Σύνολα - Σχέσεις - Απεικονίσεις - Επαγωγή

Μαθηματικά των Υπολογιστών

2023–2024

Σύνολα

Άσκηση 1 (Ταυτότητες συνόλων)

Έστω E *ένα μη κενό σύνολο και* $A, B, C \subseteq E$. *Να δειχθεί ότι*

i) $A \setminus B = A \cap \overline{B}$. *(Τύπος διαφοράς συνόλων.)*

ii) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$. *(Κανόνας De Morgan για το συμπλήρωμα της ένωσης.)*

iii) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$. *(Επιμεριστική ιδιότητα της τομής ως προς την ένωση.)*

iv) $A = (A \cap B) \cup (A \cap \overline{B})$. *(Διαμέριση του* A *ως προς την τομή του με τα* B *και* $\overline{B}$*.)*

v) $A \cap (B \setminus C) = (A \cap B) \setminus (A \cap C)$. *(Επιμεριστική ιδιότητα της τομής ως προς την διαφορά.)*

Σύνολα

Λύση της (i) με τη χρήση ισοδυναμιών.

Θέλουμε να δείξουμε ότι $A \setminus B = A \cap \overline{B}$.
Για κάθε $x \in A \setminus B$ ισχύει ότι

$$\begin{aligned} x \in A \setminus B &\Leftrightarrow x \in A \text{ και } x \notin B \\ &\Leftrightarrow x \in A \text{ και } x \in \overline{B} \\ &\Leftrightarrow x \in A \cap \overline{B}, \end{aligned}$$

οπότε, επειδή χρησιμοποιήθηκαν παντού ισοδυναμίες,

$$A \setminus B = A \cap \overline{B}. \qquad \square$$

Λύση της (*ii*) με τη χρήση ισοδυναμιών.

Θέλουμε να δείξουμε ότι $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$.

$$\begin{aligned} x \in \overline{A \cup B} &\Leftrightarrow x \notin A \cup B \\ &\Leftrightarrow x \notin A \text{ και } x \notin B \\ &\Leftrightarrow x \in \overline{A} \text{ και } x \in \overline{B} \\ &\Leftrightarrow x \in \overline{A} \cap \overline{B} \end{aligned}$$

οπότε, επειδή χρησιμοποιήθηκαν παντού ισοδυναμίες,

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}.$$

□

Σύνολα

Λύση της (*iii*) με τη χρήση πινάκων.

Θέλουμε να δείξουμε ότι $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.
Τα A, B, C είναι υποσύνολα του E.
Πού μπορεί να ανήκει κάποιο στοιχείο $x \in E$;
Σημειώνουμε 1 αν το x ανήκει στο σύνολο και 0 αλλιώς.

A	B	C	$B \cup C$	$A \cap (B \cup C)$	$A \cap B$	$A \cap C$	$(A \cap B) \cup (A \cap C)$
1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	1	1	1	0	1
1	0	1	1	1	0	1	1
1	0	0	0	0	0	0	0
0	1	1	1	0	0	0	0
0	1	0	1	0	0	0	0
0	0	1	1	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0

Οι στήλες $A \cap (B \cup C)$ και $(A \cap B) \cup (A \cap C)$ είναι ίδιες. Άρα, τα σύνολα αυτά έχουν τα ίδια στοιχεία του E, δηλαδή είναι ίσα. □

Σύνολα

Παρατήρηση

Αν σε ένα τύπο εμφανίζονται:
2 διαφορετικά σύνολα, ο πίνακας έχει $2^2 = 4$ γραμμές (περιπτώσεις),
3 διαφορετικά σύνολα, ο πίνακας έχει $2^3 = 8$ γραμμές (περιπτώσεις),
n διαφορετικά σύνολα, ο πίνακας έχει 2^n γραμμές (περιπτώσεις).
Η μέθοδος των πινάκων είναι πρακτική όταν σε ένα τύπο εμφανίζονται το πολύ 4 διαφορετικά σύνολα.

Σύνολα

Λύση της (iv) με τη χρήση πινάκων.

Θέλουμε να δείξουμε ότι $A = (A \cap B) \cup (A \cap \overline{B})$.

A	B	$\overline{B}$	$A \cap B$	$A \cap \overline{B}$	$(A \cap B) \cup (A \cap \overline{B})$
1	1	0	1	0	1
1	0	1	0	1	1
0	1	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0

Οι στήλες των A και $(A \cap B) \cup (A \cap \overline{B})$ είναι ίδιες.
Άρα, τα σύνολα A και $(A \cap B) \cup (A \cap \overline{B})$ περιέχουν τα ίδια στοιχεία του E, δηλαδή είναι ίσα. $\square$

Λύση της (v) με τη χρήση ιδιοτήτων.

Θέλουμε να δείξουμε ότι $A \cap (B \setminus C) = (A \cap B) \setminus (A \cap C)$.
Χρησιμοποιώντας τις βασικές ιδιότητες των πράξεων συνόλων, έχουμε τις επόμενες ισότητες:

$$
\begin{aligned}
(A \cap B) \setminus (A \cap C) &= (A \cap B) \cap (\overline{A \cap C}) \\
&= (A \cap B) \cap (\overline{A} \cup \overline{C}) \\
&= ((A \cap B) \cap \overline{A}) \cup ((A \cap B) \cap \overline{C}) \\
&= \varnothing \cup (A \cap B \cap \overline{C}) \\
&= A \cap (B \cap \overline{C}) \\
&= A \cap (B \setminus C).
\end{aligned}
$$

□

Λύση της (v) με τη μέθοδο διπλού εγκλεισμού.

Για να δείξουμε ότι δύο σύνολα A, B είναι ίσα, αρκεί να δείξουμε ότι $A \subseteq B$ και $B \subseteq A$.
Θέλουμε να δείξουμε ότι $A \cap (B \setminus C) = (A \cap B) \setminus (A \cap C)$.
Έστω $x \in A \cap (B \setminus C)$. Τότε,

$$\begin{aligned} x \in A \cap (B \setminus C) &\Leftrightarrow x \in A \text{ και } x \in B \setminus C \\ &\Leftrightarrow x \in A \text{ και } x \in B \text{ και } x \notin C \\ &\Leftrightarrow x \in A \cap B \text{ και } x \notin C \\ &\overset{1}{\Rightarrow} x \in A \cap B \text{ και } x \notin A \cap C \\ &\Rightarrow x \in (A \cap B) \setminus (A \cap C). \end{aligned}$$

Άρα, $A \cap (B \setminus C) \subseteq (A \cap B) \setminus (A \cap C)$. □

[1] Αν $x \notin C$, τότε $x \notin A \cap C$. (Το αντίστροφο, γενικά, δεν ισχύει.)

