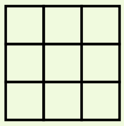
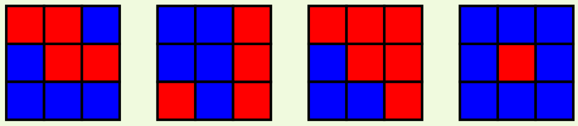
Ασκήσεις στις βασικές αρχές

Άσκηση 1. *Κάθε μοναδιαίο τετράγωνο του επόμενου σχήματος χρωματίζεται κόκκινο ή μπλε.*

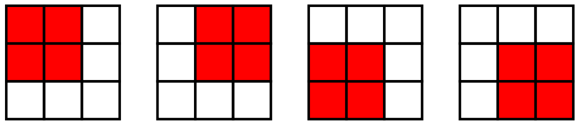


Για παράδειγμα,



Με πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορεί να χρωματισθεί το παραπάνω σχήμα έτσι ώστε να περιέχει τουλάχιστον ένα κόκκινο τετράγωνο με διαστάσεις 2 επί 2;

Λύση. Παρατηρούμε ότι στο σχήμα υπάρχουν 4 πιθανές θέσεις εμφάνισης ενός κόκκινου τετραγώνου με διαστάσεις 2×2.



C_1 C_2 C_3 C_4

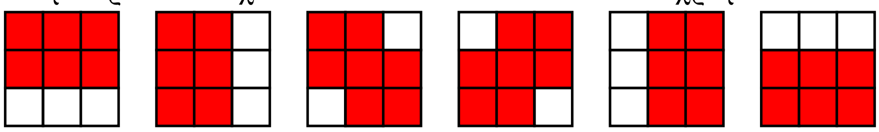
Έστω C_1, C_2, C_3, C_4 το σύνολο των χρωματισμών που περιέχουν ένα κόκκινο τετράγωνο με διαστάσεις 2×2 στην πάνω αριστερή, πάνω δεξιά, κάτω αριστερή και κάτω δεξιά γωνία του σχήματος αντίστοιχα.

Οι χρωματισμοί που περιέχουν τουλάχιστον ένα κόκκινο τετράγωνο με διαστάσεις 2×2 είναι το σύνολο $C_1 \cup C_2 \cup C_3 \cup C_4$.

Από την αρχή εγκλεισμού - αποκλεισμού έχουμε ότι

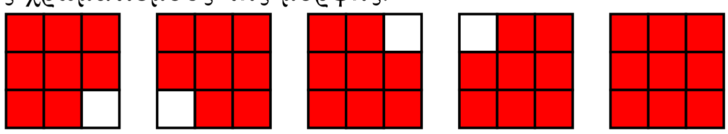
$$\begin{aligned}|C_1 \cup C_2 \cup C_3 \cup C_4| = &|C_1| + |C_2| + |C_3| + |C_4| \\ &- |C_1 \cap C_2| - |C_1 \cap C_3| - |C_1 \cap C_4| - |C_2 \cap C_3| - |C_2 \cap C_4| - |C_3 \cap C_4| \\ &+ |C_1 \cap C_2 \cap C_3| + |C_1 \cap C_2 \cap C_4| + |C_1 \cap C_3 \cap C_4| + |C_2 \cap C_3 \cap C_4| \\ &- |C_1 \cap C_2 \cap C_3 \cap C_4|\end{aligned}$$

Τα σύνολα $C_1 \cap C_2$, $C_1 \cap C_3$, $C_1 \cap C_4$, $C_2 \cap C_3$, $C_2 \cap C_4$, $C_3 \cap C_4$ αποτελούνται από τους χρωματισμούς οι οποίοι περιέχουν έχουν κόκκινα μοναδιαία τετράγωνα στις επόμενες θέσεις, ενώ τα λευκά τετράγωνα μπορούν να έχουν οποιαδήποτε από τα δύο χρώματα.



