ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ

Τμήμα Πληροφορικής

Μαθηματικά των Υπολογιστών

2016-2017

1ο Φροντιστήριο

Όνομα / Αρ.Μητρώου	***Κωνσταντακάτος Γρηγόρης Π12068***

1^{o} Φροντιστήριο

▸ Πως αποδεικνύουμε ότι μια συνάρτηση είναι επί:

$f(x) = x^2+1$, θδο f επί στο $[1, +\infty)$

Έστω $y \in [1, +\infty)$ τότε ψάχνουμε $x \in \mathbb{R}$, ώστε $f(x) = y \Leftrightarrow x^2+1 = y$

Αρκεί να έχει λύση η εξίσωση $x^2 = y-1$.

Η εξίσωση έχει λύση διότι $y-1 \geq 0$

Άρα η f είναι επί στο $[1, +\infty)$.

▸ Άσκηση 1

Να δειχθεί ότι $\frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!} \leq 2 - \frac{1}{n}$ $\forall n \geq 2$

Υπενθύμιση: $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (n-1) \cdot n$

$1! = 1$

$0! = 1$

$2! = 1 \cdot 2 = 2$

$3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$

$n! = (n-1)! \cdot n$

Έστω η πρόταση $\Pi(n)$

$\Pi(n)$: ισχύει ότι $\frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!} \leq 2 - \frac{1}{n}$

1) Η $\Pi(2)$ είναι αληθής, διότι

$$\frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} \leq 2 - \frac{1}{2} \Leftrightarrow 1 + \frac{1}{2} \leq 2 - \frac{1}{2} \Leftrightarrow 2 \leq 2$$

2) Έστω ότι η $\Pi(k)$ είναι αληθής για κάποιο $k \geq 2$, δηλαδή

$$\frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{k!} \leq 2 - \frac{1}{k}$$

Θα δείξουμε ότι ισχύει και η $\Pi(k+1)$, δηλαδή

$$\frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{k!} + \frac{1}{(k+1)!} \leq 2 - \frac{1}{k+1}$$

Ισχύει ότι: $\left(\frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{k!}\right) + \frac{1}{(k+1)!} \leq \left(2 - \frac{1}{k}\right) + \frac{1}{(k+1)!}$

Αρκεί να δείξουμε ότι: $2 - \frac{1}{k} + \frac{1}{(k+1)!} \leq 2 - \frac{1}{k+1}$

Ισοδύναμα, έχουμε ότι:

$$\frac{1}{(k+1)!} \leq \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \Leftrightarrow$$

$$\frac{1}{(k+1)!} \leq \frac{(k+1)-k}{k(k+1)} \Leftrightarrow$$

$$\frac{1}{(k+1)!} \leq \frac{1}{k(k+1)} \Leftrightarrow$$

$$\frac{1}{\cancel{(k+1)}\cancel{k}(k-1)!} \leq \frac{1}{\cancel{k}\cancel{(k+1)}} \Leftrightarrow$$

$$\frac{1}{(k-1)!} \leq \frac{1}{1} \Leftrightarrow$$

$(k-1)! \geq 1$, ισχύει $k-1 \geq 1$

Άρα η $\Pi(k+1)$ είναι αληθής

Επομένως, από την αρχή της επαγωγής η $\Pi(n)$ είναι αληθής $\forall n \geq 2$

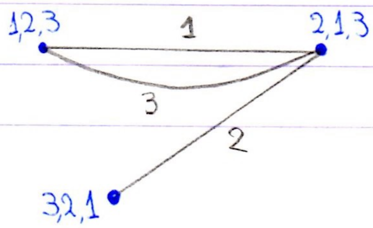
▸ Άσκηση 2

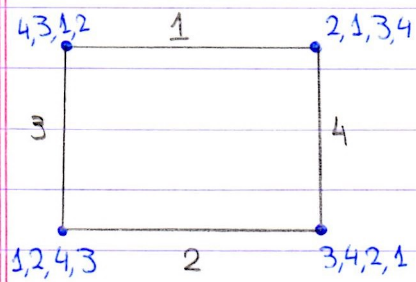
Μια παρέα n ατόμων κουτσομπολεύουν "διακριτικά" μεταξύ τους μέσω τηλεφώνου. Σε μια κλήση ανάμεσα στον Α και στον Β, ο Α λέει στον Β όλα τα κουτσομπολιά που γνωρίζει και ο Β ανταποδίδει. Κάθε άτομο γνωρίζει τουλάχιστον ένα "νέο" που δεν το γνωρίζουν οι άλλοι. Έστω a_n ο ελάχιστος αριθμός κλήσεων που πρέπει να γίνουν ώστε όλα τα κουτσομπολιά να είναι γνωστά σε όλους.