Σύνολα

Λύση της (v) με τη μέθοδο διπλού εγκλεισμού (συνέχεια).

Έστω $x \in (A \cap B) \setminus (A \cap C)$. Τότε

$$\begin{aligned}
x \in (A \cap B) \setminus (A \cap C) &\Leftrightarrow x \in A \cap B \text{ και } x \notin A \cap C \\
&\Leftrightarrow x \in B \text{ και } x \in A \text{ και } x \notin A \cap C \\
&\overset{2}{\Rightarrow} x \in B \text{ και } x \in A \text{ και } x \notin C \\
&\Leftrightarrow x \in A \text{ και } x \in B \text{ και } x \notin C \\
&\Leftrightarrow x \in A \text{ και } x \in B \setminus C \\
&\Leftrightarrow x \in A \cap (B \setminus C)
\end{aligned}$$

Άρα, $(A \cap B) \setminus (A \cap C) \subseteq A \cap (B \setminus C)$.
Επομένως,

$$A \cap (B \setminus C) = (A \cap B) \setminus (A \cap C). \qquad \square$$

[2] Αν $x \in A$ και $x \notin A \cap C$, τότε $x \in A$ και $x \notin C$.

Σύνολα

Άσκηση 2

Έστω A, B μη κενά σύνολα. Να δειχθεί ότι $\mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B) = \mathcal{P}(A \cap B)$.

Λύση.

Για κάθε $X \in \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$ ισχύει ότι

$$\begin{aligned} X \in \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B) &\Leftrightarrow X \in \mathcal{P}(A) \text{ και } X \in \mathcal{P}(B) \\ &\Leftrightarrow X \subseteq A \text{ και } X \subseteq B \\ &\Leftrightarrow X \subseteq A \cap B \\ &\Leftrightarrow X \in \mathcal{P}(A \cap B), \end{aligned}$$

οπότε, επειδή χρησιμοποιήθηκαν παντού ισοδυναμίες,

$$\mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B) = \mathcal{P}(A \cap B).$$

□

Άσκηση 3

Έστω A, B μη κενά σύνολα. Να εξετασθεί αν ισχύει η ισότητα $\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B) = \mathcal{P}(A \cup B)$.

Λύση.

Θα δείξουμε ότι η ισότητα αυτή δεν ισχύει πάντα, με ένα αντιπαράδειγμα. Θεωρούμε τα σύνολα $A = \{1\}$ και $B = \{2\}$, οπότε

$$\mathcal{P}(A) = \{\emptyset, \{1\}\} \qquad \text{και} \qquad \mathcal{P}(B) = \{\emptyset, \{2\}\}.$$

Επομένως, είναι $\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}\}$.
Επιπλέον, είναι $A \cup B = \{1, 2\}$, οπότε

$$\mathcal{P}(A \cup B) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\},$$

δηλαδή, $\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B) \neq \mathcal{P}(A \cup B)$. $\square$

Σύνολα

Άσκηση 4

Να εξετασθεί αν κάθε μια από τις παρακάτω προτάσεις είναι σωστή ή λάθος:

1. $|A \cup B| = |A| + |B|$.

Σύνολα

Άσκηση 4

Να εξετασθεί αν κάθε μια από τις παρακάτω προτάσεις είναι σωστή ή λάθος:

1. $|A \cup B| = |A| + |B|$.
   Λάθος. Ισχύει μόνο όταν $A \cap B = \varnothing$. *Για παράδειγμα,* $A = \{1, 2\}$ *και* $B = \{2, 3\}$, *τότε το πρώτο μέλος ισούται με 3 ενώ το δεύτερο με 4.*

Σύνολα

Άσκηση 4

Να εξετασθεί αν κάθε μια από τις παρακάτω προτάσεις είναι σωστή ή λάθος:

1. $|A \cup B| = |A| + |B|$.
   Λάθος. Ισχύει μόνο όταν $A \cap B = \varnothing$. *Για παράδειγμα,* $A = \{1, 2\}$ *και* $B = \{2, 3\}$, *τότε το πρώτο μέλος ισούται με 3 ενώ το δεύτερο με 4.*
2. $|A \triangle B| = |A \setminus B| + |B \setminus A|$.

Σύνολα

Άσκηση 4

Να εξετασθεί αν κάθε μια από τις παρακάτω προτάσεις είναι σωστή ή λάθος:

1. $|A \cup B| = |A| + |B|$.
   Λάθος. Ισχύει μόνο όταν $A \cap B = \varnothing$. *Για παράδειγμα,* $A = \{1, 2\}$ *και* $B = \{2, 3\}$, *τότε το πρώτο μέλος ισούται με 3 ενώ το δεύτερο με 4.*
2. $|A \triangle B| = |A \setminus B| + |B \setminus A|$.
   Σωστό. Είναι $A \triangle B = A \setminus B \cup B \setminus A$ *και τα σύνολα* $A \setminus B$ *και* $B \setminus A$ *είναι ξένα.*

Σύνολα

Άσκηση 4

Να εξετασθεί αν κάθε μια από τις παρακάτω προτάσεις είναι σωστή ή λάθος:

1. $|A \cup B| = |A| + |B|$.
   Λάθος. Ισχύει μόνο όταν $A \cap B = \varnothing$. *Για παράδειγμα,* $A = \{1, 2\}$ *και* $B = \{2, 3\}$, *τότε το πρώτο μέλος ισούται με 3 ενώ το δεύτερο με 4.*
2. $|A \triangle B| = |A \setminus B| + |B \setminus A|$.
   Σωστό. Είναι $A \triangle B = A \setminus B \cup B \setminus A$ *και τα σύνολα* $A \setminus B$ *και* $B \setminus A$ *είναι ξένα.*
3. $|\{\{\varnothing, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}\}, \varnothing, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}\}| = 6$.