$C_1 \cap C_2$ $C_1 \cap C_3$ $C_1 \cap C_4$ $C_2 \cap C_3$ $C_2 \cap C_4$ $C_3 \cap C_4$

Αντίστοιχα, τα σύνολα $C_1 \cap C_2 \cap C_3$, $C_1 \cap C_2 \cap C_4$, $C_1 \cap C_3 \cap C_4$, $C_2 \cap C_3 \cap C_4$, $C_1 \cap C_2 \cap C_3 \cap C_4$ αποτελούνται από τους χρωματισμούς της μορφής:



$C_1 \cap C_2 \cap C_3$ $C_1 \cap C_2 \cap C_4$ $C_1 \cap C_3 \cap C_4$ $C_2 \cap C_3 \cap C_4$ $C_1 \cap C_2 \cap C_3 \cap C_4$

Από την πολλαπλασιαστική αρχή προκύπτει ότι
$|C_1| = |C_2| = |C_3| = |C_4| = 2^5$,
$|C_1 \cap C_2| = |C_1 \cap C_3| = |C_2 \cap C_4| = |C_3 \cap C_4| = 2^3$,
$|C_1 \cap C_4| = |C_2 \cap C_3| = 2^2$,
$|C_1 \cap C_2 \cap C_3 = C_1 \cap C_2 \cap C_4| = |C_1 \cap C_3 \cap C_4| = |C_2 \cap C_3 \cap C_4| = 2^1$,
$|C_1 \cap C_2 \cap C_3 \cap C_4| = 1$.
Αντικαθιστώντας έχουμε ότι

$$|C_1 \cup C_2 \cup C_3 \cup C_4| = 4 \cdot 2^5 - (4 \cdot 2^3 + 2 \cdot 2^2) + 4 \cdot 2^1 - 1 \cdot 1 = 128 - 40 + 4 - 1 = 91.$$

Άρα, από τους $2^9 = 512$ διαφορετικούς χρωματισμούς του σχήματος, οι 91 χρωματισμοί περιέχουν τουλάχιστον ένα κόκκινο τετράγωνο με διαστάσεις 2×2. □

Άσκηση 2. *Να βρεθεί με πόσους τρόπους μπορούν να μοιρασθούν 7 διαφορετικά χαρτιά σε 4 παίχτες έτσι ώστε κάθε παίχτης να λάβει τουλάχιστον ένα χαρτί.*

Λύση. Επειδή είναι ευκολότερο να μετρήσουμε τους τρόπους να μην λάβουν κάποιοι παίχτες κανένα χαρτί, θεωρούμε τα παρακάτω σύνολα:

Έστω το σύνολο E όλων των τρόπων να μοιρασθούν τα 7 χαρτιά στους 4 παίχτες χωρίς περιορισμούς.

Επίσης, έστω D_1, D_2, D_3 και D_4 τα σύνολα των τρόπων να μοιρασθούν τα 7 χαρτιά έτσι ώστε ο πρώτος, ο δεύτερος, ο τρίτος και ο τέταρτος παίχτης να μην λάβουν κανένα χαρτί αντίστοιχα.

Τότε, τα σύνολα $\overline{D_1}$, $\overline{D_2}$, $\overline{D_3}$ και $\overline{D_4}$ είναι αντίστοιχα οι τρόποι να μοιρασθούν τα 7 χαρτιά έτσι ώστε ο πρώτος, ο δεύτερος, ο τρίτος και ο τέταρτος παίχτης να λάβει τουλάχιστον ένα χαρτί αντίστοιχα.

Άρα, το σύνολο $\overline{D_1} \cap \overline{D_2} \cap \overline{D_3} \cap \overline{D_4}$ περιέχει τους τρόπους να μοιρασθούν τα 7 χαρτιά στους 4 παίχτες έτσι ώστε κάθε παίχτης να λάβει τουλάχιστον ένα χαρτί.

