ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ
Τμήμα Πληροφορικής

Μαθηματικά των Υπολογιστών

2016-2017

2ο Φροντιστήριο

Όνομα / Αρ.Μητρώου	***Κωνσταντακάτος Γρηγόρης Π12068***

2ο Φροντιστήριο

Ασκήσεις Συνδυαστικής

• Βασικές Γνώσεις

1) Κανόνας αθροίσματος: Αν $A_1, A_2, \dots, A_n$ είναι διαμέριση του E, τότε:
$|E| = |A_1| + |A_2| + \dots + |A_n|$

2) Κανόνας γινομένου: Αν $A_1, A_2, \dots, A_n \subseteq E$, τότε:
$|A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n| = |A_1| \cdot |A_2| \cdots |A_n|$

3) Επιλογή κ αντικειμένων από n διακεκριμένα αντικείμενα.

	Με σειρά	Χωρίς σειρά
Με επανάληψη	επαναληπτικές διατάξεις n^k	επαναληπτικοί συνδυασμοί $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} = \binom{n+k-1}{k}$
Χωρίς επανάληψη	(Απλές) διατάξεις $\frac{n!}{(n-k)!}$	(Απλοί) συνδυασμοί $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$

4) Μη αρνητικές λύσεις της $x_1 + x_2 + \dots + x_n = k$
$\#$ λύσεων $= \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} = \binom{n+k-1}{n}$

5) Μεταθέσεις κ ειδών στοιχείων με $n_1, n_2, \dots, n_k$ στοιχεία.
$\frac{(n_1 + n_2 + \dots + n_k)!}{n_1! \cdot n_2! \cdots n_k!}$

• Άσκηση 1

Να βρεθεί το πλήθος των 4-ψήφιων αριθμών που κατασκευάζονται με τα ψηφία $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, όταν:

a) επιτρέπονται επαναλήψεις στα ψηφία τους:

$\underline{x}\ \underline{y}\ \underline{z}\ \underline{w}$

Για το x υπάρχουν 7 επιλογές (εξαιρείται το 0)
Για το y υπάρχουν 8 επιλογές
Για το z υπάρχουν 8 επιλογές
Για το w υπάρχουν 8 επιλογές

Άρα, απο τον κανόνα του γινομένου υπάρχουν $7 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 8 = 3584$ επιλογές (αριθμοί).

• **Πως ελέγχουμε ότι σκεφτόμαστε σωστά;**

Αρκεί να κατασκευάσουμε όλους τους αριθμούς και να τους μετρήσουμε ένα-ένα.
Επειδή όμως αυτό δεν είναι πρακτικό, θα ασχοληθούμε με ένα πιο εύκολο πρόβλημα, το οποίο θα λύσουμε με τον ίδιο τρόπο.

ψηφία: $\{0, 1, 2\}$

Θα κατασκευάσουμε αντί για 4-ψήφιους, 2-ψήφιους.

Για το x υπάρχουν 2 επιλογές (εξαιρείται το 0)
Για το y υπάρχουν 3 επιλογές

Άρα, απο τον κανόνα του γινομένου υπάρχουν $2 \cdot 3 = 6$ επιλογές.

Είναι 6 αριθμοί;

10
11
12
20
21
22

β) δεν επιτρέπονται επαναλήψεις στα ψηφία τους:

$\underline{x}\ \underline{y}\ \underline{z}\ \underline{w}$

Για το x υπάρχουν 7 επιλογές (εξαιρείται το 0)
Για το y υπάρχουν 7 επιλογές
Για το z υπάρχουν 6 επιλογές
Για το w υπάρχουν 5 επιλογές

Άρα, απο τον κανόνα του γινομένου υπάρχουν $7 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 =$
$= 1470$ επιλογές

γ) δεν επιτρέπονται επαναλήψεις και οι αριθμοί είναι περιττοί:

$\underline{x}\ \underline{y}\ \underline{z}\ \underline{w}$

~~Για το x υπάρχουν 7 επιλογές~~ (εξαιρείται το 0)
~~Για το y υπάρχουν 7 επιλογές~~
~~Για το z υπάρχουν 6 επιλογές~~
Για το w υπάρχουν ? → δεν μπορούμε να απαντήσουμε διότι δεν γνωρίζουμε πόσα απο τα περιττά ψηφία (1,3,5,7) έχουν ήδη χρησιμοποιηθεί σε προηγούμενες θέσεις, επομένως ξεκινάμε απο το w.