α) Να δειχθεί ότι $a_2 = 1$, $a_3 = 3$, $a_4 = 4$

β) Να δειχθεί ότι $a_n \leq 2n-4 \ \forall n \geq 4$

α) 





β) Έστω η πρόταση $\Pi(n): a_n \leq 2n - 4$

Για $n=4$ έχουμε ότι $a_4 \leq 2\cdot 4 - 4 = 4$, άρα η $\Pi(2)$ είναι αληθής

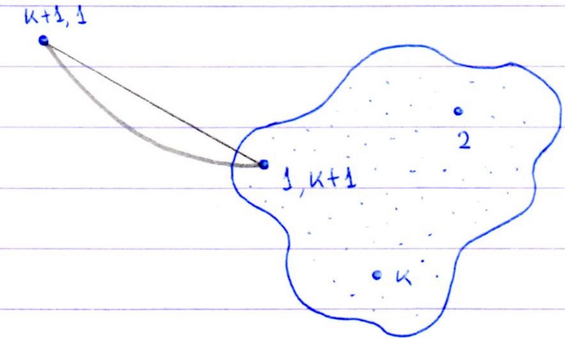
Έστω ότι η $\Pi(\kappa)$ είναι αληθής για κάποιο $\kappa \geq 4$.

Θα δείξουμε ότι και η $\Pi(\kappa+1)$ είναι.

Δηλαδή: $a_{\kappa+1} \leq 2(\kappa+1) - 4$

Πράγματι, έστω ότι έχουμε $\kappa+1$ άτομα

Αρχικά, το $\kappa+1$ άτομο επικοινωνεί με το άτομο 1 και ανταλλάσουν "νέα"



Στη συνέχεια, τα κ άτομα ανταλλάσουν τα "νέα" με a_κ κλήσεις (αγνοώντας το $\kappa+1$).

Στο τέλος, το άτομο 1 καλεί το άτομο $\kappa+1$ και του μεταφέρει όλα τα νέα.

Άρα, $a_{\kappa+1} \leq 1 + a_\kappa + 1 \leq 1 + (2\kappa+4) + 1 \leq 2(\kappa+1) - 4$

Επομένως η $\Pi(\kappa+1)$ είναι αληθής

Άρα, η $\Pi(n)$ είναι αληθής $\forall n \geq 4$

▸ <u>Ασκηση 3</u>

Εστω $x \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε $x+\frac{1}{x} \in \mathbb{Z}$. Να δειχθεί ότι $x^n+\frac{1}{x^n} \in \mathbb{Z}$, για κάθε $n \in \mathbb{Z}$

πχ $x=\frac{3+\sqrt{5}}{2}$ $\quad x+\frac{1}{x}=3$

Εστω $\Pi(n): x^n+\frac{1}{x^n} \in \mathbb{Z}$

$\Pi(0): x^0+\frac{1}{x^0} = 1+1=2 \in \mathbb{Z}$.

Η $\Pi(0)$ είναι αληθής.

$\Pi(1): x^1+\frac{1}{x^1} \in \mathbb{Z}$

Η $\Pi(1)$ είναι αληθής.

Εδώ θα χρησιμοποιήσουμε την <u>ισχυρή μορφή της επαγωγής</u>:

Εστω ότι η $\Pi(k)$ είναι αληθής $\forall k \in \{1,2,\dots,n-1\}$

Θα δείξουμε ότι και η $\Pi(n)$ είναι αληθής.

