7 επιλογές

Για το x έχουμε: 7 επιλογές
Για το w έχουμε: 8 επιλογές

Άρα, από την πολλαπλασιαστική αρχή (κανόνας γινομένου) υπάρχουν συνολικά: $7 \cdot 7 \cdot 8$ τρόποι.

<u>Άσκηση 2</u> (SOS)

Σε ένα αγωνιστικό όμιλο συμμετέχουν 6 Έλληνες, 6 Άγγλοι, 5 Ιταλοί, 4 Γερμανοί και 4 Ρώσοι αθλητές. Με πόσους τρόπους μπορεί να σχηματισθεί μια 7μελής ομάδα όταν:

α) δεν έχουμε κανένα περιορισμό

$\binom{25}{7}$ τρόποι σχηματισμού

β) δεν επιτρέπεται να συμμετέχουν Έλληνες στην ομάδα

$\binom{19}{7}$ τρόποι σχηματισμού

γ) πρέπει να συμμετέχουν στην ομάδα $\boxed{\text{ακριβώς}}$ 3 Έλληνες

$\rightarrow$

Για τους υπόλοιπους έχουμε $\binom{19}{4}$ επιλογές.

Για τους Έλληνες έχουμε $\binom{6}{3}$ επιλογές.

Άρα, συνολικά έχουμε $\binom{19}{4} \cdot \binom{6}{3}$ επιλογές.

δ) η ομάδα αποτελείται από 2 Έλληνες, 2 Άγγλους και 3 Ρώσους.

Για τους Έλληνες: $\binom{6}{2}$

Για τους Άγγλους: $\binom{6}{2}$

Για τους Ρώσους: $\binom{4}{3}$

Άρα, συνολικά $\binom{6}{2} \cdot \binom{6}{2} \cdot \binom{4}{3}$ τρόποι σχηματισμού.

ε) η ομάδα έχει αρχηγό.

Για να επιλέξουμε τα μέλη της ομάδας έχουμε $\binom{25}{7}$ τρόπους.

Για να επιλέξουμε από τα 7 μέλη της ομάδας ποιός θα είναι ο αρχηγός έχουμε: $\binom{7}{1}$ τρόπους

Άρα, συνολικά: $\binom{25}{7}\binom{7}{1}$

στ) η ομάδα έχει αρχηγό και υπαρχηγό.

Για τον αρχηγό: $\binom{25}{1}$

Για τον υπαρχηγό: $\binom{24}{1}$

Για τα 5 μέλη: $\binom{23}{5}$

Άρα, συνολικά: $\binom{25}{1} \cdot \binom{24}{1} \cdot \binom{23}{5}$ τρόποι γ) η ομάδα έχει 2 playmakers.

Για την επιλογή των 2 playmakers έχουμε $\binom{25}{2}$ επιλογές.
Για τα υπόλοιπα 5 μέλη έχουμε $\binom{23}{5}$ επιλογές.

Άρα, συνολικά: $\binom{25}{2}\cdot\binom{23}{5}$.

η) η ομάδα περιέχει τουλάχιστον 1 Ιταλό.

Για να εξασφαλίσουμε τον 1 Ιταλό επιλέγουμε με $\binom{5}{1}$ τρόπους αυτόν. Από τους υπόλοιπους 24 επιλέγουμε με $\binom{24}{6}$ τρόπους τους υπόλοιπους.

ΛΑΘΟΣ ΑΠΑΝΤΗΣΗ

ΓΙΑΤΙ ΕΙΝΑΙ ΛΑΘΟΣ;

Έλληνες: E_1, E_2, E_3
Ιταλοί: I_1, I_2

Θέλουμε μια 2-μελή ομάδα με τουλάχιστον ένα Ιταλό.

Λάθος Απάντηση:

$$\binom{2}{1}\binom{4}{1} = 2\cdot 4 = 8$$

Σωστή Απάντηση:

I_1, E_1 I_2, E_1 I_1, I_2 $\boxed{7 \text{ ομάδες}}$
I_1, E_2 I_2, E_2
I_1, E_3 I_2, E_3

• Διακρίνουμε περιπτώσεις

$\boxed{1}$ Η ομάδα περιέχει ακριβώς 1 Ιταλό.

$$\binom{5}{1}\cdot\binom{20}{6}$$

6 μέλη από τους υπόλοιπους 20

1 Ιταλός από τους 5

→

$\boxed{2}$ Η ομάδα περιέχει <u>ακριβώς</u> 2 Ιταλούς.

$$\binom{5}{2}\cdot\binom{20}{5}$$

$\boxed{3}$ Η ομάδα περιέχει <u>ακριβώς</u> 3 Ιταλούς:

$$\binom{5}{3}\cdot\binom{20}{4}$$

$\boxed{4}$ Η ομάδα περιέχει <u>ακριβώς</u> 4 Ιταλούς.