Για το w υπάρχουν 4 επιλογές (1, 3, 5, 7)
Για το x υπάρχουν 6 επιλογές
Για το y υπάρχουν 6 επιλογές
Για το z υπάρχουν 5 επιλογές

Άρα απο τον κανόνα του γινομένου υπάρχουν $4 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 5$ επιλογές

Εμπειρικός κανόνας: ξεκινάμε απο την πιο περιοριστική συνθ
κη

δ) επιτρέπονται επαναλήψεις στα ψηφία τους και το άθροισμα του 2ου και 3ου ψηφίου τους ισούται με 8:

$\underline{x}\ \underline{y}\ \underline{z}\ \underline{w}$

Για τα ψηφία (y,z) υπάρχουν οι εξής επιλογές:
(4,4), (3,5), (2,6), (1,7), (5,3), (6,2), (7,1),
Επομένως υπάρχουν 7 επιλογές.
Για το x υπάρχουν 7 επιλογές
Για το w υπάρχουν 8 επιλογές

Άρα απο την πολλαπλασιαστική αρχή υπάρχουν συνολικά 7·7·8 επιλογές.

▸ Άσκηση 2

Σε ένα αγωνιστικό όμιλο συμμετέχουν 6 Έλληνες, 6 Άγγλοι, 5 Ιταλοί, 4 Γερμανοί και 4 Ρώσοι αθλητές.
Με πόσους τρόπους μπορεί να σχηματισθεί μια 7-μελής ομάδα όταν:

α) δεν έχουμε κανένα περιορισμό.

$6+6+5+4+4=25$ αθλητές

$\binom{25}{7}$ τρόποι σχηματισμού της ομάδας

β) δεν επιτρέπεται να συμμετέχουν Έλληνες στην ομάδα:

$\binom{19}{7}$ τρόποι σχηματισμού της ομάδας γ) πρέπει στην ομάδα να συμμετέχουν ακριβώς 3 Έλληνες:

Για τους υπόλοιπους έχουμε $\binom{19}{4}$ επιλογές.

Για τους Έλληνες έχουμε $\binom{6}{3}$ επιλογές

Άρα συνολικά υπάρχουν $\binom{19}{4}\binom{6}{3}$ τρόποι σχηματισμού της ομάδας

δ) η ομάδα αποτελείται από 2 Έλληνες, 2 Άγγλους και 3 Ρώσους:

Για τους Έλληνες έχουμε $\binom{6}{2}$ επιλογές

Για τους Άγγλους έχουμε $\binom{6}{2}$ επιλογές

Για τους Ρώσους έχουμε $\binom{4}{3}$ επιλογές

Άρα συνολικά υπάρχουν $\binom{6}{2}\cdot\binom{6}{2}\cdot\binom{4}{3}$ τρόποι σχηματισμού της ομάδας

ε) η ομάδα έχει αρχηγό:

Για να επιλέξουμε τα μέλη της ομάδας έχουμε $\binom{25}{7}$ τρόπους

Για να επιλέξουμε από τα 7 μέλη της ομάδας ποιος θα είναι ο αρχηγός έχουμε $\binom{7}{1}$ τρόπους.

Άρα συνολικά υπάρχουν $\binom{25}{7}\cdot\binom{7}{1}$ τρόποι σχηματισμού της ομάδας.

στ) η ομάδα έχει αρχηγό και υπαρχηγό:

Για τον αρχηγό έχουμε $\binom{25}{1}$ επιλογές

Για τον υπαρχηγό έχουμε $\binom{24}{1}$ επιλογές

Άρα συνολικά υπάρχουν $\binom{25}{1}\cdot\binom{24}{1}\binom{23}{5}$ τρόποι σχηματισμού της ομάδας.

ζ) η ομάδα έχει 2 playmakers:

Για την επιλογή των 2 playmakers έχουμε $\binom{25}{2}$ επιλογές.

Για τα υπόλοιπα μέλη έχουμε $\binom{23}{5}$ επιλογές

Άρα συνολικά υπάρχουν $\binom{25}{2}\cdot\binom{23}{5}$ τρόποι σχηματισμού της ομάδας.

συνηθισμένο λάθος!

