Ασκήσεις στις Αθροίσματα - Διαφορές

Τύπος του διωνύμου του Νεύτωνα Για κάθε $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ και $n \in \mathbb{N}^*$ ισχύει ότι

$$(\alpha+\beta)^n = (\beta+\alpha)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \alpha^k \beta^{n-k}.$$

Άσκηση 1. *Να βρεθούν οι συντελεστές των a^4, a^5 και a^{13} στο ανάπτυγμα της παράστασης* $\left(a+\frac{1}{a^2}\right)^{10}$.

Λύση. Ισχύει ότι

$$\left(a+\frac{1}{a^2}\right)^{10} = \sum_{k=0}^{10} \binom{10}{k} a^k \left(\frac{1}{a^2}\right)^{10-k} = \sum_{k=0}^{10} \binom{10}{k} a^{3k-20}$$

Επομένως, ο γενικός όρος του αθροίσματος έχει την μορφή $\binom{10}{k} a^{3k-20}$.

Ο συντελεστής του a^4 προκύπτει όταν $3k-20=4 \Leftrightarrow k=8$ και ισούται με $\binom{10}{8}$.

Ο συντελεστής του a^5 προκύπτει όταν $3k-20=5 \Leftrightarrow k=\frac{25}{3} \notin \mathbb{Z}$, άρα ισούται με 0, δηλαδή ισοδύναμα το ανάπτυγμα δεν περιέχει τον όρο a^5.

Ο συντελεστής του a^{10} προκύπτει ότνα $3k-20=13 \Leftrightarrow k=11$. Επειδή, $k \notin [10]$, άρα ισούται με 0, δηλαδή ισοδύναμα το ανάπτυγμα δεν περιέχει τον όρο a^{13}. □

Άσκηση 2. *Να υπολογισθούν τα αθροίσματα:*

i) $S_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 1^k 1^{n-k} = (1+1)^n = 2^n$$

ii) $S_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^k$

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^k 1^{n-k} = (2+1)^n = 3^n$$

iii) $S_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k 3^{n-k}$

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k 3^{n-k} = (-1+3)^n = 2^n$$

iv) $S_n = \sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k}$

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} - \binom{n}{0} - \binom{n}{1} = 2^n - 1 - n$$

v) $S_n = \sum_{k=2}^{n-1} \binom{n}{k}$

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} - \binom{n}{0} - \binom{n}{1} - \binom{n}{n} = 2^n - 1 - n - 1 = 2^n - n - 2$$

$$\sum_{k=0}^{n} \tbinom{n}{k} = \tbinom{n}{0} + \tbinom{n}{1} + \underbrace{\binom{n}{2} + \cdots + \binom{n}{n-2} + \binom{n}{n-1}}_{\sum_{k=2}^{n-1} \binom{n}{k}} + \tbinom{n}{n}$$

vi) $S_n = \sum_{k=0}^{n+2} \binom{n+2}{k}$

$$S_n = \sum_{k=0}^{n+2} \binom{n+2}{k} = 2^{n+2}$$

vii) $S_n = \sum_{k=0}^{5n} \binom{5n}{k}$

$$S_n = \sum_{k=0}^{5n} \binom{5n}{k} = 2^{5n}$$

viii) $S_n = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k+1}$

$S_n = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k+1}$

Θέτουμε $k+1=\lambda$, τότε επειδή το k λαμβάνει τιμές από 0 μέχρι $n-1$, το λ θα λαμβάνει τιμές από $0+1$ μέχρι $n-1+1$.

$S_n = \sum_{\lambda=1}^{n} \binom{n}{\lambda} = 2^n - \binom{n}{0} = 2^n - 1$

Άσκηση 3. *Να υπολογισθούν τα αθροίσματα:*

i) $S_n = \sum_{k=0}^{n} n\binom{n}{k}$

$S_n = \sum_{k=0}^{n} n\binom{n}{k} = n2^n$

ii) $\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}$

Από τον τύπο $\binom{a}{b} = \frac{a}{b}\binom{a-1}{b-1} \Leftrightarrow b\binom{a}{b} = a\binom{a-1}{b-1}$ *έπεται ότι*

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} = \sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k} = \sum_{k=1}^{n} n\binom{n-1}{k-1} = n\sum_{k=1}^{n}\binom{n-1}{k-1}$$

Θέτουμε $\lambda = k-1$, οπότε

$$S_n = n\sum_{\lambda=0}^{n-1}\binom{n-1}{\lambda} = n2^{n-1}.$$

iii) $S_n = \sum_{k=0}^{n} (Ak+B)\binom{n}{k}$

$$S_n = \sum_{k=0}^{n}(Ak+B)\binom{n}{k} = A\sum_{k=0}^{n}k\binom{n}{k} + B\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} = An2^{n-1} + B2^n$$

iv) $S_n = \sum_{k=0}^{n} k^2\binom{n}{k}$

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} k^2\binom{n}{k} = \sum_{k=1}^{n} k\cdot k\binom{n}{k}$$