Από την αρχή εγκλεισμού - αποκλεισμού έχουμε ότι

$$\begin{aligned}|\overline{D_1} \cap \overline{D_2} \cap \overline{D_3} \cap \overline{D_4}| = &|E| - |D_1| - |D_2| - |D_3| - |D_4| \\ &+ |D_1 \cap D_2| + |D_1 \cap D_3| + |D_1 \cap D_4| + |D_2 \cap D_3| + |D_2 \cap D_4| + |D_3 \cap D_4| \\ &- |D_1 \cap D_2 \cap D_3| - |D_1 \cap D_2 \cap D_4| - |D_1 \cap D_3 \cap D_4| - |D_2 \cap D_3 \cap D_4| \\ &+ |D_1 \cap D_2 \cap D_3 \cap D_4|\end{aligned}$$

Από την αρχή του γινομένου προκύπτει ότι $|E| = 4^7$ αφού για κάθε ένα από τα 7 χαρτιά έχουμε 4 επιλογές. Αντίστοιχα,
$|D_1| = |D_2| = |D_3| = |D_4| = 3^7$.
$|D_1 \cap D_2| = |D_1 \cap D_3| = |D_1 \cap D_4| = |D_2 \cap D_3| = |D_2 \cap D_4| = |D_3 \cap D_4| = 2^7$.
$|D_1 \cap D_2 \cap D_3| = |D_1 \cap D_2 \cap D_4| = |D_1 \cap D_3 \cap D_4| = |D_2 \cap D_3 \cap D_4| = 1^7$.
$|D_1 \cap D_2 \cap D_3 \cap D_4| = 0$.
Αντικαθιστώντας, έχουμε ότι

$$|\overline{D_1} \cap \overline{D_2} \cap \overline{D_3} \cap \overline{D_4}| = 4^7 - 4 \cdot 3^7 + 6 \cdot 2^7 - 4 \cdot 1^7 + 0 = 16384 - 8748 + 768 - 4 = 8400$$

Άρα, υπάρχουν 8400 τρόποι να μοιρασθούν τα 7 χαρτιά στους 4 παίχτες έτσι ώστε κάθε παίχτης να λάβει τουλάχιστον ένα χαρτί. □

Άσκηση 3. *(α) Έστω ότι 17 άτομα σχηματίζουν ένα κύκλο στον οποίο δεν υπάρχουν δύο διαδοχικές γυναίκες. Να δειχθεί ότι στον κύκλο μπορεί να υπάρχουν το πολύ 8 γυναίκες.*

(β) 17 άνδρες και 17 γυναίκες σχηματίζουν κύκλο. Να δειχθεί ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα άτομο που έχει αριστερά και δεξιά του γυναίκα.

Λύση. (α) Παρατηρούμε ότι κάθε γυναίκα που εμφανίζεται στον κύκλο έχει στα δεξιά της ένα (διαφορετικό) άνδρα. Αν στον κύκλο υπάρχουν $k \geqslant 9$ γυναίκες τότε ο κύκλος θα περιέχει τουλάχιστον k άνδρες, το οποίο είναι άτοπο διότι $2k \geqslant 18 > 17$.

(β) Έστω ότι δεν υπάρχει άτομο που έχει αριστερά και δεξιά του γυναίκα.

Αριθμούμε κυκλικά τα 34 άτομα (ξεκινώντας από οποιοδήποτε άτομο).

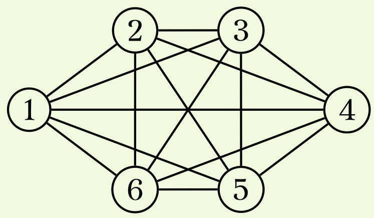
Τα 17 άτομα με άρτια αρίθμηση και τα 17 άτομα με περιττή αρίθμηση σχηματίζουν δύο νέους κύκλους, στους οποίους δεν υπάρχουν δύο διαδοχικές γυναίκες. (Αλλιώς θα υπήρχε ένα άτομο μεταξύ τους στον αρχικό κύκλο.)

Όμως, σε κάθε κύκλο με 17 άτομα στον οποίο δεν υπάρχουν δύο διαδοχικές γυναίκες, προκύπτει ότι μπορεί να περιλαμβάνονται το πολύ 8 γυναίκες.

Επομένως, στους δύο κύκλους που σχηματίσθηκαν μπορούν να περιλαμβάνονται το πολύ $8 + 8 = 16$ γυναίκες, το οποίο είναι άτοπο.