η) η ομάδα περιέχει τουλάχιστον 1 Ιταλό:

~~Για τον 1 Ιταλό έχουμε $\binom{5}{1}$ επιλογές~~

Λάθος

~~Απο τους υπόλοιπους 24 επιλέγουμε $\binom{24}{6}$~~

→ Γιατί είναι λάθος;

Έστω ότι είχαμε 3 Έλληνες: Ε1, Ε2, Ε3 και 2 Ιταλούς: Ι1, Ι2 και θέλουμε για 2-μελή ομάδα, με τουλάχιστον 1 Ιταλό

- Λάθος απάντηση: $\binom{2}{1}\cdot\binom{4}{1} = 2\cdot 4 = 8$

- Σωστή απάντηση: $\underbrace{I_1E_1,\ I_1E_2,\ I_1E_3,\ I_2E_1,\ I_2E_2,\ I_2E_3,\ I_1I_2}_{7\ \text{ομάδες}}$

$\boxed{1^{os} \text{ τρόπος}}$

Διακρίνουμε περιπτώσεις:

$\boxed{1}$ Η ομάδα περιέχει ακριβώς 1 Ιταλό.

$\binom{5}{1}\cdot\binom{20}{6}$

→ 6 μέλη από τους υπόλοιπους 20

→ 1 Ιταλός απο τους 5

$\boxed{2}$ Η ομάδα περιέχει ακριβώς 2 Ιταλούς

$\binom{5}{2}\binom{20}{5}$

$\boxed{3}$ Η ομάδα περιέχει ακριβώς 3 Ιταλούς

$\binom{5}{3}\cdot\binom{20}{4}$

$\boxed{4}$ Η ομάδα περιέχει ακριβώς 4 Ιταλούς

$\binom{5}{4}\cdot\binom{20}{3}$

$\boxed{5}$ Η ομάδα περιέχει ακριβώς 5 Ιταλούς

$\binom{5}{5}\cdot\binom{20}{2}$

Άρα συνολικά, από τον κανόνα του αθροίσματος, έχουμε:

$$\binom{5}{1}\cdot\binom{20}{6}+\binom{5}{2}\binom{20}{5}+\binom{5}{3}\binom{20}{4}+\binom{5}{4}\cdot\binom{20}{3}+\binom{5}{5}\cdot\binom{20}{2}$$

$\boxed{2^{os} \text{ τρόπος}}$

Εστω $|A|$: το σύνολο των 7-μελών ομάδων,

$|B|$: το σύνολο των ομάδων που έχουν Ιταλούς (τουλάχιστον 1 Ιταλό) και

$|C|$: το σύνολο των ομάδων που δεν έχουν Ιταλούς

Επειδή τα B, C είναι διαμέριση του A, έχουμε ότι:

$|A| = |B| + |C| \Rightarrow |B| = |A| - |C| = \binom{25}{7} - \binom{20}{7}$

Άσκηση 3

α) Να βρεθεί ο αριθμός όλων των κ-άδων ακεραίων $a_1, a_2, \dots, a_k$, με $1 \leq a_1 < a_2 < a_3 < \dots < a_k \leq n$.

π.χ. για $n=7$, $k=3$ $\quad 1 \leq a_1 < a_2 < a_3 \leq 7$,

έχουμε:

$1, 4, 7$

$1, 2, 6$

$1, 5, 6$

$2, 3, 4$

$\vdots$

Κάθε λύση αυτής της ανίσωσης για το $a_1, a_2, \dots, a_k$, αντιστοιχεί σε συνδυασμό των $\binom{n}{k}$.

Για κάθε επιλογή κ αριθμών (χωρίς επανάληψη) απο τους αριθμούς $\{1, 2, \dots, n\}$ κατασκευάζεται μια και μοναδική λύση της ανισότητας.

$\{\underset{a_1}{1}, \underset{a_2}{4}, \underset{a_3}{6}\}$, $\{\underset{a_1}{2}, \underset{a_2}{3}, \underset{a_3}{7}\}$, $\{\underset{a_2}{5}, \underset{a_3}{7}, \underset{a_1}{1}\}$, ...

Άρα ο αριθμός των λύσεων της ανισότητας ισούται με $\binom{n}{k}$

β) Να βρεθεί ο αριθμός όλων των κ-άδων ακεραίων $a_1, a_2, \dots, a_k$ με $1 \leq a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq \dots \leq a_k \leq n$.