$$\binom{5}{4}\cdot\binom{20}{3}$$

$\boxed{5}$ Η ομάδα περιέχει ακριβώς 5 Ιταλούς.

$$\binom{5}{5}\cdot\binom{20}{2}$$

Άρα, συνολικά (από τον κανόνα του αθροίσματος), έχουμε:

$$\binom{5}{1}\binom{20}{6}+\binom{5}{2}\binom{20}{5}+\binom{5}{3}\binom{20}{4}+\binom{5}{4}\binom{20}{3}+\binom{5}{5}\binom{20}{2}$$

• $\boxed{\text{2ος τρόπος}}$ (επειδή το πρόβλημα μιλάει για 1 Ιταλό)

B	C
Σύνολο ομάδων που έχουν Ιταλούς	Σύνολο ομάδων που δεν έχουν Ιταλούς

A

Σύνολο όλων των 7-μελών ομάδων

Επειδή τα B, C είναι διαμέριση του A, έχουμε ότι

$$|A| = |B| + |C|$$

$$\binom{25}{7} = |B| + \binom{20}{7}$$

$$\Rightarrow |B| = \binom{25}{7} - \binom{20}{7}$$

Οι ομάδες που έχουν τουλάχιστον 1 Ιταλό.

Άσκηση 3

α) Να βρεθεί ο αριθμός όλων των κ-άδων ακεραίων $a_1, a_2, \ldots, a_k$ με $1 \le a_1 < a_2 < a_3 < \ldots < a_k \le n$.

π.χ. $n=7$, $k=3$ $\quad 1 \le a_1 < a_2 < a_3 \le 7$

(1 4 7)
(1 2 6)
(1 5 6)
(2 3 4)

Κάθε λύση αυτής της ανίσωσης για τα $a_1, a_2, \ldots, a_k$ αντιστοιχεί σε συνδυασμό των $\binom{n}{k}$.

Για κάθε επιλογή κ αριθμών (χωρίς επανάληψη) από τους αριθμούς $\{1, 2, \ldots n\}$, κατασκευάζεται μια και μοναδική λύση της ανισότητας.

$$\begin{matrix} 1 & 4 & 6 \\ \| & \| & \| \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{matrix} \qquad \begin{matrix} 2 & 3 & 7 \\ \| & \| & \| \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{matrix} \qquad \begin{matrix} 5 & 7 & 1 \\ \| & \| & \| \\ a_2 & a_3 & a_1 \end{matrix}$$

Άρα, ο αριθμός των λύσεων της ανισότητας ισούται με $\binom{n}{k}$.

β) Να βρεθεί ο αριθμός όλων των κ-άδων ακεραίων $a_1, a_2, \ldots, a_k$ με $1 \le a_1 \le a_2 \le a_3 \le \ldots \le a_k \le n$

Κάθε $\boxed{\text{επαναληπτικός συνδυασμός}}$ των n αριθμών $\{1, 2, \ldots, n\}$ ανά κ αντιστοιχεί σε μια λύση της ανισότητας.

Άρα, οι λύσεις είναι ίσες με $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} = \binom{n+k-1}{k}$

γ) Να βρεθεί με πόσους τρόπους μπορούν να τοποθετηθούν 10 όμοια αντικείμενα σε 3 διαφορετικά κουτιά.

Κάθε τοποθέτηση των 10 όμοιων αντικειμένων στα 3 διαφορετικά κουτιά αντιστοιχεί σε έναν επαναληπτικό συνδυασμό στον οποίο επιλέγουμε από τα 3 κουτιά 10 φορές.

$$\left[\begin{matrix}3\\10\end{matrix}\right] = \binom{3+10-1}{10} = \binom{12}{10}$$

<u>Άσκηση 4</u> (Σεπτέμβριος 2016)

Να βρεθεί με πόσους τρόπους μπορεί να επιλεγεί μια 6-μελής επιτροπή όταν έχουμε διαθέσιμα 12 ανδρόγυνα και
(12 άνδρες
12 γυναίκες)

α) δεν έχουμε άλλο περιορισμό.

$$\binom{24}{6}$$

β) η επιτροπή δεν μπορεί να περιέχει κάποιο ανδρόγυνο.

<u>Από κάθε ανδρόγυνο μπορεί να συμμετέχει το πολύ ένα άτομο.</u>

Αρχικά, επιλέγουμε τα 6 ανδρόγυνα από τα οποία θα πάρουμε ένα άτομο.