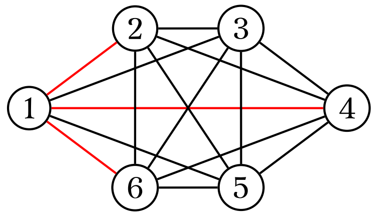
Άρα, υπάρχει άτομο που έχει αριστερά και δεξιά του γυναίκα. □

Άσκηση 4. *Κάθε γραμμή του επόμενου σχήματος χρωματίζεται κόκκινη ή πράσινη. Να δειχθεί ότι σε κάθε χρωματισμό που θα προκύψει θα υπάρχει ένα κόκκινο τρίγωνο ή/και ένα πράσινο τρίγωνο.*



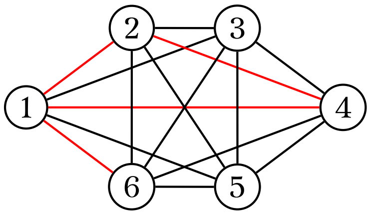
Λύση. Το σχήμα περιέχει $\binom{6}{2} = 15$ γραμμές και κάθε γραμμή έχει 2 τρόπους χρωματισμούς, άρα συνολικά υπάρχουν $2^{15} = 32768$ διαφορετικοί τρόποι χρωματισμού των γραμμών του.

Επειδή η κορυφή 1 είναι άκρο 5 γραμμών και κάθε μία από τις 5 γραμμές χρωματίζεται κόκκινη ή πράσινη, από την γενικευμένη αρχή του περιστερεώνα έπεται ότι τουλάχιστον $\lceil \frac{5}{2} \rceil = 3$ από τις γραμμές της θα έχουν το ίδιο χρώμα. Χωρίς βλάβη της γενικότητας, υποθέτουμε ότι αυτές οι 3 γραμμές έχουν χρωματισθεί κόκκινες και συνδέουν την 1 με τις 2, 4 και 6.

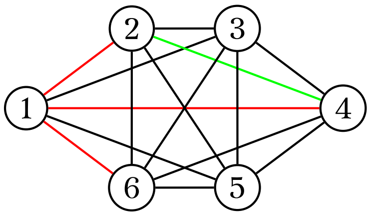


Διακρίνουμε τις παρακάτω **εμφωλευμένες** περιπτώσεις:

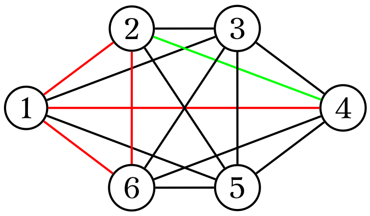
Αν η γραμμή $2-4$ είναι κόκκινη, τότε υπάρχει το κόκκινο τρίγωνο 124.



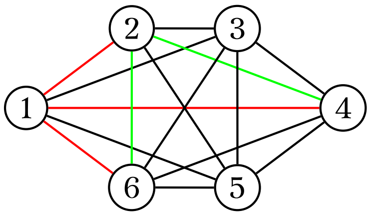
Αλλιώς, η γραμμή $2-4$ είναι πράσινη.



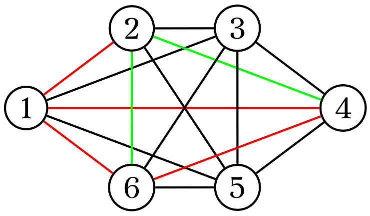
Αν η γραμμή $2-6$ είναι κόκκινη, τότε υπάρχει το κόκκινο τρίγωνο 126.



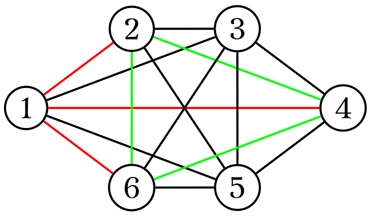
Αλλιώς, η γραμμή $2-6$ είναι πράσινη.