π.χ. για $n=7$, $k=3$ $\quad 1 \leq a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq 7$

έχουμε

$1, 1, 3$

$2, 2, 5$

$\vdots$

$\{\underset{a_1}{1}, \underset{a_2}{1}, \underset{a_3}{3}\}$, $\{\underset{a_1}{2}, \underset{a_2}{2}, \underset{a_3}{5}\}$, $\{\underset{a_1}{2}, \underset{a_2}{4}, \underset{a_3}{4}\}$, ...

Κάθε επαναληπτικός συνδυασμός των n αριθμών $\{1, 2, \ldots, n\}$ ανά k αντιστοιχεί σε μια λύση της ανισότητας και αντίστροφα.

Άρα, οι λύσεις είναι ίσες με $\left[\begin{matrix} n \\ k \end{matrix}\right] = \binom{n+k-1}{k}$

γ) Να βρεθεί με πόσους τρόπους μπορούν να τοποθετηθούν 10 όμοια αντικείμενα σε 3 διαφορετικά κουτιά.

Κάθε τοποθέτηση των 10 όμοιων αντικειμένων σε 3 διαφορετικά κουτιά αντιστοιχεί σε έναν επαναληπτικό συνδιασμό στον οποίο επιλέγουμε από τα 3 κουτιά, 10 φορές.

$$\left[\begin{matrix} 3 \\ 10 \end{matrix}\right] = \binom{3+10-1}{10} = \binom{12}{10}$$

▸ Άσκηση 4

Να βρεθεί με πόσους τρόπους μπορεί να επιλεγεί μια 6-μελής επιτροπή, όταν έχουμε 12 ανδρόγυνα και:

α) δεν έχουμε άλλο περιορισμό:

$$\binom{24}{6}$$

β) η επιτροπή δεν μπορεί να περιέχει κάποιο ανδρόγυνο:

Απο κάθε ανδρόγυνο μπορεί να συμμετέχει το πολύ ένα άτομο. Αρχικά επιλέγουμε τα 6 ανδρόγυνα, από τα οποία θα πάρουμε από ένα άτομο.

Υπάρχουν $\binom{12}{6}$ τρόποι.

Για κάθε ζευγάρι που επιλέχθηκε, έχουμε 2 επιλογές.

Άρα συνολικά έχουμε: $\binom{12}{6} \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$

γ) η επιτροπή αποτελείται από πρόεδρο και γραμματέα οι οποίοι είναι άνδρες και από δύο αντιπροέδρους οι οποίες είναι γυναίκες και από δύο μέλη διαφορετικού φύλου.

Για τον πρόεδρο: $\binom{12}{1}$

Για τον γραμματέα: $\binom{11}{1}$

Για τις δύο αντιπροέδρους: $\binom{12}{2}$

Για τον άνδρα μέλος: $\binom{10}{1}$

Για την γυναίκα μέλος: $\binom{10}{1}$

Άρα, συνολικά: $12 \cdot 11 \cdot \binom{12}{2} \cdot 10 \cdot 10$

▸ <u>Άσκηση 5</u>

α) Να βρεθεί ο αριθμός των τρόπων τοποθέτησης 10 διαφορετικών αντικειμένων σε 3 διαφορετικά κουτιά.

Κάθε τοποθέτηση των 10 αντικειμένων κωδικοποιείται απο μια 3-αδική λέξη μήκους 10 ως εξής:

$$\begin{array}{cccccccccc} \underline{2} & \underline{2} & \underline{3} & \underline{1} & \underline{1} & \underline{3} & \underline{2} & \underline{2} & \underline{1} & \underline{3} \\ 1^o & 2^o & 3^o & 4^o & 5^o & 6^o & 7^o & 8^o & 9^o & 10^o \end{array}$$

⟶ κουτιά
⟶ αντικείμενα

Η θέση i θα είναι ίση με 1 ή 2 ή 3 ανάλογα με το κουτί στο οποίο τοποθετούνται τα αντικείμενα.
Άρα, ο αριθμός των τοποθετήσεων ισούται με τον αριθμό των 3-λέξεων μήκους 10 οι οποίες είναι σε πλήθος:
$3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 3^{10}$

β1) Να βρεθεί ο αριθμός των τρόπων τοποθέτησης 10 διαφορετικών αντικειμένων σε 10 διαφορετικά κουτιά έτσι ώστε το κάθε κουτί να λάβει το πολύ ένα αντικείμενο.