Σύνολα

Άσκηση 4

Να εξετασθεί αν κάθε μια από τις παρακάτω προτάσεις είναι σωστή ή λάθος:

1. $|A \cup B| = |A| + |B|$.
   Λάθος. Ισχύει μόνο όταν $A \cap B = \varnothing$. *Για παράδειγμα,* $A = \{1, 2\}$ *και* $B = \{2, 3\}$, *τότε το πρώτο μέλος ισούται με 3 ενώ το δεύτερο με 4.*
2. $|A \triangle B| = |A \setminus B| + |B \setminus A|$.
   Σωστό. Είναι $A \triangle B = A \setminus B \cup B \setminus A$ *και τα σύνολα* $A \setminus B$ *και* $B \setminus A$ *είναι ξένα.*
3. $|\{\{\varnothing, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}\}, \varnothing, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}\}| = 6$.
   Λάθος. Το σύνολο περιέχει 3 στοιχεία, τα $\{\varnothing, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}\}$, $\varnothing$ *και* $\{\varnothing, \{\varnothing\}\}$.

Άσκηση 5

Να εξετασθεί αν κάθε μια από τις παρακάτω προτάσεις είναι σωστή ή λάθος:

1. *Αν* $|A| = 5$, $|B| = 7$ *και* $|A \cup B| = 12$, *τα σύνολα* A, B *είναι ξένα.*

Άσκηση 5

Να εξετασθεί αν κάθε μια από τις παρακάτω προτάσεις είναι σωστή ή λάθος:

1. *Αν* $|A| = 5$, $|B| = 7$ *και* $|A \cup B| = 12$, *τα σύνολα* A, B *είναι ξένα.*
   Σωστό. Είναι $|A \cap B| = |A| + |B| - |A \cup B| = 5 + 7 - 12 = 0$.

Άσκηση 5

Να εξετασθεί αν κάθε μια από τις παρακάτω προτάσεις είναι σωστή ή λάθος:

1. *Αν* $|A| = 5$, $|B| = 7$ *και* $|A \cup B| = 12$, *τα σύνολα* A, B *είναι ξένα.*
   Σωστό. Είναι $|A \cap B| = |A| + |B| - |A \cup B| = 5 + 7 - 12 = 0$.
2. $|[n+2]| = |[n]| + 2$.

Σύνολα

Άσκηση 5

Να εξετασθεί αν κάθε μια από τις παρακάτω προτάσεις είναι σωστή ή λάθος:

1. *Αν* $|A| = 5$, $|B| = 7$ *και* $|A \cup B| = 12$, *τα σύνολα* A, B *είναι ξένα.*
   Σωστό. Είναι $|A \cap B| = |A| + |B| - |A \cup B| = 5 + 7 - 12 = 0$.
2. $|[n+2]| = |[n]| + 2$.
   Σωστό. Είναι $[n] = \{1, 2, \ldots, n\}$, *οπότε* $|[n]| = n$ *και*
   $|[n+2]| = n + 2$.

Σύνολα

Άσκηση 6

Για δύο σύνολα A, B δίνονται

$$|B| = 6, \quad |B \setminus A| = 4 \quad \textit{και} \quad |A \cup B| = 11.$$

Να υπολογισθούν οι πληθάριθμοι $|A|$ και $|A \cap B|$.

Λύση.

Είναι

$$|B| = |B \cap A| + |B \cap \overline{A}| = |B \cap A| + |B \setminus A| \Rightarrow |A \cap B| = |B| - |B \setminus A| = 6 - 4 = 2.$$

και

$$11 = |A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B| = |A| + 6 - 2,$$

επομένως, $|A| = 11 - 4 = 7$. $\square$

Σχέσεις

Υπενθυμίζεται ότι μια σχέση R στο σύνολο E είναι απλά ένα υποσύνολο του καρτεσιανού γινομένου

$$E \times E := \{(x, y) : x, y \in E\},$$

δηλαδή κάθε υποσύνολο $R \subseteq E \times E$ είναι μια σχέση στο E.

Ορισμός (Σχέση ισοδυναμίας)

Μια σχέση R στο E ονομάζεται **ισοδυναμία** όταν ικανοποιεί τις ιδιότητες:

(i) $\alpha R \alpha$, για κάθε $\alpha \in E$ (**ανακλαστική**).

(ii) $\alpha R \beta \Rightarrow \beta R \alpha$, για κάθε $\alpha, \beta \in E$ (**συμμετρική**).

(iii) ($\alpha R \beta$ και $\beta R \gamma$) $\Rightarrow \alpha R \gamma$, για κάθε $\alpha, \beta, \gamma \in E$ (**μεταβατική**).

Συνήθως η σχέση ισοδυναμίας σημειώνεται με $\sim$ αντί R.

Άσκηση 7

Στο σύνολο $\mathbb{N}$ *ορίζουμε μια σχέση* R *ως εξής:*

$$xRy \Leftrightarrow \text{ Υπάρχει } k \in Z \text{ ώστε } y - x = 3k.$$

i) Να δειχθεί ότι η σχέση R *είναι σχέση ισοδυναμίας στο* $\mathbb{N}$.

ii) Να βρεθεί η κλάση ισοδυναμίας του αριθμού 2.

iii) Να βρεθεί το σύνολο πηλίκο της σχέσης R.

Για παράδειγμα,

$$2R5, \text{ διότι } 5 - 2 = 3 \cdot 1$$

$$2R8, \text{ διότι } 8 - 2 = 3 \cdot 2$$

$$8R2, \text{ διότι } 2 - 8 = 3 \cdot (-2)$$

$$3\not{R}7, \text{ διότι δεν υπάρχει } k \in \mathbb{Z} \text{ ώστε } 7 - 3 = 4 = 3k.$$

Λύση του (i).

Ισχύει η ανακλαστική ιδιότητα. Πράγματι, για κάθε $x \in \mathbb{N}$, ισχύει ότι $x - x = 0 = 3 \cdot 0$, άρα ικανοποιείται ο ορισμός με $k = 0$, δηλαδή xRx.