Υπάρχουν: $\binom{12}{6}$ τρόποι

Για κάθε ζευγάρι που επιλέχθηκε, έχουμε 2 επιλογές.
Άρα συνολικά έχουμε: $\binom{12}{6} \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$

γ) η επιτροπή αποτελείται από πρόεδρο και γραμματέα οι οποίοι είναι άνδρες και από 2 αντιπροσώπους οι οποίες είναι γυναίκες και από 2 μέλη διαφορετικού φύλου.

→

Για τον πρόεδρο: $\binom{12}{1}$

Για τον γραμματέα: $\binom{11}{1}$

Για τις 2 αντιπροέδρους: $\binom{12}{2}$

Για τον άνδρα μέλος: $\binom{10}{1}$

Για τη γυναίκα μέλος: $\binom{10}{1}$

Άρα, συνολικά

$$12\cdot 11\cdot \binom{12}{2}\cdot 10\cdot 10$$

$$\boxed{\binom{n}{k}=\frac{n!}{k!(n-k)!}}$$

Άσκηση 5

α) Να βρεθεί ο αριθμός των τρόπων τοποθέτησης 10 διαφορετικών αντικειμένων σε 3 διαφορετικά κουτιά.

- Κάθε τοποθέτηση των 10 αντικειμένων κωδικοποιείται από μια 3-αδική λέξη μήκους 10, ως εξής:

2	2	3	1	1	3	2	2	1	3
1ο	2ο	3ο	4ο	5ο	6ο	7ο	8ο	9ο	10ο

Η θέση i θα είναι ίση με 1 ή 2 ή 3 ανάλογα με το κουτί στο οποίο τοποθετείται το αντικείμενο i.

Άρα, ο αριθμός των τοποθετήσεων ισούται με τον αριθμό των 3-λέξεων μήκους 10 οι οποίες είναι σε πλήθος

$$3\cdot 3\cdot 3\cdot 3\cdot 3\cdot 3\cdot 3\cdot 3\cdot 3\cdot 3=3^{10}$$

β) Να βρεθεί ο αριθμός των τρόπων τοποθέτησης 10 διαφορετικών αντικειμένων σε 20 διαφορετικά κουτιά, έτσι ώστε το κάθε κουτί να λάβει το πολύ ένα αντικείμενο.

β i) Να βρεθεί ο αριθμός των τρόπων τοποθέτησης 10 διαφορετικών αντικειμένων σε 10 διαφορετικά κουτιά, έτσι ώστε κάθε κουτί να λάβει το πολύ ένα αντικείμενο.

→

Για το 1ο αντικείμενο έχουμε 10 επιλογές
Για το 2ο αντικείμενο έχουμε 9 επιλογές
Για το 3ο —//— —//— 8 —//—
⋮
Για το 10ο —//— —//— 1 —//—
Άρα, συνολικά $10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 10!$

Για το 1ο αντικείμενο: 20 επιλογές
Για το 2ο —//— 19 —//—
⋮
Για το 10ο αντικείμενο: 11 επιλογές
Άρα, συνολικά $20 \cdot 19 \cdot \ldots \cdot 11 = \dfrac{20!}{10!}$

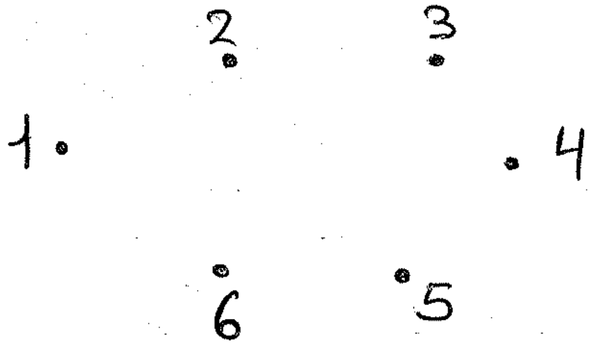
γ) Να βρεθεί ο αριθμός των τρόπων τοποθέτησης 10 όμοιων αντικειμένων σε 20 διαφορετικά κουτιά όταν ώστε το κάθε κουτί να λάβει το πολύ ένα αντικείμενο.

- Αρκεί να επιλέξουμε 10 κουτιά τα οποία θα πάρει ακριβώς ένα (από τα 10 όμοια αντικείμενα).

Υπάρχουν $\binom{20}{10}$ τρόποι.

→

Άσκηση 1.16 (Από την πρώτη εργασία)



α) Πόσες γραμμές υπάρχουν στο σχήμα;

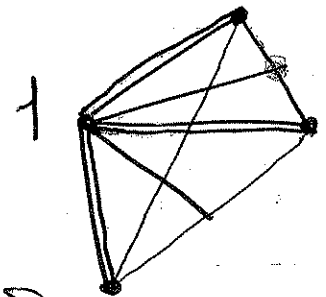
$\binom{6}{2} = \dots = 15$

Για κάθε ζεύγος κορυφών υπάρχει ακριβώς μια γραμμή, υπάρχουν $\binom{6}{2}$ ζεύγη.