Αν η γραμμή $4-6$ είναι κόκκινη, τότε υπάρχει το κόκκινο τρίγωνο 146.



Αλλιώς, η γραμμή $4-6$ είναι πράσινη και τότε υπάρχει το πράσινο τρίγωνο 246.



Άρα, σε κάθε περίπτωση υπάρχει ένα κόκκινο ή/και πράσινο τρίγωνο. $\square$

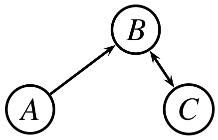
Άσκηση 5. *Ένα ad hoc ασύρματο δίκτυο αποτελείται από $n \geqslant 3$ αναμεταδότες και κάθε αναμεταδότης στέλνει την πληροφορία μόνο στον πλησιέστερο αναμεταδότη. Οι αποστάσεις μεταξύ των αναμεταδοτών είναι ανά δύο διαφορετικές. Να δειχθεί ότι αν το πλήθος των αναμεταδοτών είναι περιττός αριθμός, τότε κάποιος αναμεταδότης δεν λαμβάνει πληροφορία από κανέναν άλλο.*

Λύση. Προκειμένου όλοι να λαμβάνουν πληροφορία από κάποιον άλλο πρέπει να μην υπάρχει κάποιος αναμεταδότης που λαμβάνει πληροφορία από περισσότερους από έναν αναμεταδότη.

Επίσης, παρατηρούμε ότι επειδή οι αποστάσεις ανάμεσα στους αναμεταδότες είναι ανά δύο διαφορετικές έπεται ότι οι δύο κοντινότεροι αναμεταδότες θα στέλνουν την πληροφορία ο ένας στον άλλο.

Θα χρησιμοποιήσουμε επαγωγή ως προς τον αριθμό $2k+1$ των αναμεταδοτών.

Αν το δίκτυο αποτελείται από 3 αναμεταδότες, τότε οι δύο κοντινότεροι από αυτούς θα στέλνουν την πληροφορία ο ένας στον άλλο και ο τρίτος θα στέλνει την πληροφορία σε έναν από τους δύο κοντινότερους, οπότε ο ίδιος δεν θα λαμβάνει πληροφορία. Επομένως, το συμπέρασμα ισχύει για 3 αναμεταδότες.



Έστω ότι το συμπέρασμα ισχύει για κάθε δίκτυο με $2k+1 \geqslant 3$ αναμεταδότες.

Σε κάθε δίκτυο με $2(k+1)+1 = 2k+3$ αναμεταδότες οι δύο κοντινότεροι θα στέλνουν την πληροφορία ο ένας στον άλλο.

Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:

Αν κάποιος από τους υπόλοιπους $2k+1$ στέλνει την πληροφορία σε έναν από τους δύο κοντινότερους, τότε τουλάχιστον ένας από αυτούς τους $2k+1$ δεν θα λαμβάνει πληροφορία από κανένα.

Αλλιώς, οι υπόλοιποι $2k+1$ αναμεταδότες αποτελούν ένα ad hoc ασύρματο δίκτυο με τις ίδιες ιδιότητες και άρα από την υπόθεση της επαγωγής υπάρχει τουλάχιστον ένας αναμεταδότης που δεν λαμβάνει πληροφορία από κανέναν άλλο. □

Άσκηση 6.

(i) *Να βρεθεί ο μέγιστος κοινός διαιρέτης των αριθμών 176 και 265*

Θα χρησιμοποιήσουμε τον αλγόριθμο του Ευκλείδη

$265 = 1 \cdot 176 + 89 \longrightarrow 89 = 1 \cdot 265 + (-1) \cdot 176$

$176 = 1 \cdot 89 + 87 \longrightarrow 87 = 1 \cdot 176 + (-1) \cdot 89$

$89 = 1 \cdot 87 + 2 \longrightarrow 2 = 1 \cdot 89 + (-1) \cdot 87$

$87 = 43 \cdot 2 + 1 \longrightarrow 1 = 1 \cdot 87 + (-43) \cdot 2$

Άρα, $gcd(265, 176) = 1$.

