Ασκήσεις στην Λογική

Άσκηση 1 (Επαγωγικοί ορισμοί - Επαγωγικές αποδείξεις).

i) *Να ορισθεί επαγωγικά η έννοια $\gamma(\varphi)$ ο αριθμός των θέσεων όπου εμφανίζεται σύνδεσμος στη φ.*

ii) *Να δειχθεί ότι για κάθε πρόταση $\varphi \in P$ ισχύει ότι $r(\varphi) \leqslant \gamma(\varphi)$.*
*(Υπενθύμιση: Η **τάξη** (rank) της φ, $r(\varphi)$ είναι ένας φυσικός αριθμός με:*

i) $r(p_i) = 0$, *για κάθε* $p_i \in P_0$,

ii) $r(\varphi \square y) = \max\{r(\varphi), r(y)\} + 1$,

iii) $r(\neg\varphi) = r(\varphi) + 1$.*)*

Λύση.

i) $\gamma(p) = 0$, $p \in P_0$, (δηλαδή p άτομο.)

$\gamma(\neg\varphi) = \gamma(\varphi) + 1$, για κάθε $\varphi \in P$.

$\gamma(\varphi \square y) = \gamma(\varphi) + \gamma(y) + 1$, για κάθε $\varphi, y \in P$

ii) Για κάθε άτομο $p \in P$ έχουμε ότι

$r(p) = 0 \leqslant 0 = \gamma(p)$

δηλαδή η ανισότητα ισχύει για τα άτομα.

Έστω ότι η ανισότητα ισχύει για μια πρόταση φ δηλαδή $r(\varphi) \leqslant \gamma(\varphi)$.

θα δείξουμε η ανισότητα ισχύει και για την πρόταση $\neg\varphi$

$r(\neg\varphi) = r(\varphi) + 1 \leqslant \gamma(\varphi) + 1 = \gamma(\neg\varphi)$

δηλαδή η ανισότητα ισχύει για την πρόταση $\neg\varphi$.

Έστω ότι η ανισότητα ισχύει για τις προτάσεις φ, y δηλαδή $r(\varphi) \leqslant \gamma(\varphi)$ και $r(y) \leqslant \gamma(y)$.

Θα δείξουμε η ανισότητα ισχύει και για την πρόταση $\varphi \square y$.

$r(\varphi \square y) = \max\{r(\varphi), r(y)\} + 1 \leqslant r(\varphi) + r(y) + 1 \leqslant \gamma(\varphi) + \gamma(y) + 1 = \gamma(\varphi \square y)$

δηλαδή η ανισότητα ισχύει για την πρόταση $\varphi \square y$.

Άρα, από την αρχή της επαγωγής του προτασιακού λογισμού, η ανισότητα ισχύει για κάθε πρόταση $\varphi \in P$. $\square$

Άσκηση 2 (Τιμές αληθείας). *Δοθέντος ότι η πρόταση $p \to q$ είναι ψευδής, να βρεθεί η τιμή αληθείας των προτάσεων $(p \to q) \to r$, $p \vee (q \to r)$ και $q \wedge (p \vee r)$.*

Λύση. Επειδή $v(p \to q) = 0$ ισχύει ότι $v(p) = 1$ και $v(q) = 0$.

Άρα,
$v((p \to q) \to r) = 1$ (αφού $v(p \to q) = 0$).
$v(p \vee (q \to r)) = 1$ (αφού $v(p) = 1$).
$v(q \wedge (p \vee r)) = 0$ (αφού $v(q) = 0$). □

Άσκηση 3 (Ψευδείς προτάσεις). *Να βρεθούν εκτιμήσεις για τις οποίες οι παρακάτω προτάσεις είναι ψευδείς:*

i) $\varphi_1 = (x \vee y \vee z) \to ((x \vee y) \wedge (x \vee z))$.

ii) $\varphi_2 = ((p \to (q \wedge r)) \to (\neg q \to \neg p)) \to \neg q$.

Λύση.

i) Για να είναι η πρόταση φ_1 ψευδής πρέπει $v((x \vee y \vee z)) = 1$ και $v(((x \vee y) \wedge (x \vee z)) = 0$.