β) Πόσοι τρόποι υπάρχουν να χρωματιστούν οι γραμμές κόκκινο ή πράσινο;

$$\underbrace{2^{15}}_{\underbrace{2\cdot 2 \cdots 2}_{15 \text{ φορές}}} = 2^{\binom{6}{2}} \simeq 32.000 \qquad \left(\begin{matrix} 2^{10} = 1024 \\ 2^{5} = 32 \end{matrix}\right)$$

γ) Να δειχθεί ότι σε κάθε χρωματισμό υπάρχει τουλάχιστον ένα πράσινο ή ένα κόκκινο τρίγωνο.



═══ κόκκινο

─── πράσινο

Αποδεικνύουμε πρώτα ότι από μια κορυφή πρέπει να φεύγουν τουλάχιστον 3 γραμμές ίδιου χρώματος, για αρχή. (Αρχή εγκλεισμού-αποκλεισμού)

Άσκηση 6 (SOS)

Να υπολογισθεί ο αριθμός των τρόπων που n ανδρόγυνα μπορούν να καθίσουν στη μια πλευρά ενός τραπεζιού έτσι ώστε οι σύζυγοι να κάθονται ο ένας δίπλα στον άλλο.

→

Θεωρούμε ότι κάθε ζευγάρι είναι ένα "άτομο". Υπάρχουν $n!$ τρόποι να τοποθετήσουμε τα n "άτομα" σε σειρά. Για κάθε "άτομο" (ζευγάρι) έχουμε 2 επιλογές (στη διάταξη)

ΑΝΔΡΑΣ–ΓΥΝΑΙΚΑ ή ΓΥΝΑΙΚΑ–ΑΝΔΡΑΣ

Άρα, συνολικά έχουμε: $n! \cdot \underbrace{2 \cdot 2 \cdot 2 \ldots 2}_{n\text{-φορές}} = 2^n \cdot n!$

Άσκηση 7

Με πόσους τρόπους μπορούν να διαταχθούν (σε σειρά) 4 λευκές, 5 κίτρινες και 9 μαύρες μπάλες

α) χωρίς περιορισμό (Μεταθέσεις με είδη)

$$\frac{(4+5+9)!}{4!\,5!\,9!}$$

Παράδειγμα

2 ΛΕΥΚΕΣ
1 ΜΑΥΡΗ

ΛΛΜ ΛΜΛ ΜΛΛ $\left(\frac{3!}{2!\,1!}\right)$

β) οι μπάλες με το ίδιο χρώμα είναι διαδοχικές

3! [Έχουμε 3 χρώματα και επιλέγουμε τη σειρά εμφάνισης των χρωμάτων]

γ) δεν επιτρέπεται 2 λευκές μπάλες να είναι διαδοχικές.

$\underset{x_1}{\underline{\quad}}\ Λ\ \underset{x_2}{\underline{\quad}}\ Λ\ \underset{x_3}{\underline{\quad}}\ Λ\ \underset{x_4}{\underline{\quad}}\ Λ\ \underset{x_5}{\underline{\quad}}$

9Μ
5Κ $= 14$ μπάλες

$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 14$

$x_1 \geq 0$
$x_5 \geq 0$
$x_2 \geq 1$
$x_3 \geq 1$
$x_4 \geq 1$

→

Ορίζουμε: $y_1 = x_1 \geq 0$ $\qquad$ $y_3 = x_3 - 1 \geq 0$

$y_5 = x_5 \geq 0$

$y_2 = x_2 - 1 \geq 0$ $\qquad$ $y_4 = x_4 - 1 \geq 0$

$$y_1 + (y_2 + 1) + (y_3 + 1) + (y_4 + 1) + y_5 = 14$$

$$y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5 = 11$$

$$y_i \geq 0$$

Υπάρχουν $\left[\begin{matrix} 5 \\ 11 \end{matrix}\right]$ λύσεις της εξίσωσης. Άρα υπάρχουν $\left[\begin{matrix} 5 \\ 11 \end{matrix}\right]$ τρόποι χωρισμού των 14 επιπλέον μπαλών στα κενά ανάμεσα στις λευκές.

Σε κάθε έναν από αυτούς τους χωρισμούς υπάρχουν $\frac{14!}{5!\,9!}$ τρόποι τοποθέτησης. Άρα συνολικά έχουμε: $\left[\begin{matrix} 5 \\ 11 \end{matrix}\right] \cdot \frac{14!}{5!\,9!}$