Μαθηματικά των Υπολογιστών

Άλγεβρα Boole - Βασικές αρχές

2021-2022

Δυαδική άλγεβρα Boole

$$\left.\begin{array}{l} x+y=y+x \\ x\cdot y=y\cdot x \end{array}\right\} \quad \text{(αντιμεταθετικότητα)}$$

$$\left.\begin{array}{l} x+(y+z)=(x+y)+z \\ x\cdot(y\cdot z)=(x\cdot y)\cdot z \end{array}\right\} \quad \text{(προσεταιριστικότητα)}$$

$$\left.\begin{array}{l} x+(x\cdot y)=x \\ x\cdot(x+y)=x \end{array}\right\} \quad \text{(απορροφητικότητα)}$$

$$\left.\begin{array}{l} x+x=x \\ x\cdot x=x \end{array}\right\} \quad \text{(αδυναμία)}$$

$$\left.\begin{array}{l} x\cdot(y+z)=x\cdot y+x\cdot z \\ x+y\cdot z=(x+y)\cdot(x+z) \end{array}\right\} \quad \text{(επιμεριστικότητα)}$$

i. $(x')'=x$

ii. $x+0=x$ και $x+1=1$.

iii. $x\cdot 0=0$ και $x\cdot 1=x$.

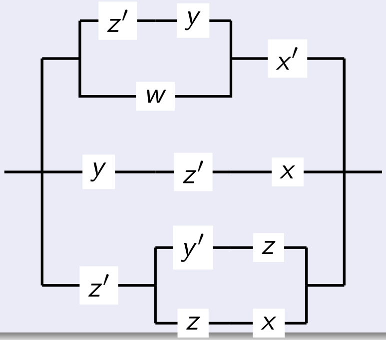
iv. $x+x'=1$ και $x\cdot x'=0$.

v. $x'+x\cdot y=x'+y$.

vi. $\left.\begin{array}{l} (x+y)'=x'\cdot y' \\ (x\cdot y)'=x'+y' \end{array}\right\}$ (τύποι De Morgan).

Άσκηση 1

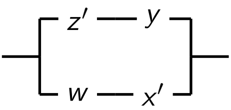
Να απλοποιηθεί το παρακάτω δίπολο, με χρήση των συναρτήσεων Boole.



Η συνάρτηση Boole που αντιστοιχεί στο παραπάνω δίπολο είναι η

$$\begin{aligned} f &= (z'y + w)x' + yz'x + z'(y'z + zx) \\ &= z'yx' + wx' + yz'x + z'z(y' + x) \\ &= z'y(x' + x) + wx' + 0 = z'y1 + wx' \\ &= z'y + wx' \end{aligned}$$

Επομένως, το ισοδύναμο απλοποιημένο δίπολο είναι το ακόλουθο:



Άσκηση 2

Να λυθεί η εξίσωση

$$x + y' = x'$$

(1ος τρόπος) Θα φτιάξουμε πίνακα αληθείας με όλες τις δυνατές επιλογές.

x	y	x'	$x + y'$
1	1	0	1
1	0	0	1
0	1	1	0
0	0	1	1

Άρα, η εξίσωση έχει μια λύση. Την λύση $x = y = 0$.

(2ος τρόπος) Αν $x = 1$, τότε $1 + y' = 0$, αδύνατο.
Αν $x = 0$, τότε $0 + y' = 1 \Leftrightarrow y' = 1 \Leftrightarrow y = 0$.
Άρα, η εξίσωση έχει μια λύση. Την λύση $x = y = 0$.

Άσκηση 3

Να λυθεί η εξίσωση

$$ax + y = b$$

όπου x, y *είναι οι άγνωστοι και* a, b *είναι παράμετροι.*

Διακρίνουμε περιπτώσεις για τις τιμές των παραμέτρων a, b.

$a = b = 1$. Τότε $x + y = 1$.
Υπάρχουν 3 λύσεις.
1η λύση: $x = y = 1$.
2η λύση: $x = 1$, $y = 0$.
3η λύση: $x = 0$, $y = 1$.

$a = b = 0$. Τότε $y = 0$.
Υπάρχουν 2 λύσεις.
1η λύση: $x = 1$, $y = 0$.
2η λύση: $x = 0$, $y = 0$.

$a = 1$, $b = 0$. Τότε $x + y = 0$.
Υπάρχει 1 λύση: $x = y = 0$

$a = 0$, $b = 1$. Τότε $y = 1$.
Υπάρχουν 2 λύσεις.
1η λύση: $x = 1$, $y = 1$.
2η λύση: $x = 0$, $y = 1$.

Άσκηση 4

Να λυθεί το σύστημα Boole

$$x' + (y' + x)y' = 1$$
$$x + x'y' = 0$$

Διακρίνουμε περιπτώσεις:

i) Αν $y = 0$, τότε η δεύτερη εξίσωση δίνει

$$x + x'1 = 0 \Rightarrow x + x' = 0,$$

το οποίο είναι αδύνατο.

ii) Αν $y = 1$, τότε η δεύτερη εξίσωση δίνει

$$x + x'0 = 0 \Rightarrow x = 0$$

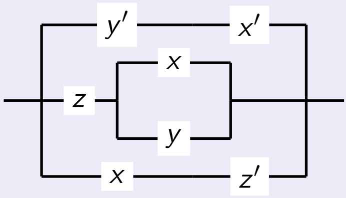
και η πρώτη εξίσωση δίνει

$$x' + (0 + x)0 = 1 \Rightarrow x' = 1 \Rightarrow x = 0.$$

Επομένως, η μοναδική λύση του συστήματος είναι η $(x, y) = (0, 1)$.