Από τον τύπο $\binom{a}{b} = \frac{a}{b}\binom{a-1}{b-1} \Leftrightarrow b\binom{a}{b} = a\binom{a-1}{b-1}$ *έπεται ότι*

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} kn\binom{n-1}{k-1} = n\sum_{k=1}^{n} k\binom{n-1}{k-1}$$

Θέτουμε $\lambda = k-1$*, οπότε*

$$S_n = n\sum_{\lambda=0}^{n-1}(\lambda+1)\binom{n-1}{\lambda} = n\sum_{\lambda=0}^{n-1}\lambda\binom{n-1}{\lambda} + n\sum_{\lambda=0}^{n-1}\binom{n-1}{\lambda}$$

Γνωρίζουμε ότι $\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} = n2^{n-1}$*, άρα*

$S_n = n(n-1)2^{n-2} + n2^{n-1} = n2^{n-2}(n-1+2) = n(n+1)2^{n-2}$.

v) $\sum_{k=0}^{n}(Ak^2+Bk+C)\binom{n}{k}$

vi) $S_n = \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k+1}\binom{n}{k}$

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1}\binom{n}{k}$$

Από τον τύπο $\binom{a}{b} = \frac{a}{b}\binom{a-1}{b-1} \Leftrightarrow \frac{1}{a}\binom{a}{b} = \frac{1}{b}\binom{a-1}{b-1}$, *θέτοντας όπου* $b-1=k$ *και* $a-1=n$ *έπεται ότι*

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{n+1}\binom{n+1}{k+1} = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}\binom{n+1}{k+1}$$

Θέτουμε $k+1=\lambda$ *οπότε*

$$S_n = \frac{1}{n+1}\sum_{\lambda=1}^{n+1}\binom{n+1}{\lambda} = \frac{1}{n+1}\left(\sum_{\lambda=0}^{n+1}\binom{n+1}{\lambda} - \binom{n+1}{0}\right) = \frac{1}{n+1}\left(2^{n+1}-1\right)$$

vii) $S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{4k-6}{k+1}\binom{n}{k}$

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{4k+4-10}{k+1}\binom{n}{k} = \sum_{k=0}^{n} \frac{4k+4}{k+1}\binom{n}{k} - \sum_{k=0}^{n}\frac{10}{k+1}\binom{n}{k}$$

$$= 4\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} - 10\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k+1}\binom{n}{k} = 4\cdot 2^n - \frac{10}{n+1}\left(2^{n+1}-1\right)$$

Παραγοντικό πολύωνυμο τάξεως k.

$$F_0(x) = 1,$$

$$F_k(x) = \underbrace{x(x-1)(x-2)\cdots(x-k+1)}_{k \text{ όροι}} = (x)_k, \qquad \text{για } k \in \mathbb{N}^*.$$

1. $F_1(x) = x$
2. $F_2(x) = x(x-1) = x^2 - x$
3. $F_3(x) = x(x-1)(x-2) = x^3 - 3x^2 + 2x$
4. $F_4(x) = x(x-1)(x-2)(x-3) = x^4 - 6x^3 + 11x^2 - 6x.$

Οι συντελεστές των x^i που εμφανίζονται στους τύπους των παραγοντικών πολυωνύμων ονομάζονται **αριθμοί Stirling πρώτου είδους**.

Τα μονώνυμα μπορούν να εκφρασθούν με τη βοήθεια παραγοντικών πολυωνύμων.

Παραδείγματα

1. $x = F_1(x)$, διότι $F_1(x) = x$.
2. $x^2 = F_1(x) + F_2(x)$, διότι $F_2(x) = x^2 - x \Rightarrow x^2 = x + F_2(x) = F_1(x) + F_2(x)$
3. $x^3 = F_1(x) + 3F_2(x) + F_3(x)$,
   διότι $F_3(x) = x(x-1)(x-2) = x^3 - 3x^2 + 2x \Rightarrow x^3 = F_3(x) + 3x^2 - 2x = F_3(x) + 3(F_1(x) + F_2(x)) - 2F_1(x)$.

Οι συντελεστές των $F_i(x)$ που εμφανίζονται στους τύπους έκφρασης των μονονύμων από τα παραγοντικά πολυώνυμα ονομάζονται **αριθμοί Stirling δευτέρου είδους**.

Άσκηση 4. *Να δειχθεί ότι* $x^4 = F_1(x) + 7F_2(x) + 6F_3(x) + F_4(x)$.