Ισχύει η συμμετρική ιδιότητα. Πράγματι, αν $x, y \in \mathbb{N}$ με xRy, τότε υπάρχει $k \in \mathbb{Z}$ ώστε $y - x = 3k$. Επομένως, $x - y = 3(-k)$, και επειδή, $-k \in \mathbb{Z}$, έπεται ότι yRx.

Ισχύει η μεταβατική ιδιότητα. Πράγματι, αν $x, y, z \in \mathbb{N}$ με xRy και yRz, τότε υπάρχουν $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$ ώστε

$$y - x = 3k_1 \qquad \text{και} \qquad z - y = 3k_2.$$

Προσθέτοντας κατά μέλη προκύπτει ότι $z - x = 3(k_1 + k_2)$ και επειδή $k_1 + k_2 \in \mathbb{Z}$, έπεται ότι xRz.

Από τα προηγούμενα προκύπτει ότι η R είναι σχέση ισοδυναμίας. □

Σχέσεις

Λύση του (*ii*).

Η κλάση ισοδυναμίας του 2 είναι εξ ορισμού το σύνολο

$$\begin{aligned} C_2 &= \{x \in \mathbb{N} : 2Rx\} \\ &= \{x \in \mathbb{N} : x - 2 = 3k, k \in \mathbb{Z}\} \\ &= \{3k + 2 \in \mathbb{N} : k \in \mathbb{Z}\} \\ &= \{3k + 2 \in \mathbb{N} : k \in \mathbb{N}\} \\ &= \{2, 5, 8, 11, 14, \dots\}. \end{aligned}$$

□

Παρατηρήστε ότι η κλάση C_5 του 5 ταυτίζεται με την C_2. Πράγματι,

$$\begin{aligned} C_5 = \{x \in \mathbb{N} : 5Rx\} &= \{x \in \mathbb{N} : x - 5 = 3k, k \in \mathbb{Z}\} \\ &= \{x \in \mathbb{N} : x - 2 = 3(k+1), k \in \mathbb{Z}\} = C_2 \end{aligned}$$

Το ίδιο συμβαίνει και για τις κλάσεις των στοιχείων $5, 8, 11, \dots$ που ανήκουν στην C_2, δηλαδή $C_2 = C_5 = C_8 = C_{11} = \cdots$.

Σχέσεις

Λύση του (*iii*).

Το σύνολο C_2 αποτελεί μια κλάση του συνόλου πηλίκου $\mathbb{N}/_R$. Επειδή $C_2 \neq \mathbb{N}$, υπάρχουν και άλλες κλάσεις.
Διαλέγουμε ένα στοιχείο που δεν ανήκει στο C_2. Για παράδειγμα, το 1.

$$\begin{aligned} C_1 &= \{x \in \mathbb{N} : 1Rx\} = \{x \in \mathbb{N} : x - 1 = 3k, k \in \mathbb{Z}\} \\ &= \{3k + 1 \in \mathbb{N} : k \in \mathbb{Z}\} = \{1, 4, 7, 10, 13, \dots\} \end{aligned}$$

Επειδή $C_1 \cup C_2 \neq \mathbb{N}$, υπάρχει και άλλη κλάση στην σχέση R.
Διαλέγουμε ένα στοιχείο που δεν ανήκει στο $C_1 \cup C_2$. Για παράδειγμα, το 3.

$$\begin{aligned} C_3 &= \{x \in \mathbb{N} : 3Rx\} = \{x \in \mathbb{N} : x - 3 = 3k, k \in \mathbb{Z}\} \\ &= \{3k + 3 \in \mathbb{N} : k \in \mathbb{Z}\} = \{0, 3, 6, 9, 12, \dots\} \end{aligned}$$

Επειδή $C_1 \cup C_2 \cup C_3 = \mathbb{N}$, δεν υπάρχουν άλλες κλάσεις, οπότε $\mathbb{N}/_R = \{C_1, C_2, C_3\}$. $\square$

Το σύνολο πηλίκο $\mathbb{N}/_R$ της προηγούμενης άσκησης μπορεί να προσδιορισθεί πιο απλά, βάσει των επόμενων παρατηρήσεων:
Ο ορισμός της σχέσης R:

$$xRy \Leftrightarrow y - x = 3k, k \in \mathbb{Z},$$

υπονοεί ότι τα x και y σχετίζονται (μέσω της R) ανν η (απόλυτη) διαφορά τους είναι πολλαπλάσιο του 3. Εφόσον τα x και y είναι φυσικοί, αυτό μπορεί να συμβεί μόνο στις εξής 3 περιπτώσεις:

$x = 3n$ και $y = 3m$, για κάποια $n, m \in \mathbb{N}$.

$x = 3n + 1$ και $y = 3m + 1$, για κάποια $n, m \in \mathbb{N}$.

$x = 3n + 2$ και $y = 3m + 2$, για κάποια $n, m \in \mathbb{N}$.

Οι τρεις αυτές περιπτώσεις αντιστοιχούν στις 3 κλάσεις $C_0 = C_3$, C_1 και C_2, διότι αν τα x και y δεν ανήκουν στην ίδια περίπτωση, τότε δεν σχετίζονται και επιπλέον δεν υπάρχουν άλλες περιπτώσεις για έναν φυσικό αριθμό.

Άσκηση 8

Έστω R μια σχέση στο $\mathbb{Z}$ με $xRy \Leftrightarrow x^2 - y^2 = 5k$ για κάποιο $k \in \mathbb{Z}$. Να δειχθεί ότι η σχέση R είναι σχέση ισοδυναμίας.

Λύση.

Για κάθε $a \in \mathbb{Z}$ ισχύει $a^2 - a^2 = 0 = 5 \cdot 0$, όπου $0 \in \mathbb{Z}$, άρα aRa, δηλαδή η R είναι ανακλαστική.
Έστω $a, b \in \mathbb{Z}$ με aRb. Τότε υπάρχει $k \in \mathbb{Z}$ ώστε $a^2 - b^2 = 5k$, οπότε $b^2 - a^2 = 5(-k)$, όπου $-k \in \mathbb{Z}$, άρα bRa, δηλαδή η σχέση R είναι συμμετρική.
Έστω $a, b, c \in \mathbb{Z}$ με aRb και bRc. Τότε υπάρχουν $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$ με $a^2 - b^2 = 5k_1$ και $b^2 - c^2 = 5k_2$. Προσθέτοντας κατά μέλη προκύπτει ότι $a^2 - c^2 = 5(k_1 + k_2)$, όπου $k_1 + k_2 \in \mathbb{Z}$, άρα aRc, δηλαδή η σχέση R είναι μεταβατική.
Επομένως, η σχέση R είναι σχέση ισοδυναμίας στο $\mathbb{Z}$. $\square$

Ορισμός (Σχέση μερικής διάταξης)

Μια σχέση R στο E ονομάζεται (**μερική**) **διάταξη** όταν ικανοποιεί τις ιδιότητες:

(i) $\alpha R \alpha$, για κάθε $\alpha \in E$ (**ανακλαστική**).