Άσκηση 5

Να βρεθεί η συνάρτηση που αντιστοιχεί στο δίπολο



Αν $xz = 1$, *υπάρχει τιμή των μεταβλητών* x, y, z *ώστε η συνάρτηση που αντιστοιχεί στο δίπολο να λαμβάνει τιμή 1?*

Η συνάρτηση f έχει 3 μεταβλητές

$$f(x,y,z) = y'x' + z(x+y) + xz'$$

Αν $xz = 1$ τότε πρέπει $x = z = 1$. Οπότε έχουμε την απλούστερη συνάρτηση (του y)

$$f(1,y,1) = y'0 + 1(1+y) + 1\cdot 0 = 1 + y = 1$$

Η συνάρτηση είναι σταθερή και ισούται με 1.
Άρα, υπάρχουν δύο διαφορετικές τιμές των μεταβλητών που δίνουν την τιμή 1:
$x = y = z = 1$ ή $x = z = 1$ και $y = 0$.

Άσκηση 6

Να βρεθεί μια συνάρτηση Boole που έχει 3 μεταβλητές x, y, z και λαμβάνει την τιμή 1 μόνο όταν ισχύει η σχέση $x + y = z$.

Θα φτιάξουμε τον πίνακα αληθείας της συνάρτησης f που ψάχνουμε

x	y	z	f
1	1	1	1
1	1	0	0
1	0	1	1
1	0	0	0
0	1	1	1
0	1	0	0
0	0	1	0
0	0	0	1

Επομένως, μπορούμε να βρούμε (έναν) τύπο της ως εξής:
DNF: $f = xyz + xy'z + x'yz + x'y'z'$
CNF: $f = (x' + y' + z)(x' + y + z)(x + y' + z)(x + y + z')$.

Αρχή περιστερεώνα

Έστω A, B δύο πεπερασμένα σύνολα.

* Αν $|A| > |B|$, τότε κάθε απεικόνιση $f : A \to B$ δεν είναι 1-1.
* Για κάθε $f : A \to B$ με $|A| > |B|$ υπάρχει $y \in B$ το οποίο είναι εικόνα τουλάχιστον $\lceil \frac{|A|}{|B|} \rceil$ προτύπων

Άσκηση 7

Έστω A ένα σύνολο 10 *αριθμών μεταξύ του* 1 *και του* 100.
Για παράδειγμα

$$A = \{23, 26, 29, 40, 45, 65, 70, 71, 87, 90\}$$

Να δειχθεί ότι υπάρχουν τουλάχιστον δύο υποσύνολα του A με το ίδιο άθροισμα στοιχείων.

Έστω $P(A)$ το σύνολο όλων των υποσυνόλων του A.
Ο αριθμός των υποσυνόλων X του A που σχηματίζουν οι 10 αριθμοί ισούται με $|P(A)| = 2^{10} = 1024$.
Θεωρούμε την απεικόνιση $f : P(A) \to \mathbb{N}$ με $f(X)$ το άθροισμα των στοιχείων του υποσυνόλου $X \in P(A)$.
Επειδή οι 10 αριθμοί ανήκουν στο διάστημα [100] έπεται ότι για κάθε $X \in P(A)$ ισχύει ότι $f(X) < 10 \cdot 100 = 1000$, δηλαδή $f(P(A)) \subseteq [1000]$.
Επειδή $|P(A)| = 1024 > 1000 = |[1000]| \geq |f(P(A))|$ έπεται ότι η f δεν είναι 1-1, άρα υπάρχουν υποσύνολα X, Y στο $P(A)$ με $f(X) = f(Y)$.

Παρατήρηση. Το παράδειγμα αυτό γενικεύται ως εξής: Έστω n αριθμοί μεταξύ του 1 και του m, όπου $2^n > mn$. Να δειχθεί ότι υπάρχουν τουλάχιστον δύο υποσύνολα αυτών των n αριθμών με το ίδιο άθροισμα στοιχείων.
Να σημειωθεί ότι ενώ υπάρχουν τέτοια υποσύνολα με το ίδιο άθροισμα είναι κατά κανόνα δύσκολο να τα βρούμε με κάποιο αλγόριθμο.

Να βρεθούν 2 υποσύνολα των 90 επόμενων 25-ψήφιων αριθμών πού έχουν το ίδιο άθροισμα:

20480135385502964448038 489445991866915676240992 1082662032430379651370981 1178480894769706178994993
1253127351683239693851327 1301505129234077811069011 1311567111143866433882194 1470029452721203587686214
1578271047286257499433886 1638243921852176243192354 1763580219131985963102365 1826227795601842231029694
1843971862675102037201420 2396951193722134526177237 2781394568268599801096354 2796605196713610405408019
2931016394761975263190347 2933458058294405155197296 3075514410490975920315348 3111474985252793452860017
3145621587936120118438701 3148901255628881103198549 3157693105325111284321993 3171004832173501394113017
3208234421597368647019265 3437254656355157864869113 3574883393058653923711365 3644909946040480189969149
3790044132737084094417246 3870332127437971355322815 4080505804577801451363100 4167283461025702348124920
4235996831123777788211249 4670939445749439042111220 4815379351865384279613427 4837052948212922604442190
5106389423855018550671530 5142368192004769218069910 5181234096130144084041856 5198267398125617994391348
5317592940316231219758372 5384358126771794128356947 5439211712248901995423441 5610379826092838192760458
5632317555465228677676044 5692168374637019617423712 5763257331083479647409398 5800949123548989122628663
6042900801199280218026001 6116171789137737896701405 6144868973001582369723512 6247314593851169234746152
6814428944266874963488274 6870852945543886849147881 6914955508120950093732397 6949632451365987152423541
7128211143613619828415650 7173920083651862307925394 7215654874211755676220587 7256932847164391040233050
7332822657075235431620317 7426441829541573444964139 7632198126531809327186321 7712154432211912882310511
7858918664240262356610010 7898156786763212963178679 8147591017037573337848616 8149436716871371161932035
8176063831682536571306791 8247331000042995311646021 8496243997123475922766310 8518399140676002660747477
8543691283470191452333763 8675309258374137092461352 8694321112363996867296665 8772321203608477245851154
8791422161722582546341091 9062628024592126283973285 9137845566925526349897794 9153762966803189291934419
9270880194077636406984249 9324301480722103490379204 9436090832146695147140581 9475308159734538249013238
9492376623917486974923202 9511972558779880288252979 9602413424619187112552264 9631217114906129219461111
9908189853102753335981319 9913237476341764299813987

$$2^{90} \geq 1.237 \times 10^{27} > 0.901 \times 10^{27} \geq 90 \times 10^{25}$$