Δηλαδή ότι: $x^n+\frac{1}{x^n} = x^n + \left(x^{n-2}+\frac{1}{x^{n-2}}\right)+\frac{1}{x^n} - \left(x^{n-2}+\frac{1}{x^{n-2}}\right)$

$$= x\left(x^{n-1}+\frac{1}{x^{n-1}}\right)+\frac{1}{x}\left(x^{n-1}+\frac{1}{x^{n-1}}\right)-\left(x^{n-2}+\frac{1}{x^{n-2}}\right)$$

$$= \left(x+\frac{1}{x}\right)\left(x^{n-1}+\frac{1}{x^{n-1}}\right)-\left(x^{n-2}+\frac{1}{x^{n-2}}\right)$$

Απο την υπόθεση της επαγωγής, αφού $n \geq 2 \Rightarrow n-1, n-2 \leq n$, ισχύει ότι:

$x^{n-1}+\frac{1}{x^{n-1}} \in \mathbb{Z}$ και $x^{n-2}+\frac{1}{x^{n-2}} \in \mathbb{Z}$

Άρα η παράσταση $\left(x+\frac{1}{x}\right)\left(x^{n-1}+\frac{1}{x^{n-1}}\right)-\left(x^{n-2}+\frac{1}{x^{n-2}}\right) \in \mathbb{Z}$

αφού περιέχει πολλαπλασιασμούς και αφαιρέσεις ακεραίων

Άρα, απο την αρχή της (ισχυρής) επαγωγής η $\Pi(n)$ είναι αληθής $\forall n \geq 0$

Άσκηση 4

Να δειχθεί ότι $\forall n \in \mathbb{N}$ με $n \geq 4$, υπάρχουν $p, q \in \mathbb{N}$ ώστε:
$10n = 20p + 50q$

Έστω η πρόταση $\Pi(n)$: Υπάρχουν $p, q \in \mathbb{N}$ ώστε $10n = 20p + 50q$
Η $\Pi(4)$ είναι αληθής, διότι $10 \cdot 4 = 20 \cdot 2 + 50 \cdot 0$, $p = 2 \in \mathbb{N}$, $q = 0 \in \mathbb{N}$
Η $\Pi(5)$ είναι αληθής, διότι $10 \cdot 5 = 20 \cdot 0 + 50 \cdot 1$, $p = 0 \in \mathbb{N}$, $q = 1 \in \mathbb{N}$
Έστω ότι $\Pi(k)$ είναι αληθής $\forall k \in \{5, 6, \ldots, n-1\}$
Θα δείξουμε ότι και η $\Pi(n)$ είναι αληθής
Επειδή $n-1 \geq 5$ έπεται ότι $n-2 \geq 4$
Ισχύει ότι $10n = 10(n-2+2) = 10(n-2) + 20$
Επειδή $4 \leq n-2 < n$ από την υπόθεση της επαγωγής υπάρχουν $p, q \in \mathbb{N}$ ώστε:
$10(n-2) = 20p + 50q$
Άρα, $10n = 10(n-2) + 20 = 20p + 50q + 20 = 20(p+1) + 50q$,
όπου $p+1 \in \mathbb{N}$ και $q \in \mathbb{N}$
Άρα, η $\Pi(n)$ είναι αληθής
Από την αρχή της επαγωγής, η $\Pi(n)$ είναι αληθής $\forall n \geq 4$

$$60 = 40 + 20$$
$$= 20 \cdot 2 + 50 \cdot 0 + 20$$
$$= 20 \cdot 3 + 50 \cdot 0$$

$$70 = 50 + 20$$
$$= 20 \cdot 0 + 50 \cdot 1 + 20$$
$$= 20 \cdot 1 + 50 \cdot 1$$

$$80 = 60 + 20$$
$$= 20 \cdot 4 + 50 \cdot 0$$

▸ Άσκηση 5

Αν για μια πρόταση $\Pi(n)$ μπορούμε να αποδείξουμε ότι αν $\Pi(k)$ είναι αληθής, τότε και η $\Pi(k+2)$ είναι αληθής. Τι πρέπει να ισχύει ώστε η $\Pi(n)$ να είναι αληθής $\forall n \in \mathbb{N}$.