Αν $v(x) = 1$, τότε $v((x \vee y \vee z)) = v(((x \vee y) \wedge (x \vee z))) = 1$. Άρα, $v(x) = 0$.

Επομένως, πρέπει ακριβώς ένα από τα y και z να είναι ψευδές (και το άλλο αληθές).

Άρα, έχουμε δύο εκτιμήσεις για τις οποίες $v(\varphi_1) = 0$:

- $v(x) = v(y) = 0$ και $v(z) = 1$.
- $v(x) = v(z) = 0$ και $v(y) = 1$.

ii) Για να είναι η πρόταση φ_2 ψευδής πρέπει $v((p \to (q \wedge r)) \to (\neg q \to \neg p)) = 1$ και $v(\neg q) = 0$.

Άρα, $v(q) = 1$.

Επομένως, $v(\neg q \to \neg p) = 1$ (αφού $v(\neg q) = 0$).

οπότε και $v((p \to (q \wedge r)) \to (\neg q \to \neg p)) = 1$ (αφού $v(\neg q \to \neg p) = 1$).

Συνεπώς, έχουμε τέσσερεις εκτιμήσεις για τις οποίες $v(\varphi_2) = 0$:

- $v(q) = v(p) = v(r) = 1$
- $v(q) = v(p) = 1$, $v(r) = 0$
- $v(q) = v(r) = 1$, $v(p) = 0$
- $v(q) = 1$, $v(p) = v(r) = 0$. □

Άσκηση 4 (Λογικά συμπεράσματα). *Δίδονται οι προτάσεις $\varphi_1 = p \wedge q$ και $\varphi_2 = p \vee q$. Να εξετασθεί αν η πρόταση φ_2 είναι λογικό συμπέρασμα της πρότασης φ_1 και το αντίστροφο.*

Λύση. Η φ_1 έχει μοναδικό μοντέλο την εκτίμηση v με $v(p) = v(q) = 1$. Η εκτίμηση αυτή επαληθεύει την φ_2, οπότε η φ_2 είναι λογικό συμπέρασμα της φ_1.

Το αντίστροφο δεν ισχύει διότι η εκτίμηση v με $v(p) = 1$ και $v(q) = 0$ είναι μοντέλο της φ_2 (αφού $v(\varphi_2) = 1$) όμως δεν είναι μοντέλο της φ_1 (αφού $v(\varphi_1) = 0$).

Παρατήρηση: Μπορούσαμε να δώσουμε την απάντηση ελέγχοντας αν οι προτάσεις $(p \wedge q) \to (p \vee q)$ και $(p \vee q) \to (p \wedge q)$ είναι ταυτολογίες ή όχι, αντίστοιχα. □

Άσκηση 5 (Μη ικανοποιήσιμο σύνολο). *Έστω*

$$\Sigma = \{\neg(q \to (p \vee r)), (q \to p) \wedge q\}.$$

i) *Να βρεθούν όλα τα μοντέλα του συνόλου Σ.*

ii) *Να εξετασθεί αν η πρόταση $p \to r$ είναι λογικό συμπέρασμα του Σ.*

Λύση.

i) Για κάθε μοντέλο v του Σ πρέπει να ισχύει

$v(\neg(q \to (p \vee r))) = v((q \to p) \wedge q) = 1.$

Επομένως,

$v(\neg(q \to (p \vee r))) = 1 \Leftrightarrow v(q \to (p \vee r)) = 0 \Leftrightarrow v(q) = 1$ και $v(p \vee r) = 0.$

Άρα, πρέπει $v(q) = 1$ και $v(p) = v(r) = 0$.

Για την εκτίμηση αυτή έχουμε $v((q \to p) \wedge q) = 0$.