Άσκηση 8

(α) Έστω ότι 17 *άτομα σχηματίζουν ένα κύκλο στον οποίο δεν υπάρχουν δύο διαδοχικές γυναίκες. Να δειχθεί ότι στον κύκλο μπορεί να υπάρχουν το πολύ* 8 *γυναίκες.*
(β) 17 *άνδρες και* 17 *γυναίκες σχηματίζουν κύκλο. Να δειχθεί ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα άτομο που έχει αριστερά και δεξιά του γυναίκα.*

(α) Παρατηρούμε ότι κάθε γυναίκα που εμφανίζεται στον κύκλο έχει στα δεξιά της ένα (διαφορετικό) άνδρα. Αν στον κύκλο υπάρχουν $k \geq 9$ γυναίκες τότε ο κύκλος θα περιέχει τουλάχιστον k άνδρες, το οποίο είναι άτοπο διότι $2k \geq 18 > 17$.

(β) Έστω ότι δεν υπάρχει άτομο που έχει αριστερά και δεξιά του γυναίκα.

Αριθμούμε κυκλικά τα 34 άτομα (ξεκινώντας από οποιοδήποτε άτομο). Τα 17 άτομα με άρτια αρίθμηση και τα 17 άτομα με περιττή αρίθμηση σχηματίζουν δύο νέους κύκλους, στους οποίους δεν υπάρχουν δύο διαδοχικές γυναίκες. (Αλλιώς θα υπήρχε ένα άτομο μεταξύ τους στον αρχικό κύκλο.)

Όμως, σε κάθε κύκλο με 17 άτομα στον οποίο δεν υπάρχουν δύο διαδοχικές γυναίκες, προκύπτει ότι μπορεί να περιλαμβάνονται το πολύ 8 γυναίκες.

Επομένως, στους δύο κύκλους που σχηματίσθηκαν μπορούν να περιλαμβάνονται το πολύ $8 + 8 = 16$ γυναίκες, το οποίο είναι άτοπο.

Άρα, υπάρχει άτομο που έχει αριστερά και δεξιά του γυναίκα.

Άσκηση 9

Στο παιχνίδι "Λόττο", επιλέγονται 6 *από τους αριθμούς* $1, 2, \ldots, 49$.

1	2	3	4	5	6	7
8	9	10	11	12	13	14
15	16	17	18	19	20	21
22	23	24	25	26	27	28
29	30	31	32	33	34	35
36	37	38	39	40	41	42
43	44	45	46	47	48	49

Υποθέστε ότι ένα βραβείο παρηγοριάς δίδεται επίσης στα δελτία που δεν περιέχουν κανέναν από τους 6 *αριθμούς που κερδίζουν. Ποιός είναι ο ελάχιστος αριθμός δελτίων με* 6 *αριθμούς που πρέπει να συμπληρωθούν ώστε να εξασφαλίσουμε το βραβείο παρηγοριάς; Πώς θα συμπληρωθούν όλα αυτά τα δελτία;*

Άσκηση 9

Στο παιχνίδι "Λόττο", επιλέγονται 6 από τους αριθμούς $1, 2, \ldots, 49$.

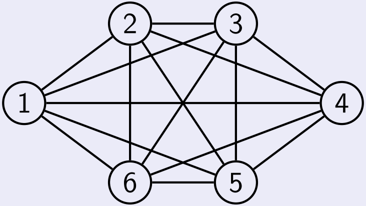
1	2	3	4	5	6	7
8	9	10	11	12	13	14
15	16	17	18	19	20	21
22	23	24	25	26	27	28
29	30	31	32	33	34	35
36	37	38	39	40	41	42
43	44	45	46	47	48	49

Υποθέστε ότι ένα βραβείο παρηγοριάς δίδεται επίσης στα δελτία που δεν περιέχουν κανέναν από τους 6 αριθμούς που κερδίζουν. Ποιός είναι ο ελάχιστος αριθμός δελτίων με 6 αριθμούς που πρέπει να συμπληρωθούν ώστε να εξασφαλίσουμε το βραβείο παρηγοριάς; Πώς θα συμπληρωθούν όλα αυτά τα δελτία;

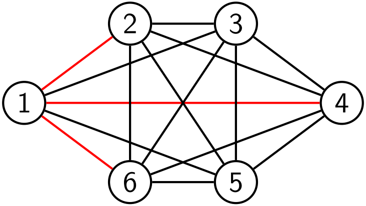
Αρκεί να συμπληρώσουμε 7 δελτία (με διαφορετικούς αριθμούς). Τότε ένα τουλάχιστον δελτίο δεν θα περιέχει κανένα από τους αριθμούς που κερδίζουν.

Άσκηση 10

Κάθε γραμμή του επόμενου σχήματος χρωματίζεται κόκκινη ή πράσινη. Να δειχθεί ότι σε κάθε χρωματισμό που θα προκύψει θα υπάρχει ένα κόκκινο τρίγωνο ή/και ένα πράσινο τρίγωνο.