Αρκεί να είναι αληθής η $\Pi(0)$ και η $\Pi(1)$. Τότε μπορούμε να δείξουμε ότι η $\Pi(n)$ είναι αληθής για κάθε άρτιο και είναι αληθής για κάθε περιττό n. Άρα η $\Pi(n)$ είναι αληθής για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

▸ Άσκηση 6

Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ εφαρμόζουμε τις εξής πράξεις:

- Αν n άρτιος, τότε τον διαιρούμε με το 2.

  $n \longrightarrow \frac{n}{2}$

- Αν n περιττός, τότε πολλαπλασιάζουμε επι 3 και προσθέτουμε 1.

  $n \longrightarrow 3n+1$

Επαναλαμβάνουμε τη διαδικασία μέχρις ότου να εμφανισθεί 1. Να αποδειχθεί ότι για κάθε $n \in \mathbb{N}$ καταλήγουμε πάντα στο 1.

π.χ. $10 \to 5 \to 16 \to 8 \to 4 \to 2 \to 1$

π.χ. $7 \to 22 \to 11 \to 34 \to 17 \to 52 \to 26 \to 13 \to 40 \to 20$

$20 \to 10 \to \dots$

⋮

▸ Άσκηση 7

Ορίζουμε τη συνάρτηση $M: \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$, με:

$$M(n) = \begin{cases} n-10, & n > 100 \\ M(M(n+11)), & n \leq 100 \end{cases}$$

Να βρεθούν οι τιμές $M(102)$, $M(99)$, $M(97)$, $M(87)$

$M(102) = 102 - 10 = 92$

$M(99) = M(M(99+11)) = M(M(110)) = M(100) = M(M(100+11)) =$
$= M(M(111)) = M(101) = 91$

$M(97) = M(M(108)) = M(98) = M(M(109)) = M(99) = 91$

$M(87) = M(M(98)) = M(91) = M(M(102)) = M(92) = M(M(103)) =$
$= M(93) = M(M(104)) = M(94) = M(M(105)) = M(95) = M(M(106)) =$
$= M(96) = M(M(107)) = M(97) = 91$

▸ Άσκηση 8

Έστω E το σύνολο των φοιτητών του Πα.Πει. Ορίζουμε τη σχέση R στο E ως εξής:
Για κάθε $x, y \in E$: xRy ανν οι x, y είναι στο ίδιο τμήμα
Να δειχθεί ότι η σχέση R είναι σχέση ισοδυναμίας

Υπενθύμιση: Η R λέγεται σχέση ισοδυναμίας στο E ανν:
i) $aRa, \forall a \in E$
ii) Αν aRb τότε bRa, $\forall a, b \in E$
iii) Αν aRb και bRc, τότε aRc, $\forall a, b, c \in E$.

Πράγματι,
i) Για κάθε φοιτητή $x \in E$, ισχύει ότι xRx.
ii) Έστω $x, y \in E$ με xRy. Τότε οι x, y είναι στο ίδιο Τμήμα, άρα ισχύει και yRx.
iii) Έστω $x, y, z \in E$, με $\left.\begin{array}{l} xRy \Leftrightarrow \text{οι } x,y \text{ είναι στο ίδιο Τμήμα} \\ \text{και } yRz \Leftrightarrow \text{οι } y,z \text{ είναι στο ίδιο Τμήμα} \end{array}\right\} \Rightarrow$

$\Rightarrow$ οι x, z είναι στο ίδιο Τμήμα.
Άρα η σχέση R είναι σχέση ισοδυναμίας στο E.
Η κλάση ισοδυναμίας ενός φοιτητή x είναι το Τμήμα του.
Το σύνολο πηλίκο $R/\sim$ είναι το σύνολο των Τμημάτων του Πα.Πει.

Παρατήρηση!: Τα στοιχεία του E είναι φοιτητές ενώ τα στοιχεία του $R/\sim$ είναι σύνολα.

▸ Άσκηση 9

Έστω R μια σχέση $\mathbb{Z}$ με xRy αν και μόνο αν $x^2 - y^2 = 5\kappa$ για κάποιο $\kappa \in \mathbb{Z}$. Να δειχθεί ότι η R είναι σχέση ισοδυναμίας στο $\mathbb{Z}$.

i) Έστω $a \in \mathbb{Z}$. Τότε $a^2 - a^2 = 0 = 5 \cdot 0$, όπου $0 \in \mathbb{Z}$

Άρα, aRa (ισχύει η ανακλαστική ιδιότητα)

ii) Έστω $a, b \in \mathbb{Z}$, με aRb.

