ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ
Τμήμα Πληροφορικής

Μαθηματικά των Υπολογιστών

2016-2017

4ο Φροντιστήριο

Όνομα / Αρ.Μητρώου	***Κωνσταντακάτος Γρηγόρης Π12068***

4ο Φροντιστήριο

Λογική

Για κάθε πρόταση $\varphi \in P$, υπάρχει μια τιμή αληθείας → ΑΛΗΘΕΙΑ: 1, T, A → ΨΕΥΔΟΣ: 0, F, Ψ, η οποία ορίζεται με τη βοήθεια της εκτίμησης (valuation) $v: P \to \{0,1\}$ που ικανοποιεί τους παρακάτω κανόνες:

$v(\varphi)$	$v(\neg\varphi)$
1	0
0	1

$v(\varphi)$	$v(\psi)$	$v(\varphi \vee \psi)$	$v(\varphi \wedge \psi)$	$v(\varphi \to \psi)$	$v(\varphi \leftrightarrow \psi)$
1	1	1	1	1	1
1	0	1	0	0	0
0	1	1	0	1	0
0	0	0	0	1	1

- **$v \models \varphi$** $v \left\{ \begin{array}{l} \text{ικανοποιεί την } \varphi \\ \text{επαληθεύει την } \varphi \\ \text{είναι μοντέλο της } \varphi \end{array} \right\}$ ανν $v(\varphi)=1$

- **$v \models \Sigma$** $v \left\{ \begin{array}{l} \text{ικανοποιεί το } \Sigma \\ \text{επαληθεύει το } \Sigma \\ \text{είναι μοντέλο του } \Sigma \end{array} \right\}$ ανν $v(\varphi)=1$, $\forall \varphi \in \Sigma$

- **Σ ικανοποιήσιμο** ανν υπάρχει v ώστε $v \models \Sigma$

- **$\Sigma \models \varphi$ είναι λογικό συμπέρασμα** του Σ ανν $v \models \Sigma \Rightarrow v \models \varphi$

- **$\varphi \models\!\mid \psi$** αν $\varphi \models \psi$ και $\psi \models \varphi$ (δηλαδή οι φ, ψ συναληθεύουν για τις ίδιες v)

Άσκηση 1

Δίδονται οι προτάσεις $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ όπου

$\varphi_1: p \wedge q \leftrightarrow p \vee r$

$\varphi_2: \neg(p \rightarrow r) \vee (r \leftrightarrow q)$

$\varphi_3: ((p \rightarrow q) \rightarrow (q \rightarrow r)) \rightarrow (p \rightarrow r)$

α) Να βρεθούν όλα τα μοντέλα του συνόλου των παραπάνω προτάσεων

$\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$: Έχουν εμφανίσεις των ατόμων p, q, r. Υπάρχουν $2^3 = 8$ δυνατές εκτιμήσεις.

p	q	r	$p \wedge q$	$p \vee r$	φ_1	$\neg(p \rightarrow r)$	$r \leftrightarrow q$	φ_2	$p \rightarrow q$	$q \rightarrow r$	$p \rightarrow r$	φ_3
1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1
1	1	0	1	1	1	1	0	1	1	0	0	1
1	0	1	0	1	0	0	0	0	0	1	1	1
1	0	0	0	1	0	1	1	1	0	1	0	0
0	1	1	0	1	0	0	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0	1	1
0	0	1	0	1	0	0	0	0	1	1	1	1
0	0	0	0	0	1	0	1	1	1	1	1	1

Άρα υπάρχουν 3 μοντέλα για το σύνολο $\{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3\}$

1º: $v(p) = v(q) = v(r) = 1$

2º: $v(p) = v(q) = 1$ και $v(r) = 0$

3º: $v(p) = v(q) = v(r) = 0$

β) Είναι κάποια από τις $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ ταυτολογία;

Όχι, καμία δεν είναι ταυτολογία.