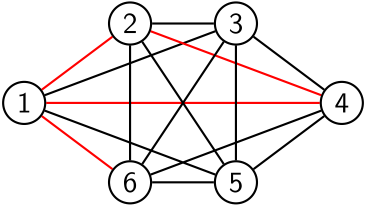


Το σχήμα περιέχει $\binom{6}{2} = 15$ γραμμές και κάθε γραμμή έχει 2 τρόπους χρωματισμούς, άρα συνολικά υπάρχουν $2^{15} = 32768$ διαφορετικοί τρόποι χρωματισμού των γραμμών του.
Επειδή η κορυφή 1 είναι άκρο 5 γραμμών και κάθε μία από τις 5 γραμμές χρωματίζεται κόκκινη ή πράσινη, από την γενικευμένη αρχή του περιστερεώνα έπεται ότι τουλάχιστον $\lceil \frac{5}{2} \rceil = 3$ από τις γραμμές της θα έχουν το ίδιο χρώμα. Χωρίς βλάβη της γενικότητας, υποθέτουμε ότι αυτές οι 3 γραμμές έχουν χρωματισθεί κόκκινες και συνδέουν την 1 με τις 2, 4 και 6.

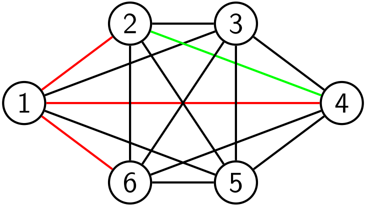


Διακρίνουμε τις παρακάτω **εμφωλευμένες** περιπτώσεις:

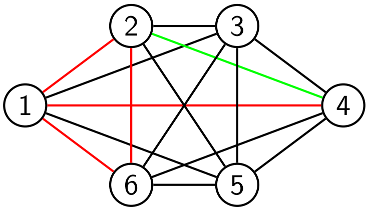
Αν η γραμμή $2-4$ είναι κόκκινη, τότε υπάρχει το κόκκινο τρίγωνο 124.



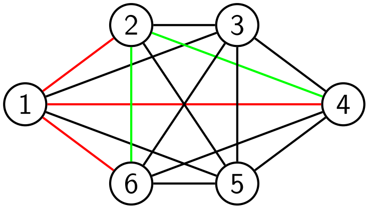
Αλλιώς, η γραμμή $2-4$ είναι πράσινη.



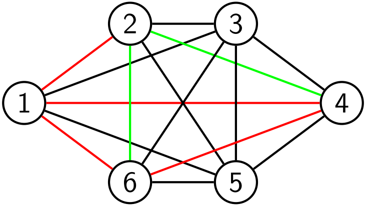
Αν η γραμμή $2-6$ είναι κόκκινη, τότε υπάρχει το κόκκινο τρίγωνο 126.



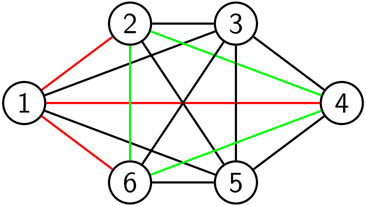
Αλλιώς, η γραμμή $2-6$ είναι πράσινη.



Αν η γραμμή $4 - 6$ είναι κόκκινη, τότε υπάρχει το κόκκινο τρίγωνο 146.



Αλλιώς, η γραμμή $4 - 6$ είναι πράσινη και τότε υπάρχει το πράσινο τρίγωνο 246.

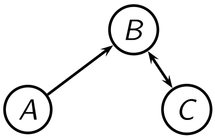


Άρα, σε κάθε περίπτωση υπάρχει ένα κόκκινο ή/και πράσινο τρίγωνο.

Άσκηση 11

Ένα ad hoc ασύρματο δίκτυο αποτελείται από $n \geq 3$ αναμεταδότες και κάθε αναμεταδότης στέλνει την πληροφορία μόνο στον πλησιέστερο αναμεταδότη. Οι αποστάσεις μεταξύ των αναμεταδοτών είναι ανά δύο διαφορετικές. Να δειχθεί ότι αν το πλήθος των αναμεταδοτών είναι περιττός αριθμός, τότε κάποιος αναμεταδότης δεν λαμβάνει πληροφορία από κανέναν άλλο.

Προκειμένου όλοι να λαμβάνουν πληροφορία από κάποιον άλλο πρέπει να μην υπάρχει κάποιος αναμεταδότης που λαμβάνει πληροφορία από περισσότερους από έναν αναμεταδότη.
Επίσης, παρατηρούμε ότι επειδή οι αποστάσεις ανάμεσα στους αναμεταδότες είναι ανά δύο διαφορετικές έπεται ότι οι δύο κοντινότεροι αναμεταδότες θα στέλνουν την πληροφορία ο ένας στον άλλο.
Θα χρησιμοποιήσουμε επαγωγή ως προς τον αριθμό $2k+1$ των αναμεταδοτών.
Αν το δίκτυο αποτελείται από 3 αναμεταδότες, τότε οι δύο κοντινότεροι από αυτούς θα στέλνουν την πληροφορία ο ένας στον άλλο και ο τρίτος θα στέλνει την πληροφορία σε έναν από τους δύο κοντινότερους, οπότε ο ίδιος δεν θα λαμβάνει πληροφορία. Επομένως, το συμπέρασμα ισχύει για 3 αναμεταδότες.



Έστω ότι το συμπέρασμα ισχύει για κάθε δίκτυο με $2k+1 \geq 3$ αναμεταδότες.
Σε κάθε δίκτυο με $2(k+1)+1 = 2k+3$ αναμεταδότες οι δύο κοντινότεροι θα στέλνουν την πληροφορία ο ένας στον άλλο.
Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:
Αν κάποιος από τους υπόλοιπους $2k+1$ στέλνει την πληροφορία σε έναν από τους δύο κοντινότερους, τότε τουλάχιστον ένας από αυτούς τους $2\kappa+1$ δεν θα λαμβάνει πληροφορία από κανένα.
Αλλιώς, οι υπόλοιποι $2k+1$ αναμεταδότες αποτελούν ένα ad hoc ασύρματο δίκτυο με τις ίδιες ιδιότητες και άρα από την υπόθεση της επαγωγής υπάρχει τουλάχιστον ένας αναμεταδότης που δεν λαμβάνει πληροφορία από κανέναν άλλο.