(ii) *Να εκφραστεί ο μκδ των 176 και 265 ως γραμμικός συνδυασμός αυτών των αριθμών με ακέραιους συντελεστές.*

$$\begin{aligned}
1 &= 1 \cdot 87 + (-43) \cdot 2 \\
&= 1 \cdot 87 + (-43) \cdot (1 \cdot 89 + (-1) \cdot 87) \\
&= (-43) \cdot 89 + 44 \cdot 87 \\
&= (-43) \cdot 89 + 44 \cdot (1 \cdot 176 + (-1) \cdot 89) \\
&= 44 \cdot 176 + (-87) \cdot 89 \\
&= 44 \cdot 176 + (-87) \cdot (1 \cdot 265 + (-1) \cdot 176) \\
&= (-87) \cdot 265 + 131 \cdot 176
\end{aligned}$$

(iii) *Να βρεθούν όλες οι λύσεις της διοφαντικής εξίσωσης* $176x + 265y = 3$

Από τα προηγούμενα έχουμε ότι

$176 \cdot 131 + 265 \cdot (-87) = 1$ *(πολ/ζουμε επί 3)*

$176 \cdot 393 + 265 \cdot (-261) = 3$

Άρα, μια λύση της εξίσωσης $176x + 265y$ *ειναι το ζεύγος* $(x_0, y_0) = (393, -261)$.

Επομένως, η γενική λύση της εξίσωσης έχει την μορφή

$$(x, y) = (x_0 - \lambda 265/1, y_0 + \lambda 176/1) = (393 - 265\lambda, -261 + 176\lambda),$$

όπου λ *οποιοσδήποτε ακέραιος.*

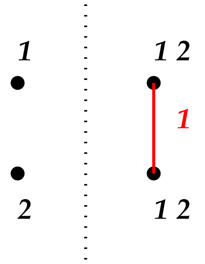
Άσκηση 7. *Μια παρέα n ατόμων κουτσομπολεύουν ανά δύο μέσω τηλεφώνου. Κάθε άτομο γνωρίζει τουλάχιστον ένα κουτσομπολιό που δεν το γνωρίζουν τα υπόλοιπα άτομα. Σε μια τηλεφωνική συνομιλία μεταξύ των A και B, ο A λέει στον B όλα τα κουτσομπολιά που έχει ακούσει και ο B ανταποδίδει. Έστω a_n ο ελάχιστος αριθμός τηλεφωνικών κλήσεων που πρέπει να γίνουν μεταξύ n ατόμων, ώστε όλα τα κουτσομπολιά να είναι γνωστά στον καθένα.*

i) *Να δειχθεί ότι* $a_2 = 1$, $a_3 = 3$ *και* $a_4 = 4$.

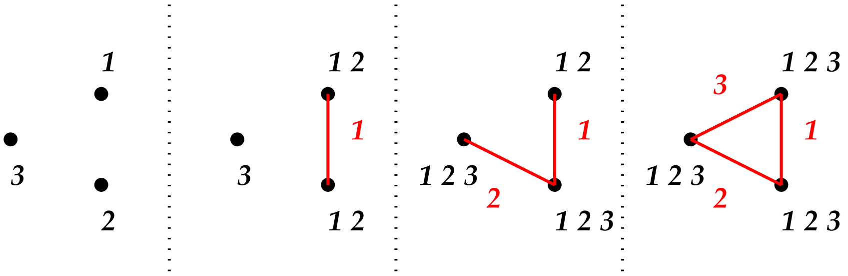
ii) *Να δειχθεί ότι* $a_n \leqslant 2n - 4$, *για κάθε* $n \geqslant 4$.

Λύση.