γ) Είναι το σύνολο $\{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3\}$ ικανοποιήσιμο;

Ναι είναι, διότι $v(p) = v(q) = v(r) = 1$ επαληθεύει και τις 3 προτάσεις του $\{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3\}$

δ) Να γραφούν οι φ1, φ2, φ3 σε πλήρη κανονική μορφή CNF ή DNF.

DNF μορφή (διαζεύξεις συζεύξεων)

• φ1

p	q	r	φ1
1	1	1	1
1	1	0	1
1	0	1	0
1	0	0	0
0	1	1	0
0	1	0	1
0	0	1	0
0	0	0	1

$\longrightarrow p \wedge q \wedge r$

$\longrightarrow p \wedge q \wedge \neg r$

$\longrightarrow \neg p \wedge q \wedge \neg r$

$\longrightarrow \neg p \wedge \neg q \wedge \neg r$

$\varphi_1 \mathrel{\text{=|}} (p \wedge q \wedge r) \vee (p \wedge q \wedge \neg r) \vee (\neg p \wedge q \wedge \neg r) \vee (\neg p \wedge \neg q \wedge \neg r)$

• φ2

CNF μορφή

p	q	r	φ2
1	1	1	1
1	1	0	1
1	0	1	0
1	0	0	1
0	1	1	1
0	1	0	0
0	0	1	0
0	0	0	1

$\longrightarrow \neg p \vee q \vee \neg r$

$\longrightarrow p \vee \neg q \vee r$

$\longrightarrow p \vee q \vee \neg r$

$\varphi_2 \mathrel{\text{=|}} (\neg p \vee q \vee \neg r) \wedge (p \vee \neg q \vee r) \wedge (p \vee q \vee \neg r)$

• φ3

p	q	r	φ3
1	0	0	0

*

$\longrightarrow \neg p \vee q \vee r$

$\varphi_3 \mathrel{\text{=|}} (\neg p \vee q \vee r)$

*Άλλες εκτιμήσεις: 1

ε) Να εξεταστεί αν κάποια από τις παρακάτω προτάσεις ψ_1, ψ_2, ψ_3 είναι λογικό συμπέρασμα του συνόλου $\Sigma = \{\phi_1, \phi_2, \phi_3\}$,

όπου $\psi_1: (p \wedge q) \vee \neg r$

$\psi_2: p \leftrightarrow (q \wedge r)$

$\psi_3: \neg(p \wedge q) \rightarrow r$

Η ψ είναι λογικό συμπέρασμα του Σ ανν για κάθε $v \models \Sigma$ ισχύει ότι $v \models \psi$

Το Σ έχει 3 μοντέλα, άρα θα ασχοληθούμε μόνο με αυτά.

Μοντέλο του Σ

p	q	r	ψ_1	ψ_2	ψ_3
1	1	1	1	1	1
1	1	0	1	0	1
0	0	0	1	1	0

Άρα, μόνο η ψ_1 είναι λογικό συμπέρασμα του Σ.

στ) Είναι το σύνολο $\{\psi_1, \psi_2, \psi_3\}$ ικανοποιήσιμο;

Ναι, η εκτίμηση v με $v(p) = v(q) = v(r) = 1$, το επαληθεύει.

ζ) Είναι το σύνολο $\{\phi_1, \phi_2, \phi_3, \psi_1, \psi_2, \neg\psi_3\}$ ικανοποιήσιμο;

Ναι το ικανοποιεί η $v(p) = v(q) = v(r) = 0$.

Άσκηση 2

Να βρεθεί μια πρόταση ϕ που περιέχει τα άτομα p, q, r, s και η οποία είναι αληθή όταν ακριβώς 2 από τα p, q, r, s είναι ψευδή.