Λύση. $F_4(x) = x(x-1)(x-2)(x-3) = x^4 - 6x^3 + 11x^2 - 6x$

Άρα,

$x^4 = F_4(x) + 6x^3 - 11x^2 + 6x = F_4(x) + 6(F_1(x) + 3F_2(x) + F_3(x)) - 11(F_1(x) + F_2(x)) + 6F_1(x) = F_4(x) + 6F_3(x) + 7F_2(x) + F_1(x)$. □

Με τη βοήθεια των τύπων των προηγούμενων παραδειγμάτων μπορούμε να εκφράσουμε οποιοδήποτε πολυώνυμο βαθμού μέχρι 4 ως γραμμικό συνδυασμό παραγοντικών πολυωνύμων.

Άσκηση 5. *Να εκφραστεί το πολύωνυμο* $p(x) = 7x^3 - 2x^2 + 6x + 4$ *ως γραμμικός συνδυασμός των παραγοντικών πολυωνύμων* $F_0(x)$, $F_1(x)$, $F_2(x)$ *και* $F_3(x)$.

Λύση. Από τα προηγούμενα παραδείγματα ισχύει ότι

$$\begin{aligned} p(x) &= 7(F_1(x) + 3F_2(x) + F_3(x)) - 2(F_1(x) + F_2(x)) + 6F_1(x) + 4F_0(x) \\ &= 7F_3(x) + 19F_2(x) + 11F_1(x) + 4F_0(x). \end{aligned}$$

□

Διαφορές

Συμβολισμός: $\Delta g(x) = g(x+1) - g(x)$.
Γραμμική ιδιότητα: $\Delta(ag(x) + bf(x)) = a\Delta g(x) + b\Delta f(x)$.

Παρατήρηση:

1. Έστω $f(n) = \sum_{k=0}^{n} g(k)$

   $\Delta f(n) = f(n+1) - f(n) = \sum_{k=0}^{n+1} g(k) - \sum_{k=0}^{n} g(k) = g(n+1)$

2. Έστω $f(n) = \Delta g(n) = g(n+1) - g(n)$

   $\sum_{k=0}^{n} f(k) = \sum_{k=0}^{n} \Delta g(k) = \sum_{k=0}^{n} (g(k+1) - g(k)) = \sum_{k=0}^{n} g(k+1) - \sum_{k=0}^{n} g(k)$
   $= \sum_{k=1}^{n+1} g(k) - \sum_{k=0}^{n} g(k) = g(n+1) - g(0)$

3. Η διαφορά και το άθροισμα συμπεριφέρονται όπως η παράγωγος και το ολοκλήρωμα:

   Αν $g'(x) = f(x)$ τότε $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b (g(x))'dx = g(b) - g(a)$

   Αν $\Delta g(n) = f(n)$ τότε $\sum_{k=a}^{b} f(k) = g(b+1) - g(a)$.

Άσκηση 6. *Να βρεθεί η τιμή του αθροίσματος*

$$S_n = 1 \cdot 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot 4 + \cdots + (n-1)n(n+1) + n(n+1)(n+2).$$

Λύση. (1ος τρόπος)

Ιδέα: Αν $\Delta g(n) = f(n)$ τότε $\sum_{k=a}^{b} f(k) = g(b+1) - g(a)$.

$S_n = \sum_{k=1}^{n} k(k+1)(k+2)$

Ψάχνουμε μια συνάρτηση $g(n)$ (εδώ η συνάρτηση είναι πολυώνυμο) τέτοια ώστε $\Delta g(n) = n(n+1)(n+2)$.

Θα εκφράσουμε την συνάρτηση $n(n+1)(n+2)$ ως άθροισμα παραγοντικών πολυωνύμων.

$n(n+1)(n+2) = n^3 + 3n^2 + 2n$

$F_1(n) = n$

$F_2(n) = n(n-1) = n^2 - n \Rightarrow n^2 = F_2(n) + n = F_2(n) + F_1(n)$

$F_3(n) = n(n-1)(n-2) = n^3 - 3n^2 + 2n \Rightarrow n^3 = F_3(n) + 3n^2 - 2n = F_3(n) + 3(F_2(n) + F_1(n)) - 2F_1(n) = F_3(n) + 3F_2(n) + F_1(n)$

Άρα,

$n(n+1)(n+2) = n^3+3n^2+2n = F_3(n)+3F_2(n)+F_1(n)+3(F_2(n)+F_1(n))+2F_1(n) = F_3(n) + 6F_2(n) + 6F_1(n)$