Αρχή Εγκλεισμού – Αποκλεισμού

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|. \quad (1)$$

Γενικότερα, για $n \geq 2$ ισχύει ότι

$$|A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n| = S_1 - S_2 + S_3 - \cdots + (-1)^{\nu-1} S_\nu + \cdots + (-1)^{n-1} S_n, \quad (2)$$

όπου
S_1 είναι το άθροισμα των $|A_i|$, όπου $1 \leq i \leq n$,
S_2 είναι το άθροισμα των $|A_i \cap A_j|$, όπου $1 \leq i < j \leq n$,
S_3 είναι το άθροισμα των $|A_i \cap A_j \cap A_k|$, όπου $1 \leq i < j < k \leq n$,
$\vdots$
S_n είναι $|A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n|$.

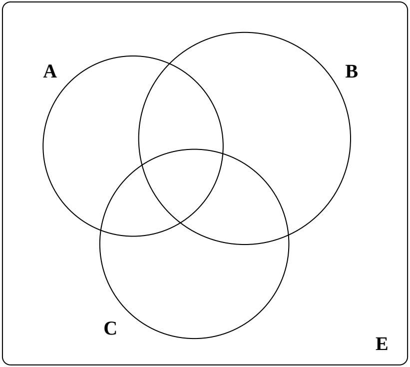
Άσκηση 12

Μια διαφημιστική εταιρεία ενδιαφέρεται να συγκεντρώσει στοιχεία για τις προτιμήσεις 3500 *πελατών ενός τουριστικού γραφείου σχετικά με τις διακοπές που επιθυμούν:* 2000 *άτομα δήλωσαν ότι προτιμούν διακοπές στην Ελλάδα.* 1600 *άτομα δήλωσαν ότι προτιμούν διακοπές σε κάποιο παραθαλάσσιο μέρος.* 1300 *άτομα δήλωσαν ότι προτιμούν διακοπές με οργανωμένη ομάδα. Επίσης,* 700 *άτομα δήλωσαν ότι προτιμούν οργανωμένες διακοπές στην Ελλάδα,* 500 *άτομα δήλωσαν ότι επιθυμούν οργανωμένες διακοπές σε κάποιο παραθαλάσσιο μέρος και* 1300 *άτομα δήλωσαν ότι επιθυμούν διακοπές σε κάποιο Ελληνικό παραθαλάσσιο μέρος. Τέλος,* 300 *άτομα δήλωσαν ότι επιθυμούν οργανωμένες διακοπές σε κάποιο Ελληνικό παραθαλάσσιο μέρος.*

- *i) Να βρεθεί ο αριθμός των ατόμων που επιθυμούν μη οργανωμένες διακοπές σε μη παραθαλάσσιο μέρος του εξωτερικού.*
- *ii) Να βρεθεί ο αριθμός των ατόμων που επιθυμούν οργανωμένες διακοπές στην Ελλάδα ή/και σε κάποιο παραθαλάσσιο μέρος.*
- *iii) Να βρεθεί ο αριθμός των ατόμων που επιθυμούν μη οργανωμένες διακοπές στην Ελλάδα ή/και σε κάποιο παραθαλάσσιο μέρος.*

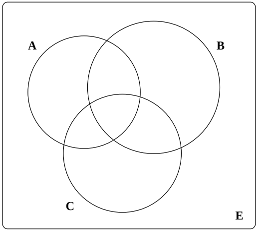
Έστω
E το σύνολο όλων των ατόμων.
A το σύνολο των ατόμων που προτιμούν διακοπές στην Ελλάδα.
B το σύνολο των ατόμων που προτιμούν διακοπές σε παραθαλάσσιο μέρος.
C το σύνολο των ατόμων που προτιμούν διακοπές με οργανωμένη ομάδα.
Γνωρίζουμε ότι $|E| = 3500$, $|A| = 2000$, $|B| = 1600$, $|C| = 1300$, $|A \cap B| = 1300$, $|A \cap C| = 700$, $|B \cap C| = 500$ και $|A \cap B \cap C| = 300$.

Θα απαντήσουμε στα ερωτήματα της άσκησης με τη βοήθεια του επόμενου διαγράμματος Venn.

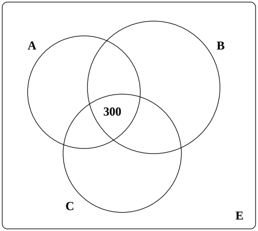


Κάθε μια από τις 8 περιοχές που ορίζονται στο διάγραμμα αντιστοιχεί σε κάποιο σύνολο της μορφής $A^* \cap B^* \cap C^*$, όπου X^* είναι είτε το X είτε το $\overline{X}$. Θα αρχίσουμε να υπολογίζουμε τους πληθαρίθμους κάθε περιοχής ξεκινώντας από την κεντρική περιοχή, έπειτα θα ασχοληθούμε με τις περιοχές που γειτονεύουν με την κεντρική. Στη συνέχεια, με τις περιοχές που γειτονεύουν με αυτές και τέλος με την εξωτερική περιοχή.

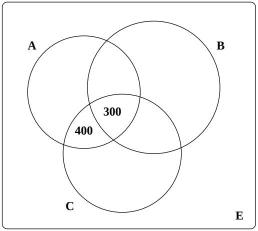
Προκειμένου να γίνει πιο κατανοητή η διαδικασία στα επόμενα σχήματα απεικονίζονται τα στάδια της συμπλήρωσης του διαγράμματος.