Υπάρχουν $2^4 = 16$ διαφορετικές εκτιμήσεις

Οι εκτιμήσεις που έχουν ακριβώς 2 από τα p, q, r, s ψευδή, είναι $\binom{4}{2} = 6$

Η ϕ είναι ψευδής για $16 - 6 = 10$ εκτιμήσεις

Μας συμφέρει να την εκφράσουμε σε DNF μορφή.

p	q	r	s	φ
1	1	0	0	1
1	0	1	0	1
1	0	0	1	1
0	1	1	0	1
0	1	0	1	1
0	0	1	1	1

$\longrightarrow p \land q \land \neg r \land \neg s$ ①

$\longrightarrow p \land \neg q \land r \land \neg s$ ②

$\longrightarrow p \land \neg q \land \neg r \land s$ ③

$\longrightarrow \neg p \land q \land r \land \neg s$ ④

$\longrightarrow \neg p \land q \land \neg r \land s$ ⑤

$\longrightarrow \neg p \land \neg q \land r \land s$ ⑥

Άλλες εκτιμήσεις 0.

Η ζητούμενη φ είναι:

$\varphi \models$ ① $\lor$ ② $\lor$ ③ $\lor$ ④ $\lor$ ⑤ $\lor$ ⑥

▸ Άσκηση 3

Να εξεταστεί αν κάποιο από τα παρακάτω σύνολα είναι ικανοποιήσιμο.

α) $\Sigma_1 = \{p, p \land \neg r, \neg r \to q, \neg q \lor \neg p \lor r\}$

Έστω ότι το Σ_1 είναι ικανοποιήσιμο και $v \models \Sigma_1$

Τότε $v(p) = 1$

$v(p \land \neg r) = 1 \Rightarrow v(\neg r) = 1$

$v(\neg r \to q) = 1 \Rightarrow v(q) = 1$

$v(\neg q \lor \neg q \lor r) \xrightarrow[v(r)=0]{v(p)=v(q)=1} 0$

Άρα το Σ_1 δεν είναι ικανοποιήσιμο

β) $\Sigma_2 = \{\neg(p \to q), p \lor \neg r, \neg r \leftrightarrow (q \lor \neg p)\}$

Έστω Σ_2 ικανοποιήσιμο και $v \models \Sigma_2$

Τότε $v(\neg(p \to q)) = 1 \Leftrightarrow v(p \to q) = 0 \Leftrightarrow v(p) = 1, v(q) = 0$

$v(p \lor \neg r) \xrightarrow{v(q)=1} 1$. Ισχύει

$v(\neg r \leftrightarrow (q \lor \neg p)) = 1 \xrightarrow{v(q \lor \neg p) = 0} v(\neg r) = 0 \Leftrightarrow v(r) = 1$

Άρα, το Σ_2 είναι ικανοποιήσιμο και μια εκτίμηση που το ικανοποιεί είναι η v με $v(p) = v(r) = 1$ και $v(q) = 0$.

▸ Άσκηση 4

Να δειχθεί ότι αν το Σ είναι ικανοποιήσιμο και ϕ οποιαδήποτε πρόταση, τότε τουλάχιστον ένα από τα σύνολα $\Sigma \cup \{\phi\}$, $\Sigma \cup \{\neg\phi\}$ είναι ικανοποιήσιμο.

Αφού Σ ικανοποιήσιμο έχει τουλάχιστον ένα μοντέλο v.

Αν $v(\phi)=1$, τότε $\Sigma \cup \{\phi\}$ έχει μοντέλο την v.

Αν $v(\phi)=0$, τότε $v(\neg\phi)=1$ οπότε $\Sigma \cup \{\neg\phi\}$ έχει μοντέλο την v.

▸ Άσκηση 5

Obligato (Μεσαιωνικό παιχνίδι για να πάρεις πτυχίο)

Δίδεται μια ακολουθία από προτάσεις $\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_k$ που δεν είναι εξ'αρχής γνωστές. Κάθε φορά έχουμε το δικαίωμα να δεχτούμε ή την ϕ_i ή την $\neg\phi_i$. Κερδίζουμε αν το σύνολο των προτάσεων που δεχτήκαμε είναι ικανοποιήσιμο. Πως μπορούμε να κερδίσουμε πάντα;

Διαλέγουμε ένα μοντέλο v που επαληθεύει την ϕ_1 ή την $\neg\phi_1$.