Χρησιμοποιώντας τον βασικό τύπο:

$$F_k(x) = \frac{\Delta F_{k+1}(x)}{k+1}.$$

έχουμε ότι

$$\begin{aligned} n(n+1)(n+2) = F_3(n) + 6F_2(n) + 6F_1(n) &= \frac{\Delta F_4(n)}{4} + 6\frac{\Delta F_3(n)}{3} + 6\frac{\Delta F_2(n)}{2} \\ &= \Delta\left(\underbrace{\frac{F_4(n)}{4} + 2F_3(n) + 3F_2(n)}_{g(n)}\right) \end{aligned}$$

Συμπέρασμα

$$\begin{aligned} S_n &= g(n+1) - g(1) \\ &= \frac{F_4(n+1)}{4} + 2F_3(n+1) + 3F_2(n+1) - 0 \\ &= \frac{(n+1)n(n-1)(n-2)}{4} + 2(n+1)n(n-1) + 3(n+1)n \end{aligned}$$

(2ος τρόπος)

- Αν το $p(x)$ είναι πολυώνυμο του x βαθμού a, τότε το $\Delta p(x)$ είναι πολυώνυμο του x βαθμού $a-1$.
- Αν το $p(x)$ είναι πολυώνυμο του x βαθμού a, τότε το $\sum_{k=0}^{n} p(k)$ είναι πολυώνυμο του n βαθμού το πολύ $a+1$.

Επειδή

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} k(k+1)(k+2)$$

όπου $k(k+1)(k+2)$ είναι πολυώνυμο του k βαθμού 3 έπεται ότι το S_n είναι πολυώνυμο $q(n)$ του n βαθμού το πολύ 4.

Κάθε πολυώνυμο βαθμού n προσδιορίζεται μοναδικά αν γνωρίζουμε τις τιμές του σε $n+1$ σημεία.

Επομένως, μπορεί να υπολογισθεί αν γνωρίζουμε τουλάχιστον 5 τιμές του. Εδώ θα χρησιμοποιήσουμε διαδοχικές τιμές και τον τύπο του Gregory.

Τύπος του Gregory με παραγοντικά πολυώνυμα Για κάθε πολυώνυμο $p(x)$ βαθμού n, ισχύει ότι

$$p(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{\Delta^k p(0)}{k!} F_k(x).$$

Για $n=0$, $S_0 = 0$.
Για $n=1$, $S_1 = S_0 + 1\cdot 2\cdot 3 = 6$.
Για $n=2$, $S_2 = S_1 + 2\cdot 3\cdot 4 = 6+24 = 30$.
Για $n=3$, $S_3 = S_2 + 3\cdot 4\cdot 5 = 30+60 = 90$.
Για $n=4$, $S_4 = S_3 + 4\cdot 5\cdot 6 = 90+120 = 210$.

x	$q(x)$	$\Delta q(x)$	$\Delta^2 q(x)$	$\Delta^3 q(x)$	$\Delta^4 q(x)$
4	210				
3	90	120			
2	30	60	60		
1	6	24	36	24	
0	0	6	18	18	6

Άρα, $q(0)=0$, $\Delta q(0)=6$, $\Delta^2 q(0)=18$, $\Delta^3 q(0)=18$, $\Delta^4 q(0)=6$.

Οπότε από τον τύπο του Gregory είναι:

$$\begin{aligned} S(n) &= \frac{q(0)}{0!}F_0(n) + \frac{\Delta^1 q(0)}{1!}F_1(n) + \frac{\Delta^2 q(0)}{2!}F_2(n) + \frac{\Delta^3 q(0)}{3!}F_3(n) + \frac{\Delta^4 q(0)}{4!}F_4(n) \\ &= 0 + 6n + \frac{18}{2}n(n-1) + \frac{18}{6}n(n-1)(n-2) + \frac{6}{24}n(n-1)(n-2)(n-3) \\ &= 6n + 9n(n-1) + 3n(n-1)(n-2) + \frac{1}{4}n(n-1)(n-2)(n-3). \end{aligned}$$

□

Άσκηση 7. *Να δειχθεί ότι για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ισχύει ότι*

$$\binom{-\frac{1}{2}}{n} = (-4)^{-n}\binom{2n}{n}.$$

Λύση.

$$\begin{aligned} \binom{-\frac{1}{2}}{n} &= \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}-1\right)\cdots\left(-\frac{1}{2}-n+1\right)}{n!} \\ &= (-1)^n \frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{2}\cdots\frac{2n-1}{2}}{n!} \\ &= (-1)^n \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2^n n!} \\ &= (-1)^n \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)\cdot 2^n n!}{2^n n!\cdot 2^n n!} \\ &= (-1)^n \frac{(2n)!}{4^n n! n!} = (-4)^{-n}\binom{2n}{n}. \end{aligned}$$

□