στάδιο 0

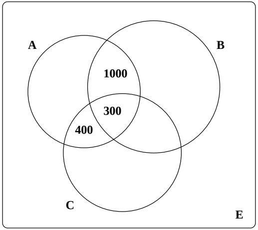


στάδιο 1

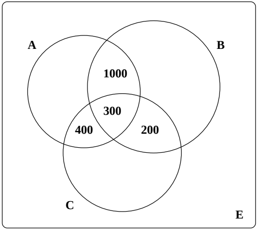


στάδιο 2

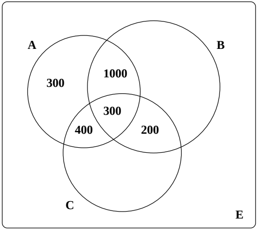
$|A \cap B \cap C| = 300$ (βλέπε στάδιο 1)
$|A \cap \overline{B} \cap C| = |A \cap C| - |A \cap B \cap C| = 700 - 300 = 400$ (βλέπε στάδιο 2).



στάδιο 3



στάδιο 4

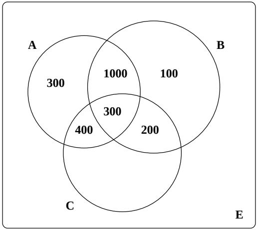


στάδιο 5

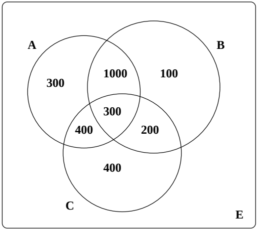
$|A \cap B \cap \overline{C}| = |A \cap B| - |A \cap B \cap C| = 1300 - 300 = 1000$ (βλέπε στάδιο 3).

$|\overline{A} \cap B \cap C| = |B \cap C| - |A \cap B \cap C| = 500 - 300 = 200$ (βλέπε στάδιο 4).

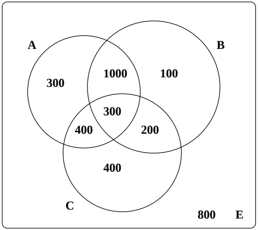
$|A \cap \overline{B} \cap \overline{C}| = |A| - |A \cap \overline{B} \cap C| - |A \cap B \cap \overline{C}| - |A \cap B \cap C| = 2000 - 400 - 1000 - 300 = 300.$ (βλέπε στάδιο 5).



στάδιο 6



στάδιο 7



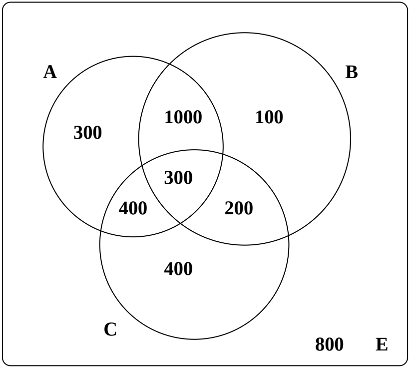
στάδιο 8

$|\overline{A} \cap B \cap \overline{C}| = |B| - |A \cap B \cap \overline{C}| - |\overline{A} \cap B \cap C| - |A \cap B \cap C| =$
$1600 - 1000 - 200 - 300 = 100$. (βλέπε στάδιο 6).

$|\overline{A} \cap \overline{B} \cap C| = |C| - |A \cap \overline{B} \cap C| - |\overline{A} \cap B \cap C| - |A \cap B \cap C| =$
$1300 - 400 - 200 - 300 = 400$. (βλέπε στάδιο 7).

$|\overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C}| = |E| - |A \cap \overline{B} \cap \overline{C}| - |\overline{A} \cap \overline{B} \cap C| - |\overline{A} \cap B \cap \overline{C}| - |\overline{A} \cap B \cap C| - |A \cap \overline{B} \cap C| - |A \cap B \cap \overline{C}| - |A \cap B \cap C| =$
$3500 - 300 - 400 - 100 - 200 - 400 - 1000 - 300 = 800$. (βλέπε στάδιο 8).

Όλες οι απαντήσεις που αφορούν τα παραπάνω στοιχεία μπορούν να βρεθούν εύκολα με τη βοήθεια του τελευταίου διαγράμματος:



i) Ο ζητούμενος αριθμός ισούται με τον πληθάριθμο $|E \setminus (A \cup B \cup C)| = |\overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C}| = 800$.

ii) Ο ζητούμενος αριθμός ισούται με τον πληθάριθμο $|C \cap (A \cup B)| = |A \cap \overline{B} \cap C| + |\overline{A} \cap B \cap C| + |A \cap B \cap C| = 400 + 200 + 300 = 900$.

iii) Ο ζητούμενος αριθμός ισούται με τον πληθάριθμο $|(A \cup B) \setminus C| = |A \cap \overline{B} \cap \overline{C}| + |A \cap B \cap \overline{C}| + |\overline{A} \cap B \cap \overline{C}| = 300 + 1000 + 100 = 1400$.

Άσκηση 13

Να βρεθεί πόσοι θετικοί ακέραιοι μικρότεροι του 70 δεν έχουν κοινούς διαιρέτες με το 70 (εκτός από την μονάδα).

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28
29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42
43	44	45	46	47	48	49	50	51	52	53	54	55	56
57	58	59	60	61	62	63	64	65	66	67	68	69	70

Επειδή $70 = 2 \cdot 5 \cdot 7$ έπεται ότι ένας θετικός ακέραιος αριθμός $n \in [70]$ έχει κοινό διαιρέτη με το 70 αν είναι πολλαπλάσιο ενός τουλάχιστον από τους αριθμούς 2, 5, 7.
Άρα, ο ζητούμενος αριθμός ισούται με το πλήθος των αριθμών του [70] που δεν είναι πολλαπλάσια ούτε του 2, ούτε του 3, ούτε του 7.