Για $i \geq 2$, Αν $v(\phi_i)=1$ δέχομαι την ϕ_i

Αν $v(\phi_i)=0$ δέχομαι την $\neg\phi_i$

Το σύνολο των αποδεκτών προτάσεων είναι ικανοποιήσιμο από την v.

▸ Άσκηση 6

Έστω ο διμελής λογικός σύνδεσμος με πίνακα αληθείας:

p	q	$p \downarrow q$
1	1	0
1	0	0
0	1	0
0	0	1

→ NOR

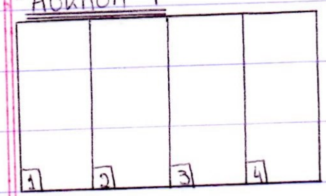
Να δειχθεί ότι ο καθένας από τους συνδέσμους $\neg, \wedge, \vee$ (και κατ'επέκταση και οι $\rightarrow, \leftrightarrow$) μπορεί να εκφραστεί μόνο με το σύνδεσμο $\downarrow$

p	$\neg p$	$p \downarrow p$
1	0	0
0	1	1

$\neg\phi \;\dashv\vDash\; \phi \downarrow \phi$

p	q	$p\wedge q$	$p\vee q$	$p\downarrow p$	$q\downarrow q$	$p\downarrow q$	$(p\downarrow q)\downarrow(q\downarrow q)$	$(p\downarrow q)\downarrow(p\downarrow q)$	$(p\downarrow p)\downarrow(p\downarrow q)$
1	1	1	1	0	0	0	1	1	1
1	0	0	1	0	1	0	0	1	1
0	1	0	1	1	0	0	0	1	0
0	0	0	0	1	1	1	0	0	0

Άσκηση 7



Να τοποθετηθούν στις περιοχές $\boxed{1}$, $\boxed{2}$, $\boxed{3}$ και $\boxed{4}$ οι αριθμοί 1 ή 2 έτσι ώστε αν δύο περιοχές είναι γειτονικές να έχουν διαφορετικό αριθμό.

Θεωρούμε τις προτάσεις:

P_{11}: Η περιοχή $\boxed{1}$ έχει τον αριθμό 1

P_{12}: -||- $\boxed{1}$ -||- 2

P_{21}: -||- $\boxed{2}$ -||- 1

P_{22}: -||- $\boxed{2}$ -||- 2

P_{31}: -||- $\boxed{3}$ -||- 1

P_{32}: -||- $\boxed{3}$ -||- 2

P_{41}: -||- $\boxed{4}$ -||- 1

P_{42}: -||- $\boxed{4}$ -||- 2

Με βάση τα 8 άτομα, θα μετατρέψουμε το πρόβλημα που μας δίδεται σε πρόβλημα ικανοποίησης, ως εξής:

Η περιοχή $\boxed{1}$ έχει τουλάχιστον ένα από τα 1,2: $p_{11} \vee p_{12}$

-||- $\boxed{2}$ -||- $p_{21} \vee p_{22}$

-||- $\boxed{3}$ -||- $p_{31} \vee p_{32}$

-||- $\boxed{4}$ -||- $p_{41} \vee p_{42}$

Αφού οι περιοχές $\boxed{1}$, $\boxed{2}$ είναι γειτονικές, πρέπει: $\neg p_{11} \vee \neg p_{21}$

$\neg p_{12} \vee \neg p_{22}$

ψευδής, μόνο όταν στις περιοχές $\boxed{1}$ και $\boxed{2}$, έχουμε το 2

Αφου οι περιοχές $\boxed{2}$, $\boxed{3}$ είναι γειτονικές, πρέπει: $\neg p_{21} \vee \neg p_{31}$

$\neg p_{22} \vee \neg p_{32}$

Αφού οι περιοχές $\boxed{3}$, $\boxed{4}$ είναι γειτονικές, πρέπει: $\neg p_{31} \vee \neg p_{41}$