(ii) $\alpha R \beta$ και $\beta R \alpha \Longrightarrow \alpha = \beta$, για κάθε $\alpha, \beta \in E$ (**αντισυμμετρική**).

(iii) $\alpha R \beta$ και $\beta R \gamma \Longrightarrow \alpha R \gamma$, για κάθε $\alpha, \beta, \gamma \in E$ (**μεταβατική**).

Συνήθως η σχέση διάταξης σημειώνεται με $\leq$.

Η διάταξη ονομάζεται **ολική** ανν ικανοποιεί την ιδιότητα

$$\alpha \leq \beta \text{ ή } \beta \leq \alpha, \text{ για κάθε } \alpha, \beta \in E.$$

Άσκηση 9 (Μερική διάταξη διαιρετότητας)

Στο σύνολο $\mathbb{N}^*$, ορίζουμε την σχέση διαιρετότητας $\mid$ ως εξής

$$\begin{aligned} x \mid y &\Leftrightarrow x \text{ διαιρεί τον } y \\ &\Leftrightarrow \text{υπάρχει } k \in \mathbb{N}^* \text{ ώστε } y = kx. \end{aligned}$$

i) *Να δειχθεί ότι η σχέση διαιρετότητας $\mid$ είναι σχέση μερικής διάταξης στο $\mathbb{N}^*$.*

ii) *Είναι η σχέση διαιρετότητας $\mid$ σχέση ολικής διάταξης στο $\mathbb{N}^*$;*

Σχέσεις

Λύση του (i).

(Ανακλαστική ιδιότητα.) Για κάθε $x \in \mathbb{N}^*$ ισχύει ότι $x = 1 \cdot x$, άρα $x \mid x$.

(Αντισυμμετρική ιδιότητα.) Θεωρούμε $x, y \in \mathbb{N}^*$ με $x \mid y$ και $y \mid x$. Τότε, υπάρχουν $k_1, k_2 \in \mathbb{N}^*$ ώστε $y = k_1 x$ και $x = k_2 y$, οπότε $y = k_1 k_2 y$ και

$$y = k_1 k_2 y \Rightarrow k_1 k_2 = 1 \Rightarrow k_1 = k_2 = 1 \Rightarrow x = y.$$

(Μεταβατική ιδιότητα.) Θεωρούμε $x, y, z \in \mathbb{N}^*$ με $x \mid y$ και $y \mid z$. Τότε, υπάρχουν $k_1, k_2 \in \mathbb{N}^*$ ώστε $y = k_1 x$ και $z = k_2 y$, οπότε $z = k_2 k_1 x$. Επειδή $k_2 k_1 \in \mathbb{N}^*$ έπεται ότι $x \mid z$.

Κατόπιν τούτων, η σχέση $\mid$ είναι σχέση μερικής διάταξης στο $\mathbb{N}^*$. $\square$

Σχέσεις

Λύση του (*ii*).

Δεν είναι ολική διάταξη στο $\mathbb{N}^*$, διότι υπάρχουν αριθμοί στο $\mathbb{N}^*$ που δεν συγκρίνονται. Για παράδειγμα,

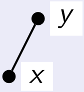
$$3 \nmid 5 \text{ και } 5 \nmid 3. \qquad \square$$

Σχέσεις

Ορισμός (Διάγραμμα Hasse)

Τα διαγράμματα Hasse αναπαριστούν γεωμετρικά μια μερική διάταξη $\leq$ που ορίζεται σε ένα σύνολο A.

- Τα στοιχεία του A αναπαρίστανται από σημεία.
- Αν $x < y$ και δεν υπάρχει $z \in A$ ώστε $x < z < y$, τότε τα σημεία x και y ενώνονται με μια γραμμή, έτσι ώστε το σημείο x να βρίσκεται χαμηλότερα από το σημείο y.



Άσκηση 10

Έστω A το σύνολο των θετικών διαιρετών του 24, δηλαδή

$$A = \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24\},$$

εφοδιασμένο με την σχέση διαιρετότητας $|$.

i) *Να σχεδιασθεί το διάγραμμα Hasse του* $(A, |)$

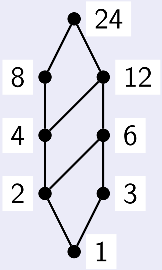
ii) *Να βρεθούν τα* $\inf A$ *και* $\sup A$.

iii) *Να βρεθούν τα* $\sup B$ *και* $\inf B$, *όπου* $B = \{2, 4, 6\}$.

Σχέσεις

Λύση του (*i*).

Ένα διάγραμμα Hasse για το $A = \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24\}$ είναι το επόμενο



$\square$

Σχέσεις

Λύση του (*ii*).

Για το supremum του A, ψάχνουμε φυσικό αριθμό x ώστε

$$1 \mid x, \qquad 2 \mid x, \qquad 3 \mid x, \qquad \dots, \qquad 24 \mid x$$

και το x να είναι το ελάχιστο δυνατό. Επομένως,

$$\sup A = \text{εκπ των στοιχείων του } A = 24.$$

Ανάλογα, βρίσκουμε ότι

$$\inf A = \text{μκδ των στοιχείων του } A = 1. \qquad \square$$

Παρατηρήστε ότι από το διάγραμμα Hasse, εντοπίζουμε άμεσα το μέγιστο και το ελάχιστο στοιχείο του A, τα οποία είναι τα 24 και 1 αντίστοιχα, οπότε έχουμε ότι

$$\sup A = \max A = 24 \qquad \text{και} \qquad \inf A = \min A = 1.$$

Λύση του (*ii*).