Έστω

M_2 το σύνολο των αριθμών του $[70]$ που είναι πολλαπλάσια του 2
M_5 το σύνολο των αριθμών του $[70]$ που είναι πολλαπλάσια του 5
M_7 το σύνολο των αριθμών του $[70]$ που είναι πολλαπλάσια του 7
Με αυτούς τους συμβολισμούς ο ζητούμενος αριθμός ισούται με

$$|\overline{M_2} \cap \overline{M_5} \cap \overline{M_7}|$$

Από την αρχή εγκλεισμού–αποκλεισμού έχουμε ότι

$$\begin{aligned}|\overline{M_2} \cap \overline{M_5} \cap \overline{M_7}| = |[70]| - |M_2| - |M_5| - |M_7| \\ + |M_2 \cap M_5| + |M_2 \cap M_7| + |M_5 \cap M_7| - |M_2 \cap M_5 \cap M_7|\end{aligned}$$

Ισχύει ότι

$$|M_2| = \lfloor \frac{70}{2} \rfloor = 35, |M_5| = \lfloor \frac{70}{5} \rfloor = 14, |M_7| = \lfloor \frac{70}{7} \rfloor = 10$$

$$|M_2 \cap M_5| = \lfloor \frac{70}{10} \rfloor = 7, |M_2 \cap M_7| = \lfloor \frac{70}{14} \rfloor = 5, |M_5 \cap M_7| = \lfloor \frac{70}{35} \rfloor = 2$$

$$|M_2 \cap M_5 \cap M_7| = 1$$

οπότε $|\overline{M_2} \cap \overline{M_5} \cap \overline{M_7}| = 70 - 35 - 14 - 10 + 7 + 5 + 2 - 1 = 24.$

Άσκηση 14

Να βρεθεί με πόσους τρόπους μπορούν να μοιρασθούν 7 διαφορετικά χαρτιά σε 4 παίχτες έτσι ώστε κάθε παίχτης να λάβει τουλάχιστον ένα χαρτί.

Επειδή είναι ευκολότερο να μετρήσουμε τους τρόπους να μην λάβουν κάποιοι παίχτες κανένα χαρτί, θεωρούμε τα παρακάτω σύνολα:
Έστω το σύνολο E όλων των τρόπων να μοιρασθούν τα 7 χαρτιά στους 4 παίχτες χωρίς περιορισμούς.
Επίσης, έστω D_1, D_2, D_3 και D_4 τα σύνολα των τρόπων να μοιρασθούν τα 7 χαρτιά έτσι ώστε ο πρώτος, ο δεύτερος, ο τρίτος και ο τέταρτος παίχτης να μην λάβουν κανένα χαρτί αντίστοιχα.
Τότε, τα σύνολα $\overline{D_1}$, $\overline{D_2}$, $\overline{D_3}$ και $\overline{D_4}$ είναι αντίστοιχα οι τρόποι να μοιρασθούν τα 7 χαρτιά έτσι ώστε ο πρώτος, ο δεύτερος, ο τρίτος και ο τέταρτος παίχτης να λάβει τουλάχιστον ένα χαρτί αντίστοιχα.
Άρα, το σύνολο $\overline{D_1} \cap \overline{D_2} \cap \overline{D_3} \cap \overline{D_4}$ περιέχει τους τρόπους να μοιρασθούν τα 7 χαρτιά στους 4 παίχτες έτσι ώστε κάθε παίχτης να λάβει τουλάχιστον ένα χαρτί.

Από την αρχή εγκλεισμού - αποκλεισμού έχουμε ότι

$$|\overline{D_1} \cap \overline{D_2} \cap \overline{D_3} \cap \overline{D_4}| = |E| - |D_1| - |D_2| - |D_3| - |D_4|$$
$$+ |D_1 \cap D_2| + |D_1 \cap D_3| + |D_1 \cap D_4| + |D_2 \cap D_3| + |D_2 \cap D_4| + |D_3 \cap D_4|$$
$$- |D_1 \cap D_2 \cap D_3| - |D_1 \cap D_2 \cap D_4| - |D_1 \cap D_3 \cap D_4| - |D_2 \cap D_3 \cap D_4|$$
$$+ |D_1 \cap D_2 \cap D_3 \cap D_4|$$

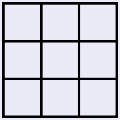
Από την αρχή του γινομένου προκύπτει ότι $|E| = 4^7$ αφού για κάθε ένα από τα 7 χαρτιά έχουμε 4 επιλογές. Αντίστοιχα,
$|D_1| = |D_2| = |D_3| = |D_4| = 3^7$.
$|D_1 \cap D_2| = |D_1 \cap D_3| = |D_1 \cap D_4| = |D_2 \cap D_3| = |D_2 \cap D_4| = |D_3 \cap D_4| = 2^7$.
$|D_1 \cap D_2 \cap D_3| = |D_1 \cap D_2 \cap D_4| = |D_1 \cap D_3 \cap D_4| = |D_2 \cap D_3 \cap D_4| = 1^7$.
$|D_1 \cap D_2 \cap D_3 \cap D_4| = 0$.
Αντικαθιστώντας, έχουμε ότι

$$\begin{aligned} |\overline{D_1} \cap \overline{D_2} \cap \overline{D_3} \cap \overline{D_4}| &= 4^7 - 4 \cdot 3^7 + 6 \cdot 2^7 - 4 \cdot 1^7 + 0 \\ &= 16384 - 8748 + 768 - 4 = 8400 \end{aligned}$$

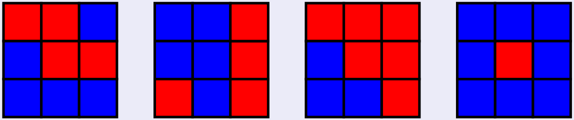
Άρα, υπάρχουν 8400 τρόποι να μοιρασθούν τα 7 χαρτιά στους 4 παίχτες έτσι ώστε κάθε παίχτης να λάβει τουλάχιστον ένα χαρτί.