Άρα, το Σ είναι μη ικανοποιήσιμο, δηλαδή δεν έχει κανένα μοντέλο.

ii) Επειδή το Σ είναι μη ικανοποιήσιμο, έπεται ότι η πρόταση $p \to r$ είναι λογικό συμπέρασμα του Σ. □

Άσκηση 6 (Obligato). *Σε ένα παιχνίδι λογικής σας δίδεται μια ακολουθία από προτάσεις ϕ_1, ϕ_2, ..., ϕ_k οι οποίες δεν είναι γνωστές εκ των προτέρων. Έχετε την επιλογή ή να αποδεχτείτε την ϕ_i ή να αποδειχτείτε την $\neg\phi_i$. Θα κερδίσετε το παιχνίδι αν το σύνολο των προτάσεων που αποδεχθήκατε είναι ικανοποιήσιμο. Τι πρέπει να κάνετε για να κερδίσετε;*

Λύση. Επιλέγουμε αυθαίρετα μια εκτίμηση v (π.χ. μια εκτίμηση που όλα τα άτομα τα θεωρεί αληθή).

Για κάθε πρόταση ϕ_i θα ισχύει ή $v(\phi_i) = 1$ ή $v(\neg\phi_i) = 1$, άρα θα αποδεχθούμε ή την ϕ_i ή την $\neg\phi_i$ με βάση αυτό το κριτήριο. □

Άσκηση 7 (Προβλήματα ικανοποιησιμότητας). *Να εξετασθεί ποιά από τα παρακάτω σύνολα προτάσεων είναι ικανοποιήσιμα:*

α) Το $\{p_1, p_1 \to p_2, \neg p_2\}$.

Δεν είναι ικανοποιήσιμο, διότι αν υπάρχει εκτίμηση v που επαληθεύει το σύνολο πρέπει $v(p_1) = 1$, $v(p_2) = 0$, οπότε τότε $v(p_1 \to p_2) = 0$.

β) Το $\{p_n \to p_{n+1} : n \in \mathbb{N}\}$.

Είναι ικανοποιήσιμο. Ένα μοντέλο του είναι η εκτίμηση v με $v(p_i) = 1$, $n \in \mathbb{N}$.

γ) Το $\{p \land q, r \to \neg q, r \lor \neg p, p \lor q \lor r\}$.

Αν υπάρχει εκτίμηση v που επαληθεύει το σύνολο πρέπει $v(p \land q) = 1$, δηλαδή πρέπει $v(p) = v(q) = 1$.

Επομένως, αφού πρέπει $v(r \to \neg q) = 1$ έπεται ότι $v(r) = 0$.

Τότε, όμως, έχουμε ότι $v(r \lor \neg p) = 0$. Άρα, το σύνολο είναι μη ικανοποιήσιμο.

δ) Το $\{p \to q, q \to r, r \to s, s \to \neg p, \neg p \to t, t \to w, w \to p\}$.

ε) Το $\{p \land r, \neg p \lor q, q \to s, s \to w, \neg w \to (p \lor r), p \lor s\}$.

Άσκηση 8 (Αναδρομικοί τύποι για την εκτίμηση). *Να δειχθεί ότι για κάθε εκτίμηση v ισχύουν τα παρακάτω:*

α) $v(\varphi \wedge \psi) = v(\varphi) \cdot v(\psi)$.

β) $v(\varphi \vee \psi) = v(\varphi) + v(\psi) - v(\varphi) \cdot v(\psi)$.

γ) $v(\neg\varphi) = 1 - v(\varphi)$.

δ) $v(\varphi \to \psi) = 1 - v(\varphi) + v(\varphi) \cdot v(\psi)$.

Επειδή κάθε πρόταση είναι ή αληθής ή ψευδής διακρίνουμε περιπτώσεις για τις τιμές αληθείας των φ και ψ:

- $v(\varphi) = v(\psi) = 1$.
  (1ο μέλος) $v(\varphi \to \psi) = 1$.
  (2ο μέλος) $1 - v(\varphi) + v(\varphi) \cdot v(\psi) = 1 - 1 + 1 \cdot 1 = 1$.
- $v(\varphi) = 1$ *και* $v(\psi) = 0$.
  (1ο μέλος) $v(\varphi \to \psi) = 0$.
  (2ο μέλος) $1 - v(\varphi) + v(\varphi) \cdot v(\psi) = 1 - 1 + 1 \cdot 0 = 0$.
- $v(\varphi) = 0$ *και* $v(\psi) = 1$.
  (1ο μέλος) $v(\varphi \to \psi) = 1$.
  (2ο μέλος) $1 - v(\varphi) + v(\varphi) \cdot v(\psi) = 1 - 0 + 0 \cdot 1 = 1$.
- $v(\varphi) = v(\psi) = 0$.
  (1ο μέλος) $v(\varphi \to \psi) = 1$.
  (2ο μέλος) $1 - v(\varphi) + v(\varphi) \cdot v(\psi) = 1 - 0 + 0 \cdot 0 = 1$.