Ψάχνουμε τα supremum και infimum του συνόλου $B = \{2, 4, 6\}$.
Το $\sup B$ θα πρέπει να είναι ένα στοιχείο του $\mathbb{N}^*$ (όχι απαραίτητα στο A) που να είναι άνω φράγμα για τα $2, 4, 6$, δηλαδή να είναι πολλαπλάσιο αυτών, και μάλιστα να είναι το ελάχιστο δυνατό, άρα

$$\sup B = \text{εκπ των } 2, 4, 6 = 12.$$

Ομοίως, το $\inf A$ θα πρέπει να διαιρεί τα $2, 4, 6$ και να είναι το μέγιστο δυνατό, οπότε

$$\inf B = \text{μκδ των } 2, 4, 6 = 2.$$

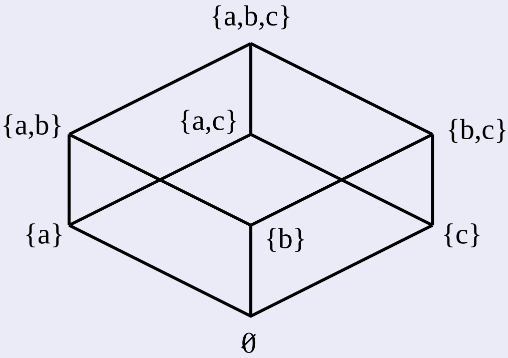
□

Σχέσεις

Άσκηση 11

Να σχεδιασθεί το διάγραμμα Hasse του δυναμοσυνόλου του $A = \{a, b, c\}$ *ως προς τη μερική διάταξη του εγκλεισμού* $\subseteq$.

Λύση.



Σχέσεις

Άσκηση 12 (Μερική διάταξη από ύψωση σε δύναμη)

Έστω R σχέση στο $\mathbb{N}$, με $xRy \Leftrightarrow x = y^k$, για κάποιο $k \in \mathbb{N}^*$. Να δειχθεί ότι η R είναι σχέση μερικής διάταξης. Είναι η R σχέση ολικής διάταξης;

Λύση.

Για κάθε $a \in \mathbb{N}$ ισχύει ότι $a = a^1$, όπου $1 \in \mathbb{N}^*$, άρα aRa, δηλαδή η σχέση R είναι ανακλαστική.

Έστω $a, b \in \mathbb{N}$ με aRb και bRa. Τότε υπάρχουν $k_1, k_2 \in \mathbb{N}^*$ ώστε $a = b^{k_1}$ και $b = a^{k_2}$. Αντικαθιστώντας το b έχουμε ότι $a = a^{k_1 k_2}$. Επομένως, $k_1 k_2 = 1$, οπότε $k_1 = k_2 = 1$, άρα $a = b$. Δηλαδή, η σχέση R είναι αντισυμμετρική.

Έστω $a, b \in \mathbb{N}$ με aRb και bRc. Τότε υπάρχουν $k_1, k_2 \in \mathbb{N}^*$ ώστε $a = b^{k_1}$ και $b = c^{k_2}$. Αντικαθιστώντας το b προκύπτει ότι $a = c^{k_1 k_2}$, όπου $k_1 k_2 \in \mathbb{N}^*$, άρα aRc, δηλαδή η σχέση R είναι μεταβατική.

Επομένως, η σχέση R είναι σχέση μερικής διάταξης.

Η σχέση R δεν είναι ολική διάταξη, διότι ούτε $2R3$, ούτε $3R2$. □

Άσκηση 13 (Κυκλικές σχέσεις)

Μια σχέση R σε ένα σύνολο A, ονομάζεται **κυκλική** *αν για κάθε $a, b, c \in A$ με aRb και bRc έπεται ότι cRa.*
Να δειχθεί ότι μια σχέση R είναι σχέση ισοδυναμίας αν και μόνο αν είναι ανακλαστική και κυκλική.

Λύση.

Έστω ότι η σχέση R είναι σχέση ισοδυναμίας. Θα δείξουμε ότι είναι ανακλαστική και κυκλική.
Η R είναι ανακλαστική (αφού είναι σχέση ισοδυναμίας).
Θα δείξουμε ότι η R είναι και κυκλική.
Πράγματι, έστω $a, b, c \in A$ με aRb και bRc. Επειδή η R είναι συμμετρική έπεται ότι bRa και cRb. Επειδή η R είναι μεταβατική έπεται ότι cRa. Άρα, η σχέση R είναι κυκλική.

Σχέσεις

Λύση (συνέχεια).

Αντίστροφα, έστω ότι η σχέση R είναι ανακλαστική και κυκλική. Θα δείξουμε ότι η R είναι σχέση ισοδυναμίας.
Αρκεί να δείξουμε ότι είναι συμμετρική και μεταβατική.
Πράγματι, έστω $a, b \in R$ με aRb. Επειδή η R είναι ανακλαστική έπεται ότι bRb. Επειδή η R είναι κυκλική έπεται ότι bRa. Άρα, η R είναι συμμετρική.
Έστω $a, b, c \in R$ με aRb και bRc. Επειδή η R είναι κυκλική έπεται ότι cRa. Επειδή (όπως αποδείξαμε) η R είναι συμμετρική έπεται ότι aRc.
Άρα, η R είναι μεταβατική. Άρα, η σχέση R είναι σχέση ισοδυναμίας. □

Ορισμός - Τοπολογική διάταξη

Δίδεται ένα σύνολο V, στο οποίο έχουμε ορίσει μια μερική διάταξη $\leq$. Μια ολική διάταξη $\lhd$ στο V ονομάζεται **γραμμική επέκταση** ή **τοπολογική διάταξη** της διάταξης $\leq$ στο V ανν για κάθε $a, b \in V$ ισχύει

$$a \leq b \Rightarrow a \lhd b.$$

Δηλαδή η διάταξη $\lhd$ είναι "συμβατή" με την $\leq$ και την επεκτείνει σε όλα τα ζεύγη στοιχείων.