$\neg p_{32} \vee \neg p_{42}$

Επομένως, το πρόβλημα έχει λύση ανν το σύνολο Σ είναι ικανοποιήσιμο, όπου
$\Sigma = \{p_{11} \vee p_{12},\ p_{21} \vee p_{22},\ p_{31} \vee p_{32},\ p_{41} \vee p_{42},\ \neg p_{11} \vee \neg p_{21},\ \neg p_{12} \vee \neg p_{22},\ \neg p_{21} \vee \neg p_{31},$
$\neg p_{22} \vee \neg p_{32},\ \neg p_{31} \vee \neg p_{41},\ \neg p_{32} \vee \neg p_{42}\}$
και κάθε μοντέλο του Σ είναι μια λύση του προβλήματος
Άρα, είναι μοντέλο του Σ είναι
$v(p_{11}) = 1 \quad v(p_{12}) = 0$
$v(p_{22}) = 1 \quad v(p_{21}) = 0$
$v(p_{31}) = 1 \quad v(p_{32}) = 0$
$v(p_{41}) = 1 \quad v(p_{41}) = 0$

2 1 $\boxed{1}$	1 2 $\boxed{2}$	2 1 $\boxed{3}$	1 2 $\boxed{4}$

▸ Ασκηση 8

Εστω $a(\phi)$ ο αριθμός των θέσεων της ϕ όπου εμφανίζεται άτομο και $b(\phi)$ ο αριθμός των θέσεων της ϕ οπου εμφανίζεται διμελής σύνδεσμος. Να δειχθεί ότι $a(\phi) = b(\phi) + 1$, για κάθε $\phi \in P$.

Αρχικά θα ορίσουμε αναδρομικά τις συναρτήσεις $a(\phi)$ και $b(\phi)$

- $a(p) = 1$, για άτομο $p \in P_0$
- $a(\neg\phi) = a(\phi)$, για κάθε $\phi \in P$
- $a(\phi \square y) = a(\phi) + a(y)$, για κάθε $\phi, y \in P$

$\square$: οποιοσδήποτε από τους $\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$.

$b(p) = 0$, για κάθε $p \in P_0$

$b(\neg\phi) = b(\phi)$, για κάθε $\phi \in P$

$b(\phi \square y) = b(\phi) + b(y) + 1$, για κάθε $\phi, y \in P$

Στη συνέχεια, θα αποδείξουμε την ισότητα: $a(\phi) = b(\phi) + 1$, για κάθε $\phi \in P$, χρησιμοποιώντας την αρχή της επαγωγικής απόδειξης.

Για κάθε άτομο p έχουμε:

$a(p)=1$ και $b(p)=0$

Άρα $a(p)=b(p)+1$, για κάθε $p \in P_0 \longrightarrow$ σύνολο των ατόμων.

- Έστω ότι για κάποια $x \in P$ ισχύει ότι:

$\boxed{a(x)=b(x)+1}$

Θα δείξουμε ότι $a(\neg x)=b(\neg x)+1$

$a(\neg x) \underset{\text{απο ορισμό}}{=} a(x) \underset{\text{υπόθεση}}{=} b(x)+1 \underset{\text{απο ορισμό}}{=} b(\neg x)+1$

Άρα και σ'αυτή την περίπτωση, η ισότητα ισχύει.

- Έστω ότι για κάποιες φ, y ισχύει ότι:

$a(\varphi)=b(\varphi)+1$

$a(y)=b(y)+1$

Θα δείξουμε ότι $a(\varphi \square y)=b(\varphi \square y)+1$

$a(\varphi \square y) = a(\varphi)+a(y) \overset{\text{υποθ.}}{\underset{(1),(2)}{=}} b(\varphi)+1+b(y)+1 \overset{\text{ορισμό}}{=} b(\varphi \square y)+1.$

Άρα και σ'αυτή την περίπτωση η ισότητα ισχύει.

Άρα, απο την αρχή της επαγωγικής απόδειξης του προτασιακού λογισμού, η ισότητα $a(\varphi)=b(\varphi)+1$ ισχύει για κάθε $\varphi \in P$.