Άσκηση 15

Κάθε μοναδιαίο τετράγωνο του επόμενου σχήματος χρωματίζεται κόκκινο ή μπλε.

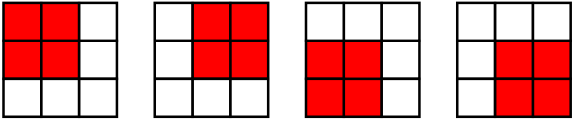


Για παράδειγμα,



Με πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορεί να χρωματισθεί το παραπάνω σχήμα έτσι ώστε να περιέχει τουλάχιστον ένα κόκκινο τετράγωνο με διαστάσεις 2 επί 2?

Παρατηρούμε ότι στο σχήμα υπάρχουν 4 πιθανές θέσεις εμφάνισης ενός κόκκινου τετραγώνου με διαστάσεις 2×2.

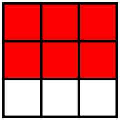


C_1 C_2 C_3 C_4

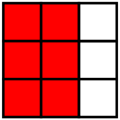
Έστω C_1, C_2, C_3, C_4 το σύνολο των χρωματισμών που περιέχουν ένα κόκκινο τετράγωνο με διαστάσεις 2×2 στην πάνω αριστερή, πάνω δεξιά, κάτω αριστερή και κάτω δεξιά γωνία του σχήματος αντίστοιχα.
Οι χρωματισμοί που περιέχουν τουλάχιστον ένα κόκκινο τετράγωνο με διαστάσεις 2×2 είναι το σύνολο $C_1 \cup C_2 \cup C_3 \cup C_4$.
Από την αρχή εγκλεισμού - αποκλεισμού έχουμε ότι

$$
\begin{aligned}
&|C_1 \cup C_2 \cup C_3 \cup C_4| = |C_1| + |C_2| + |C_3| + |C_4| \\
&- |C_1 \cap C_2| - |C_1 \cap C_3| - |C_1 \cap C_4| - |C_2 \cap C_3| - |C_2 \cap C_4| - |C_3 \cap C_4| \\
&+ |C_1 \cap C_2 \cap C_3| + |C_1 \cap C_2 \cap C_4| + |C_1 \cap C_3 \cap C_4| + |C_2 \cap C_3 \cap C_4| \\
&- |C_1 \cap C_2 \cap C_3 \cap C_4|
\end{aligned}
$$

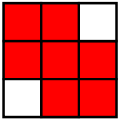
Τα σύνολα $C_1 \cap C_2$, $C_1 \cap C_3$, $C_1 \cap C_4$, $C_2 \cap C_3$, $C_2 \cap C_4$, $C_3 \cap C_4$ αποτελούνται από τους χρωματισμούς οι οποίοι περιέχουν έχουν κόκκινα μοναδιαία τετράγωνα στις επόμενες θέσεις, ενώ τα λευκά τετράγωνα μπορούν να έχουν οποιαδήποτε από τα δύο χρώματα.



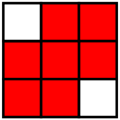
$C_1 \cap C_2$



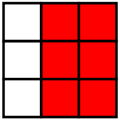
$C_1 \cap C_3$



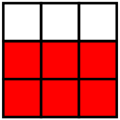
$C_1 \cap C_4$



$C_2 \cap C_3$

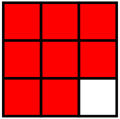


$C_2 \cap C_4$

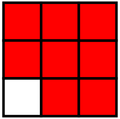


$C_3 \cap C_4$

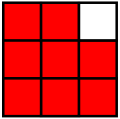
Αντίστοιχα, τα σύνολα $C_1 \cap C_2 \cap C_3$, $C_1 \cap C_2 \cap C_4$, $C_1 \cap C_3 \cap C_4$, $C_2 \cap C_3 \cap C_4$, $C_1 \cap C_2 \cap C_3 \cap C_4$ αποτελούνται από τους χρωματισμούς της μορφής:



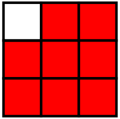
$C_1 \cap C_2 \cap C_3$



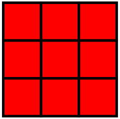
$C_1 \cap C_2 \cap C_4$



$C_1 \cap C_3 \cap C_4$



$C_2 \cap C_3 \cap C_4$



$C_1 \cap C_2 \cap C_3 \cap C_4$

Από την πολλαπλασιαστική αρχή προκύπτει ότι
$|C_1| = |C_2| = |C_3| = |C_4| = 2^5$,
$|C_1 \cap C_2| = |C_1 \cap C_3| = |C_2 \cap C_4| = |C_3 \cap C_4| = 2^3$,
$|C_1 \cap C_4| = |C_2 \cap C_3| = 2^2$,
$|C_1 \cap C_2 \cap C_3 = C_1 \cap C_2 \cap C_4| = |C_1 \cap C_3 \cap C_4| = |C_2 \cap C_3 \cap C_4| = 2^1$,
$|C_1 \cap C_2 \cap C_3 \cap C_4| = 1$.
Αντικαθιστώντας έχουμε ότι

$$\begin{aligned} |C_1 \cup C_2 \cup C_3 \cup C_4| &= 4 \cdot 2^5 - (4 \cdot 2^3 + 2 \cdot 2^2) + 4 \cdot 2^1 - 1 \cdot 1 \\ &= 128 - 40 + 8 - 1 = 95. \end{aligned}$$

Άρα, από τους $2^9 = 512$ διαφορετικούς χρωματισμούς του σχήματος, οι 95 χρωματισμοί περιέχουν τουλάχιστον ένα κόκκινο τετράγωνο με διαστάσεις 2×2.