Σχέσεις

Για παράδειγμα, ας υποθέσουμε ότι δίνεται το σύνολο $V = \{a, b, c, d, e, f\}$ με την μερική διάταξη $\leq$, για την οποία $x \leq x$ για κάθε $x \in V$ και επιπλέον

$$d \leq b,\ d \leq c,\ d \leq a,\ d \leq e,\ d \leq f,\ b \leq e,\ c \leq e,\ a \leq f$$

Μια τοπολογική διάταξη $\lhd$ για την σχέση $\leq$ είναι η ολική διάταξη

$$d \lhd b \lhd c \lhd a \lhd e \lhd f$$

Μια άλλη τοπολογική διάταξη $\lhd$ είναι η ολική διάταξη

$$d \lhd b \lhd c \lhd e \lhd a \lhd f.$$

Αποδεικνύεται ότι κάθε μερική διάταξη μπορεί να επεκταθεί σε μια τοπολογική διάταξη. Μερικές φορές μπορεί να υπάρχουν πολλές τοπολογικές διατάξεις.

Για την εύρεση της τοπολογικής διάταξης μπορεί να χρησιμοποιηθεί ο επόμενος αλγόριθμος:

Αλγόριθμος εύρεσης τοπολογικής διάταξης

- Είσοδος: Ένα σύνολο U διατεταγμένων ζευγών (x, y) που αναπαριστούν την μερική διάταξη $\leq$ στο σύνολο V
- Έξοδος: Μια (διατεταγμένη) λίστα L των στοιχείων του V, η οποία αναπαριστά την τοπολογική διάταξη $\lhd$.

Όσο υπάρχουν στοιχεία του V που δεν έχουν προστεθεί στην L

Επιλέγουμε ένα στοιχείο $x \in V$ που δεν έχει μικρότερο στοιχείο μεταξύ των στοιχείων που δεν έχουν προστεθεί στην λίστα L (Δηλαδή το x δεν εμφανίζεται στην δεύτερη θέση κανενός ζεύγους του U.)
Προσθέτουμε το x στο τέλος της λίστας L.
Σβήνουμε όλα τα ζεύγη (x, y) του U που περιέχουν το x.

Σχέσεις

Το πρόβλημα της επέκτασης μιας μερικής διάταξης σε ολική είναι πολύ συνηθισμένο στις εφαρμογές, όπως φαίνεται και στην επόμενη άσκηση.

Άσκηση 14 (Βάζοντας τα πράγματα σε σειρά)

Για την ολοκλήρωση ενός έργου, πρέπει να εκτελεστούν 9 *δραστηριότητες* $1, 2, \ldots, 9$*. Κάποιες από αυτές χρειάζονται τα αποτελέσματα μερικών άλλων, των οποίων η εκτέλεση πρέπει να προηγηθεί. Οι απαιτήσεις κάθε μιας δίδονται στον επόμενο πίνακα:*

	απαιτήσεις		*απαιτήσεις*		*απαιτήσεις*
1	3, 4	4		7	3, 4
2	1, 5	5		8	5, 7
3		6	1, 2	9	6, 8

Να βρεθεί με ποια σειρά πρέπει να εκτελεστούν οι $1, 2, \ldots, 9$ *ώστε να ολοκληρωθεί το έργο.*

Σχέσεις

Λύση.

Οι απαιτήσεις του προβλήματος ορίζουν μια μερική διάταξη στο σύνολο 1, 2, ..., 9. Συγκεκριμένα, $j < i$ αν η δραστηριότητα i απαιτεί την ολοκλήρωση της δραστηριότητας j. Επομένως, η ολοκλήρωση του έργου απαιτεί την ικανοποίηση των παρακάτω ζευγών περιορισμών:

$$U = \{(1,2),(1,6),(2,6),(3,1),(3,7),(3,8),\\ (4,1),(4,7),(5,2),(5,8),(6,9),(8,9)\}$$

Η εύρεση της σειράς εκτέλεσης αντιστοιχεί στην εύρεση μια τοπολογικής διάταξης για την μερική διάταξη των απαιτήσεων. Θα εφαρμόσουμε τον αλγόριθμο της τοπολογικής διάταξης. Θα φτιάξουμε μια λίστα L που τελικά θα περιέχει τους αριθμούς $1, 2, 3, \dots, 9$ με την σειρά της τοπολογικής διάταξης. Κάθε φορά, επιλέγουμε μια δραστηριότητα i που δεν απαιτεί τις υπόλοιπες που απομένουν, την προσθέτουμε στο τέλος της L και σβήνουμε από το U τα ζεύγη που την περιέχουν. Επαναλαμβάνουμε μέχρι να εξαντληθούν οι δραστηριότητες.

Σχέσεις

Λύση (συνέχεια).

0. Αρχικά, έχουμε $V = [1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9]$, $L = []$ και

$$U = \{(1,2), (1,6), (2,6), (3,1), (3,7), (3,8),\\ (4,1), (4,7), (5,2), (5,8), (6,9), (8,9)\}$$

1. Επιλέγουμε την 5 οπότε έχουμε $V = [1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9]$, $L = [5]$ και

$$U = \{(1,2), (1,6), (2,6), (3,1), (3,7), (3,8), (4,1), (4,7), (6,9), (8,9)\}$$

2. Επιλέγουμε την 3 οπότε έχουμε $V = [1, 2, 4, 6, 7, 8, 9]$, $L = [5, 3]$ και

$$U = \{(1,2), (1,6), (2,6), (4,1), (4,7), (6,9), (8,9)\}$$

3. Επιλέγουμε την 4 οπότε έχουμε $V = [1, 2, 6, 7, 8, 9]$, $L = [5, 3, 4]$ και

$$U = \{(1,2), (1,6), (2,6), (6,9), (8,9)\}$$

Σχέσεις

Λύση (συνέχεια).

4. Επιλέγουμε την 1 οπότε έχουμε $V = [2, 6, 7, 8, 9]$, $L = [5, 3, 4, 1]$ και
$$U = \{(2, 6), (6, 9), (8, 9)\}$$
5. Επιλέγουμε την 7 οπότε έχουμε $V = [2, 6, 8, 9]$, $L = [5, 3, 4, 1, 7]$ και
$$U = \{(2, 6), (6, 9), (8, 9)\}$$
6. Επιλέγουμε την 8 οπότε έχουμε $V = [2, 6, 9]$, $L = [5, 3, 4, 1, 7, 8]$ και
$$U = \{(2, 6), (6, 9)\}$$
7. Επιλέγουμε την 2 οπότε έχουμε $V = [6, 9]$, $L = [5, 3, 4, 1, 7, 8, 2]$ και
$$U = \{(6, 9)\}$$

Σχέσεις

Λύση (συνέχεια).