Άρα, η ισότητα ισχύει σε κάθε περίπτωση.

ε) $v(\varphi \leftrightarrow \psi) = 1 - |v(\varphi) - v(\psi)|$.

Άσκηση 9 (Ιδιότητες λογικού συμπεράσματος).

α) Να δειχθεί ότι αν $\Sigma \models \varphi$ ή/και $\Sigma \models \psi$, τότε ισχύει ότι $\Sigma \models \varphi \vee \psi$.

Έστω ότι η $\varphi \vee \psi$ δεν είναι λογικό συμπέρασμα του Σ. Τότε υπάρχει ένα μοντέλο v του Σ το οποίο δεν επαληθεύει την πρόταση $\varphi \vee \psi$, δηλαδή $v(\varphi \vee \psi) = 0 \Rightarrow v(\varphi) = v(\psi) = 0$.

Άρα, ούτε η φ είναι λογικό συμπέρασμα του Σ, ούτε η ψ είναι λογικό συμπέρασμα του Σ, το οποίο είναι άτοπο.

Άρα, η $\varphi \vee \psi$ είναι λογικό συμπέρασμα του Σ.

β) Να δειχθεί ότι δεν ισχύει ότι $\Sigma \models \varphi \vee \psi \Rightarrow \Sigma \models \varphi$ ή $\Sigma \models \psi$.

Θα δώσουμε ένα αντιπαράδειγμα που δείχνει ότι δεν ισχύει αυτή η συνεπαγωγή.

Θα βρούμε ένα σύνολο προτάσεων Σ και δύο προτάσεις φ, ψ που έχουν τις εξής ιδιότητες:

Κάθε μοντέλο του Σ να επαληθεύει την $\varphi \vee \psi$.

Υπάρχει ένα μοντέλο του Σ που δεν επαληθεύει την φ.

Υπάρχει ένα (άλλο) του Σ που δεν επαληθεύει την ψ.

p	q	Σ	φ	ψ
1	1	1	1	0
1	0	1	0	1
0	1	0	-	-
0	0	0	-	-

Αν επιλέξουμε

$\Sigma = \{p \vee q, p \vee \neg q\}$

$\varphi = p \wedge q$

$\psi = \neg(p \to q)$

τότε ισχύει ότι $\Sigma \models \varphi \vee \psi$, ενώ δεν ισχύει καμία από τις προτάσεις $\Sigma \models \varphi$ και $\Sigma \models \psi$.

Άσκηση 10 (Κατασκευή πρότασης με συγκεκριμένα μοντέλα). *Να βρεθεί μια πρόταση φ που περιέχει τα άτομα p, q, r και είναι αληθής όταν ακριβώς ένα από τα p, q, r είναι αληθές.*

Λύση. Η πρόταση φ θα έχει τον επόμενο πίνακα αληθείας:

p	q	r	φ
1	1	1	0
1	1	0	0
1	0	1	0
1	0	0	1
0	1	1	0
0	1	0	1
0	0	1	1
0	0	0	0

p	q	r	φ
1	0	0	1
0	1	0	1
0	0	1	1
			0

Χρησιμοποιώντας την μορφή DNF, μια τέτοια πρόταση είναι η εξής:
$\varphi = (p \wedge \neg q \wedge \neg r) \vee (\neg p \wedge q \wedge \neg r) \vee (\neg p \wedge \neg q \wedge r)$

$\square$

Άσκηση 11 (Μορφές DNF και CNF). *Μετατρέψτε την παρακάτω πρόταση σε DNF και CNF μορφή:*

$$\varphi_1 = \neg(p_1 \to p_2) \vee (\neg p_1 \wedge p_3),$$

Λύση.