▸ Άσκηση 9

Να δειχθούν οι παρακάτω λογικές ισοδυναμίες:

a) $\neg(p \rightarrow q) \vDash\!\Dashv p \wedge \neg q$

$\neg(p \rightarrow q) \vDash\!\Dashv \neg(\neg p \vee q) \vDash\!\Dashv \neg(\neg p) \wedge \neg q \vDash\!\Dashv p \wedge \neg q$

Υπενθύμιση: $p \rightarrow q \vDash\!\Dashv \neg p \vee q$

$\neg(a \vee b) \vDash\!\Dashv \neg a \wedge \neg b$

$\neg(\neg p) \vDash\!\Dashv p$

β) $p \vee p \vDash\!\Dashv p$

$p \wedge p \vDash\!\Dashv p$

p	p∨p	p∧p
1	1	1
0	0	0

γ) $(p \land q) \land q \dashv\vDash q$

$(p \lor q) \land q \dashv\vDash q$

p	q	$p \land q$	$(p \land q) \lor q$	$p \lor q$	$(p \lor q) \land q$
1	1	1	1	1	1
1	0	0	0	1	0
0	1	0	1	1	1
0	0	0	0	0	0

▸ Άσκηση 10

Να γραφούν οι παρακάτω προτάσεις σε μορφή συζεύξεων διαζεύξεων, (όχι υποχρεωτικά πλήρη CNF) χωρίς τη χρήση πινάκων αληθείας.

α) p

Θεωρούμε ότι η p είναι σ'αυτή τη μορφή.

β) $p \lor q$

Είναι ok όπως είναι.

γ) $p \land q$

Είναι ok όπως είναι.

δ) $p \to q$

$p \to q \dashv\vDash \neg p \lor q$

ε) $(p \leftrightarrow q) \land r$

$(p \leftrightarrow q) \land (q \to p) \land r \dashv\vDash (\neg p \lor q) \land (\neg q \lor p) \land r$

στ) $p \to (q \lor r)$

$p \to (q \lor r) \dashv\vDash \neg p \lor (q \lor r)$

ζ) $(q \lor r) \to p$

$(q \lor r) \to p \dashv\vDash \neg(q \lor r) \lor p \dashv\vDash (\neg q \land \neg r) \lor p \dashv\vDash (\neg q \lor p) \land (\neg r \lor p)$

η) $\neg((q \vee r) \to (r \to p))$

$$\neg((q \vee r) \to (r \to p)) \dashv\vDash \neg(\neg(q \vee r) \vee (r \to p)) \dashv\vDash (q \vee r) \wedge \neg(r \to p) \dashv\vDash (q \vee r) \wedge r \wedge \neg p$$

Άσκηση 11

Δίδονται οι προτάσεις $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ όπου:

$\varphi_1 : (p \to q) \wedge r$

$\varphi_2 : \neg(r \leftrightarrow q) \vee (p \leftrightarrow q)$

$\varphi_3 : (p \wedge r) \leftrightarrow (\neg p \vee \neg q)$

Να βρεθεί ο ελάχιστος αριθμός εκτιμήσεων που απαιτούνται για να διακρίνουμε τις 3 προτάσεις, αν οι μόνες πληροφορίες που έχουμε είναι οι τιμές των εκτιμήσεών τους.

p	q	r	$p \to q$	φ_1	$\neg(r \leftrightarrow q)$	$p \leftrightarrow q$	φ_2	$p \wedge r$	$\neg p \vee \neg q$	φ_3
1	1	1	1	1	0	1	1	1	0	0
1	1	0	1	0	1	1	1	0	0	1
1	0	1	0	0	1	0	1	1	1	1
1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0
0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	0
0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0
0	0	1	1	1	1	1	1	0	1	0
0	0	0	1	0	0	1	1	0	1	0

Μπορούμε με μόνο δύο εκτιμήσεις.

Αρχικά θέτουμε $v(p) = v(q) = v(r) = 1$.

Η πρόταση για την οποία η v δίνει ψευδές είναι η φ_3.

Στη συνέχεια θέτουμε $v(p) = v(q) = 1$ και $v(r) = 0$.

Η αληθής πρόταση είναι η φ_2 και η ψευδής η φ_1.