Θα δείξουμε ότι bRa

$aRb \Leftrightarrow$ Υπάρχει $\kappa \in \mathbb{Z}$, τέτοιο ώστε

$a^2 - b^2 = 5\kappa \Leftrightarrow b^2 - a^2 = 5(-\kappa)$, όπου $-\kappa \in \mathbb{Z}$

Άρα, bRa (ισχύει η συμμετρική ιδιότητα)

iii) Έστω $a, b, c \in \mathbb{Z}$ με aRb και bRc.

Θα δείξουμε ότι aRc.

$aRb \Leftrightarrow$ Υπάρχει $\kappa_1 \in \mathbb{Z}$ ώστε $a^2 - b^2 = 5\kappa_1$

$bRc \Leftrightarrow$ Υπάρχει $\kappa_2 \in \mathbb{Z}$ ώστε $b^2 - c^2 = 5\kappa_2$

Προσθέτοντας κατά μέλη έχουμε:

$a^2 - c^2 = 5(\kappa_1 + \kappa_2)$, όπου $\kappa_1 + \kappa_2 \in \mathbb{Z}$

Άρα aRc (ισχύει η μεταβατική ιδιότητα)

Άρα η R είναι σχέση ισοδυναμίας στο $\mathbb{Z}$

▸ Άσκηση 10

Έστω R μια σχέση στο σύνολο $\mathbb{N}$ με $xRy \Leftrightarrow$ υπάρχει $\kappa \in \mathbb{N}^*$ ώστε $x = y^\kappa$.

Να δειχθεί ότι η R είναι σχέση (μερικής) διάταξης στο $\mathbb{N}$.

Υπενθύμιση: Η σχέση R είναι σχέση (μερικής) διάταξης στο E, ανν:

i) $aRa \ \forall a \in E$

ii) Αν aRb και bRa, τότε $a=b$ (Αντισυμμετρική Ιδιότητα)

iii) Αν aRb και bRc, τότε aRc, $\forall a,b,c \in E$.

i) Για κάθε $a \in \mathbb{N}$ ισχυει ότι $a=a^1$, όπου $1 \in \mathbb{N}^*$, άρα aRa

ii) Έστω aRb και bRa.

Θα δείξουμε ότι $a=b$.

$aRb \Leftrightarrow$ Υπάρχει $k_1 \in \mathbb{N}^*$ ώστε $a=b^{k_1}$

$bRa \Leftrightarrow$ Υπάρχει $k_2 \in \mathbb{N}^*$ ώστε $b=a^{k_2}$

Αντικαθιστώντας τη δεύτερη στην πρώτη

$a=(a^{k_2})^{k_1} \Leftrightarrow a^1=a^{k_1 \cdot k_2}$

Επειδή $k_1, k_2 \in \mathbb{N}^*$, πρέπει $k_1 \cdot k_2 = 1$

Άρα $k_1=k_2=1$

Άρα $a=b^{k_1}=b^1$, άρα $a=b$

iii) Έστω aRb και bRc.

Θα δείξουμε ότι aRc.

$aRb \Leftrightarrow$ Υπάρχει $k_1 \in \mathbb{N}^*$ ώστε $a=b^{k_1}$

$bRc \Leftrightarrow$ Υπάρχει $k_2 \in \mathbb{N}^*$ ώστε $b=c^{k_2}$

Αντικαθιστώντας έχουμε ότι:

$a=(c^{k_2})^{k_1}=c^{k_1 \cdot k_2}$, όπου $k_1 \cdot k_2 \in \mathbb{N}^*$

Άρα, aRc

Επομένως, η σχέση R είναι σχέση μερικής διάταξης στο $\mathbb{N}$.