$$\begin{cases} \text{Για το } 1^{\text{ο}} \text{ αντικείμενο έχουμε } 10 \text{ επιλογές} \\ \text{Για το } 2^{\text{ο}} \text{ αντικείμενο έχουμε } 9 \text{ επιλογές} \\ \vdots \\ \text{Για το } 10^{\text{ο}} \text{ αντικείμενο έχουμε } 1 \text{ επιλογή} \end{cases}$$

Άρα, συνολικά έχουμε $10 \cdot 9 \cdot 8 \cdots 2 \cdot 1 = 10!$ επιλογές

β.2) Να βρεθεί ο αριθμός των τρόπων τοποθέτησης 10 διαφορετικών αντικειμένων σε 20 διαφορετικά κουτιά

$$\begin{cases} \text{Για το } 1^{\text{ο}} \text{ αντικείμενο έχουμε } 20 \text{ επιλογές} \\ \text{Για το } 2^{\text{ο}} \text{ αντικείμενο έχουμε } 19 \text{ επιλογές} \\ \vdots \\ \text{Για το } 10^{\text{ο}} \text{ αντικείμενο έχουμε } 11 \text{ επιλογές} \end{cases}$$

Άρα, συνολικά έχουμε $20 \cdot 19 \cdot 18 \cdots 12 \cdot 11 = \dfrac{20!}{10!}$

γ) Να βρεθεί ο αριθμός των τρόπων τοποθέτησης 10 ομοίων αντικειμένων σε 20 διαφορετικά κουτιά έτσι ώστε το κάθε κουτί να λάβει το πολύ ένα αντικείμενο.

Αρκεί να επιλέξουμε τα 10 κουτιά στα οποία θα μπει ακριβώς ένα απο τα 10 όμοια αντικειμενα.
Υπάρχουν $\binom{20}{10}$ τρόποι.

▸ Άσκηση 6

Να υπολογισθεί ο αριθμός των τρόπων που η ανδρόγυνα μπορούν να καθίσουν στη μια πλευρά ενός τραπεζιού έτσι ώστε οι σύζυγοι να κάθονται ο ένας δίπλα στον άλλο.

Θεωρούμε ότι κάθε ζευγάρι είναι ένα "άτομο".
Υπάρχουν $n!$ τρόποι να τοποθετήσουμε τα n άτομα σε σειρά

Για κάθε "άτομο" (ζευγάρι) έχουμε 2 επιλογές (στη διάταξη):
ΑΝΔΡΑΣ - ΓΥΝΑΙΚΑ ή ΓΥΝΑΙΚΑ - ΑΝΔΡΑΣ
Άρα συνολικά έχουμε $n! \cdot \underbrace{2 \cdot 2 \cdots 2}_{n \text{ φορές}} = 2^n \cdot n!$

• <u>Άσκηση 7</u>

Με πόσους τρόπους μπορούν να διαταχθούν (σε σειρά) 4 λευκές, 5 κίτρινες και 9 μαύρες μπάλες

α) Χωρίς περιορισμό

$$\frac{(4+5+9)!}{4! \cdot 5! \cdot 9!}$$

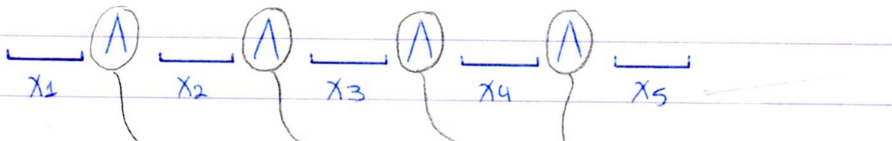
π.χ. 2 ΛΕΥΚΕΣ
1 ΜΑΥΡΗ
↳ ΛΛΜ , ΛΜΛ , ΜΛΛ → $\frac{3!}{2!\,1!}$

β) Οι μπάλες με το ίδιο χρώμα είναι διαδοχικές

3! (έχουμε 3 χρώματα και επιλέγουμε τη σειρά εμφάνισης των χρωμάτων)

γ) Δεν επιτρέπεται 2 λευκές μπάλες να είναι διαδοχικές

9Μ + 5Κ = 14 μπάλες



$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 14$

$x_1 \geq 0$

$x_5 \geq 0$

$x_2 \geq 1$

$x_3 \geq 1$

$x_4 \geq 1$

Ορίζουμε:

$y_1 = x_1 \geq 0$

$y_5 = x_5 \geq 0$

$y_2 = x_2 - 1 \geq 0$

$y_3 = x_3 - 1 \geq 0$

$y_4 = x_4 - 1 \geq 0$

$y_1 + (y_2+1) + (y_3+1) + (y_4+1) + y_5 = 14$

$y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5 = 11 \quad , \; y_i \geq 0$

Υπάρχουν $\begin{bmatrix} 5 \\ 11 \end{bmatrix}$ λύσεις αυτής της εξίσωσης

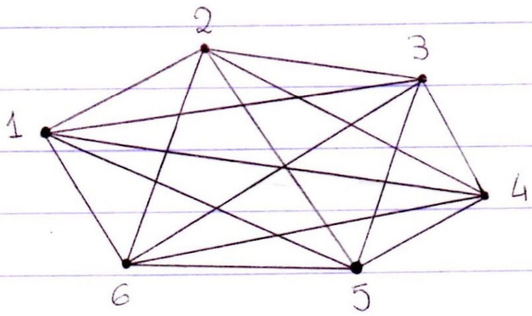
Άρα, υπάρχουν $\begin{bmatrix} 5 \\ 11 \end{bmatrix}$ τρόποι χωρισμού των 14 μπαλων στα κενά

ανάμεσα στις λευκές μπάλες.

Σε κάθε ένα απο αυτούς τους χωρισμούς υπάρχουν $\frac{14!}{5!\,9!}$ τρόποι τοποθέτησης.

Άρα συνολικά έχουμε $\begin{bmatrix} 5 \\ 11 \end{bmatrix} \cdot \frac{14!}{5!\,9!}$

▸ Άσκηση 1.16



α) Πόσες γραμμές υπάρχουν;

$\frac{6 \cdot 5}{2}$ ή $\binom{6}{2}$ ⟶ Για κάθε ζευγάρι κορυφών υπάρχει ακριβώς μία γραμμή!

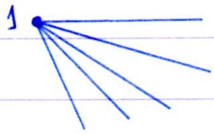
⟶ κάθε κορυφή έχει 5 γραμμές /2

β) Πόσοι τρόποι υπάρχουν να χρωματισθούν οι γραμμές με κόκκινο ή πράσινο;

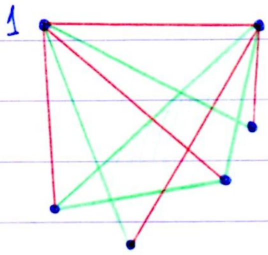
$2^{15} = 2^{\binom{6}{2}} \simeq 32.000$

γ) Να δειχθεί ότι σε κάθε χρωματισμό υπάρχει τουλάχιστον ένα πράσινο ή ένα κόκκινο τρίγωνο.

$\boxed{\text{ΙΔΕΑ!}}$

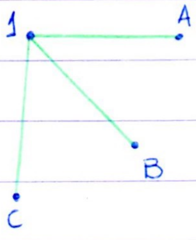


Ο κάθε κόμβος συνδέεται με άλλους 5.
Ισχυρίζομαι ότι 3 από τις γραμμές θα είναι πάντα του ίδιου χρώματος:



Αν δεν ίσχυε ο ισχυρισμός μου, τότε το πολύ 2 γραμμές θα είχαν το ίδιο χρώμα, δηλαδή θα είχαμε το πολύ 2 κόκκινες και 2 πράσινες γραμμές <5, το οποίο είναι άτοπο.

Χωρίς βλάβη της γενικότητας, έστω ότι οι γραμμές αυτές είναι πράσινες, και έστω ότι συνδέουν το 1 με τα σημεία A, B, C.



Αν η γραμμή AB είναι πράσινη, τότε έχουμε το πράσινο τρίγωνο 1AB, αλλιώς η γραμμή AB είναι κόκκινη.
Αν η γραμμή AC είναι πράσινη, τότε έχουμε το πράσινο τρίγωνο 1AC, αλλιώς η γραμμή AC είναι κόκκινη.
Αν η γραμμή BC είναι πράσινη, τότε έχουμε το πράσινο τρίγωνο 1BC, αλλιώς η γραμμή BC είναι κόκκινη και <u>επομένως</u> έχουμε το κόκκινο τρίγωνο ABC.