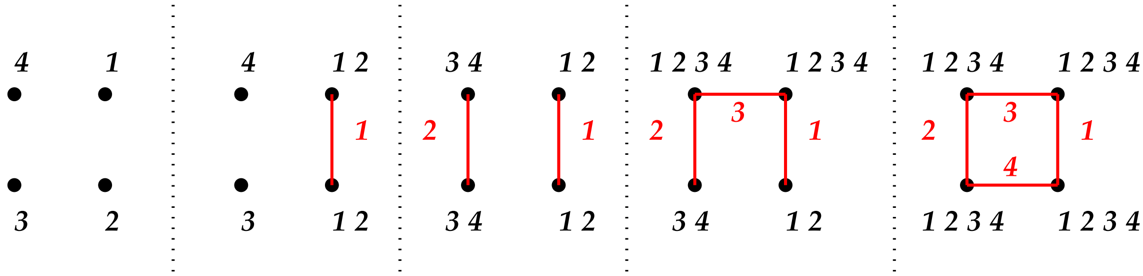
i) Πράγματι, για $n = 2$ αρκεί ένα τηλεφώνημα.



Για $n = 3$ αρκούν τρία τηλεφωνήματα.



Για $n = 3$ αρκούν τέσσερα τηλεφωνήματα.



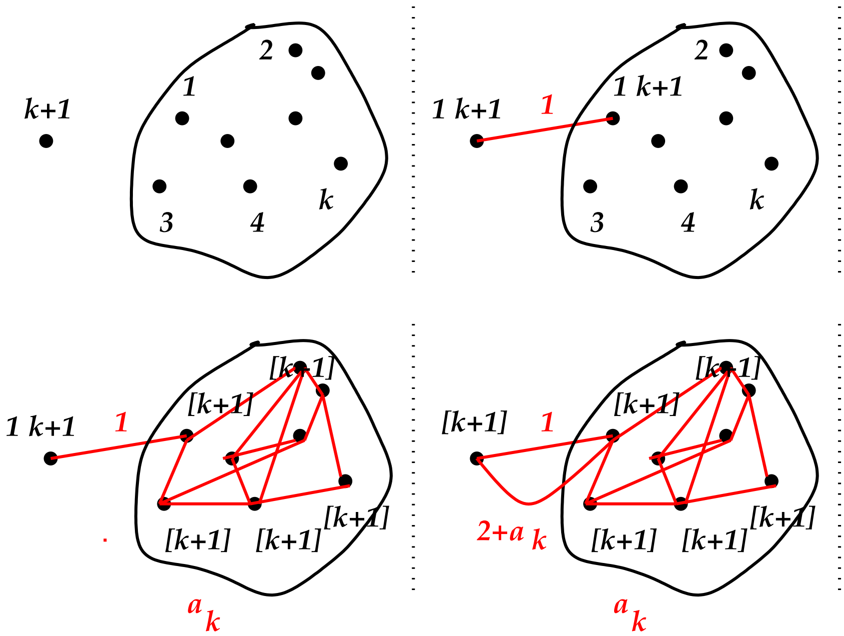
ii) Έστω η πρόταση $\Pi(n) : a_n \leqslant 2n - 4$.

Για $n = 4$ έχουμε ότι $a_4 = 2 \cdot 4 - 4 = 4$, άρα η $\Pi(4)$ είναι αληθής.

Έστω ότι η πρόταση $\Pi(k)$ είναι αληθής για κάποιο $k \geqslant 4$, δηλαδή $a_k \leqslant 2k - 4$.

Θα δείξουμε ότι και η πρόταση $\Pi(k+1)$ είναι αληθής, δηλαδή $a_{k+1} \leqslant 2(k+1) - 4$.

Πράγματι, έστω ότι έχουμε $k+1$ άτομα. Αρχικά, το άτομο $k+1$ επικοινωνεί με το άτομο 1 και ανταλλάσουν τα κουτσομπολιά που γνωρίζουν. Στην συνέχεια τα άτομα 1, 2, …, k ανταλλάσουν τα κουτσομπολιά που γνωρίζουν χρησιμοποιώντας a_k κλήσεις (αγνοώντας το άτομο $k+1$). Στο τέλος, το άτομο 1 καλεί το άτομο $k+1$ και του μεταφέρει όλα τα υπόλοιπα κουτσομπολιά.



Άρα, $a_{k+1} \leqslant 1 + a_k + 1 \leqslant 1 + (2k-4) + 1 \leqslant 2(k+1) - 4$. □