~ Η σχέση R είναι σχέση ολικής διάταξης? ~

↳ όχι! $\cancel{2R3}$ $\cancel{3R2}$

▸ Άσκηση 11

Να βρεθεί το λάθος στην παρακάτω απόδειξη:

Αν μια σχέση R είναι συμμετρική και μεταβατική, τότε είναι ανακλαστική

"Απόδειξη"

$aRb \leftrightarrow bRa$ (λόγω συμμετρικότητας)

$\left.\begin{array}{l} aRb \\ bRa \end{array}\right\} \rightarrow aRa$ (λόγω μεταβατικότητας)

Άρα, η R είναι ανακλαστική.

Το λάθος βρίσκεται στην υπόθεση ότι για κάθε $a \in E$ υπάρχει b ώστε aRb.

▸ Άσκηση 12

Έστω R μια σχέση ισοδυναμίας στο πεπερασμένο σύνολο A. Να δειχθεί ότι για τον πληθάριθμο του συνόλου πηλίκου της σχέσης R ισχύει ο τύπος:

$$|R/\sim| = \sum_{a \in A} \frac{1}{|C_a|}$$

$$\frac{1}{5} + \frac{1}{2} + \frac{1}{1} + \dots + \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{5} + \frac{1}{5}$$

⋮

▸ Πως αποδεικνύουμε ταυτότητες που αφορούν σύνολα;

Υπάρχουν οι εξής μέθοδοι:

1) Μέθοδος ισοδυναμίας

$A = B$ ανν $x \in A \leftrightarrow x \in B$

2) Μέθοδος διπλού εγκλεισμού

$A = B$ ανν $A \subseteq B$ και $B \subseteq A$

3) Μέθοδος της χαρακτηριστικής συνάρτησης

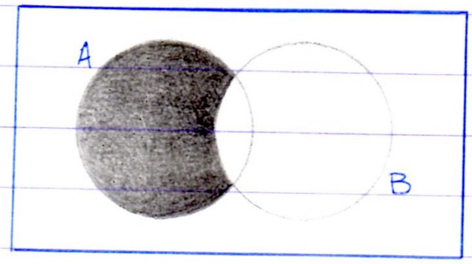
$A = B$ ανν $\chi_A(x) = \chi_B(x)$ $\forall x \in E$

4) Μέθοδος των πινάκων

▸ Άσκηση 13

Έστω $A, B, C \subseteq E$. Να δειχθεί ότι
$A \setminus B = A \cap \bar{B}$

• Μέθοδος ισοδυναμίας:



$x \in A \setminus B \Leftrightarrow$

$x \in A$ και $x \notin B \Leftrightarrow$

$x \in A$ και $x \in \bar{B} \Leftrightarrow$

$x \in A \cap \bar{B}$

• Μέθοδος πινάκων:

Που μπορεί να ανήκει ένα στοιχείο $x \in E$;

$1 \longrightarrow$ όταν ανήκει

$0 \longrightarrow$ όταν δεν ανήκει

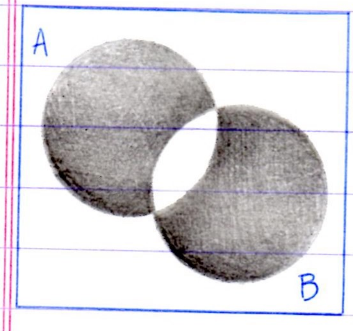
A	B	$A \setminus B$	$\bar{B}$	$A \cap \bar{B}$
1	1	0	0	0
1	0	1	1	1
0	1	0	0	0
0	0	0	1	0

Οι στήλες των $A \setminus B$ και $A \cap \bar{B}$ είναι ίσες. Δηλαδή $A \setminus B = A \cap \bar{B}$

▸ Άσκηση 14

Να δειχθεί ότι $|A \triangle B| = |A| + |B| - 2|A \cap B|$

Υπενθύμιση: $A \triangle B = (A \cup B) \setminus (A \cap B) = (A \cap \bar{B}) \cup (\bar{A} \cap B)$



$$
\begin{aligned}
|A \triangle B| &= |(A \cup B) \setminus (A \cap B)| = \\
&= |A \cup B| - |(A \cup B) \cup (A \cap B)| = \\
&= |A \cup B| - |A \cap B| = \\
&= |A| + |B| - |A \cap B| - |A \cap B| = \\
&= |A| + |B| - 2|A \cap B|
\end{aligned}
$$