- DNF: Υπενθύμιση: $a \to b \mathrel{|}\!\!=\!\!\mathrel{|} \neg a \vee b$. Άρα,
  $\varphi_1 \mathrel{|}\!\!=\!\!\mathrel{|} \neg(\neg p_1 \vee p_2) \vee (\neg p_1 \wedge p_3)$
  Υπενθύμιση: $\neg(a \vee b) \mathrel{|}\!\!=\!\!\mathrel{|} \neg a \wedge \neg b$ και $\neg\neg a \mathrel{|}\!\!=\!\!\mathrel{|} a$. Άρα,
  $\varphi_1 \mathrel{|}\!\!=\!\!\mathrel{|} (p_1 \wedge \neg p_2) \vee (\neg p_1 \wedge p_3)$ (DNF)
- CNF:
  (1η προσπάθεια:)

$$\begin{aligned} \phi_1 &\mathrel{|}\!\!=\!\!\mathrel{|} \neg\neg((p_1 \wedge \neg p_2) \vee (\neg p_1 \wedge p_3)) \\ &\mathrel{|}\!\!=\!\!\mathrel{|} \neg(\neg(p_1 \wedge \neg p_2) \wedge \neg(\neg p_1 \wedge p_3))) \\ &\mathrel{|}\!\!=\!\!\mathrel{|} \neg((\neg p_1 \vee p_2)) \wedge (p_1 \vee \neg p_3)) \Leftrightarrow \\ \neg\phi_1 &\mathrel{|}\!\!=\!\!\mathrel{|} (\neg p_1 \vee p_2)) \wedge (p_1 \vee \neg p_3) \text{ (CNF της } \neg\varphi_1) \end{aligned}$$

(2η προσπάθεια:) Θα χρησιμοποιήσουμε την επιμεριστική ιδιότητα:

$$a \vee (b \wedge c) \models\mid (a \vee b) \wedge (a \vee c)$$

$$\begin{aligned}\phi_1 &\models\mid ((p_1 \wedge \neg p_2) \vee \neg p_1) \wedge ((p_1 \wedge \neg p_2) \vee p_3)\\ &\models\mid ((\neg p_1 \vee p_1) \wedge (\neg p_1 \vee \neg p_2)) \wedge ((p_3 \vee p_1) \wedge (p_3 \vee \neg p_2))\\ &\models\mid (\neg p_1 \vee \neg p_2) \wedge (p_3 \vee p_1) \wedge (p_3 \vee \neg p_2)(CNF)\end{aligned}$$

Παρατήρηση: Η μέθοδος αυτή δεν είναι αποδοτική όταν η DNF περιέχει από πολλές διαζεύξεις.

(3η προσπάθεια:) Από την DNF μορφή μπορούμε να βρούμε τα μοντέλα της φ_1. Η φ_1 έχει τα παρακάτω μοντέλα:

- $v(p_1) = 1$, $v(p_2) = 0$, $v(p_3) = 0$
- $v(p_1) = 1$, $v(p_2) = 0$, $v(p_3) = 1$
- $v(p_1) = 0$, $v(p_2) = 0$, $v(p_3) = 1$
- $v(p_1) = 0$, $v(p_2) = 1$, $v(p_3) = 1$

Στην CNF μας ενδιαφέρουν οι εκτιμήσεις που δεν επαληθεύουν την φ_1. Άρα, για τις υπόλοιπες $8 - 4 = 4$ εκτιμήσεις η φ_1 δεν επαληθεύεται. Οι εκτιμήσεις αυτές είναι οι επόμενες:

- $v(p_1) = 1$, $v(p_2) = 1$, $v(p_3) = 0$
- $v(p_1) = 1$, $v(p_2) = 1$, $v(p_3) = 1$
- $v(p_1) = 0$, $v(p_2) = 0$, $v(p_3) = 0$
- $v(p_1) = 0$, $v(p_2) = 1$, $v(p_3) = 0$

Επομένως, η φ_1 έχει την παρακάτω CNF μορφή:

$$\varphi_1 \models\mid (\neg p_1 \vee \neg p_2 \vee p_3) \wedge (\neg p_1 \vee \neg p_2 \vee \neg p_3) \wedge (p_1 \vee p_2 \vee p_3) \wedge (p_1 \vee \neg p_2 \vee p_3)$$

$\square$