8. Επιλέγουμε την 6 οπότε έχουμε: $V = [9]$, $L = [5, 3, 4, 1, 7, 8, 2, 6]$ και
$$U = \{\}$$
9. Επιλέγουμε την 9 οπότε έχουμε $V = []$, $L = [5, 3, 4, 1, 7, 8, 2, 6, 9]$ και
$$U = \{\}$$

Επομένως, μια τοπολογική διάταξη των δραστηριοτήτων 1, 2, ..., 9, και άρα μια πιθανή σειρά εκτέλεσης των δραστηριοτήτων, είναι η σειρά $L = [5, 3, 4, 1, 7, 8, 2, 6, 9]$.

Παρακάτω δίδεται μια υλοποίηση του παραπάνω αλγορίθμου στην γλώσσα Python

Σχέσεις

```python
V = [1,2,3,4,5,6,7,8,9] #elements
U = [(1,2),(1,6),(2,6),(3,1),(3,7),(4,1),(4,7),(5,2),(5,8),(6,9),(3,8),(8,9)] #partial
    order
Vc = V.copy()
n = len(V)
pre = [[] for i in range(n+1)] #u in pre[v] <==> (u,v) in U
succ = [[] for i in range(n+1)] #u in succ[v] <==> (v,u) in U
for t in U: #for each tuple t in U
    pre[t[1]].append(t[0]) #populate pre
    succ[t[0]].append(t[1]) #populate succ

L = [] #result is stored in L
while(len(Vc) > 0):
    l = len(Vc)
    for v in Vc: #for each element v
        if len(pre[v]) == 0: #if v has no predecessor
            L.append(v) #append it in L
            for u in succ[v]: #for each successor u of v
                pre[u].remove(v) #delete v from list of predecessors of u
            #succ[v].clear()
            Vc.remove(v) #delete v
            break #reset for v loop
    if l == len(Vc): break #no progress => no possible solution

if (len(Vc)==0): print("result:", L)
else: print("no result found")
```

Output:

```
result: [3, 4, 1, 5, 2, 6, 7, 8, 9]
```

Σχέσεις

Άσκηση 15 (Συλλογικές κατατάξεις)

Ζητήθηκε από 17 κριτικούς ταινιών να κατατάξουν 4 ταινίες a, b, c, d. Στον επόμενο πίνακα παρουσιάζονται συγκεντρωτικά οι αξιολογήσεις τους.

Κατάταξη:	*1*	*2*	*3*	*4*
5	a	d	c	b
3	a	d	b	c
5	b	c	d	a
4	c	d	b	a
Βαθμοί:	3	2	1	0

Για παράδειγμα, 5 κριτικοί επέλεξαν την ταξινόμηση $a > d > c > b$. Ποια κατά την γνώμη σας είναι η καλύτερη ταινία με βάση τις κατατάξεις των κριτικών;

Σχέσεις

Υπάρχουν αρκετοί τρόποι (κανόνες) να επιλέξουμε την καλύτερη ταινία. Μερικοί από τους πιο δημοφιλείς είναι οι επόμενοι:

Ο κανόνας της σχετικής πλειοψηφίας

Κάθε κριτικός δίνει μια μόνο ψήφο (στην καλύτερη ταινία που επιλέγει). Κερδίζει η ταινία με τον μεγαλύτερο αριθμό ψήφων.

Κατάταξη:	1	2	3	4
5	a	d	c	b
3	a	d	b	c
5	b	c	d	a
4	c	d	b	a
Βαθμοί:	3	2	1	0

(Νικήτρια: a)

Σχέσεις

Ο κανόνας της απόλυτης πλειοψηφίας

Κάθε κριτικός δίνει μια μόνο ψήφο (στην καλύτερη ταινία που επιλέγει). Αλλά για να κερδίσει μια ταινία, πρέπει να συγκεντρώσει περισσότερες από τις μισές ψήφους. Αν δεν συμβεί αυτό, διεξάγεται δεύτερος γύρος ψηφοφορίας, στον οποίο συμμετέχουν οι δύο ταινίες που είχαν τις περισσότερες ψήφους. Στο δεύτερο γύρο, νικήτρια είναι εκείνη η ταινία που πλειοψηφεί.

(1ος γύρος)

Κατάταξη:	1	2	3	4
5	a	d	c	b
3	a	d	b	c
5	b	c	d	a
4	c	d	b	a

(2ος γύρος)

Κατάταξη:	1	2
5	a	b
3	a	b
5	b	a
4	b	a

Στον πρώτο γύρο, δεν υπάρχει νικητής. Στον δεύτερο γύρο, περνάνε οι ταινίες a και b. (Νικήτρια: b)

Ο κανόνας της υψηλότερης βαθμολογίας

Κάθε κριτικός παρουσιάζει ολόκληρο το σύστημα προτίμησής του. Μια ταινία παίρνει 0 βαθμούς για την τελευταία θέση, 1 βαθμό για την προτελευταία, 2 βαθμούς για την αμέσως επόμενη, και ούτω καθεξής. Κερδίζει η ταινία που συγκεντρώνει την υψηλότερη βαθμολογία.

Κατάταξη:	1	2	3	4
5	a	d	c	b
3	a	d	b	c
5	b	c	d	a
4	c	d	b	a
Βαθμοί:	3	2	1	0

$a: 5\cdot 3+3\cdot 3+5\cdot 0+4\cdot 0=24.$ $b: 4\cdot 0+3\cdot 1+5\cdot 3+4\cdot 1=22.$
$c: 5\cdot 1+3\cdot 0+5\cdot 2+4\cdot 3=27.$ $d: 5\cdot 2+3\cdot 2+5\cdot 1+4\cdot 2=29.$
(Νικήτρια: d)

Ο κανόνας του Condorcet

Συγκρίνουμε ανά δύο τις ταινίες. Η ταινία x κερδίζει στην μονομαχία με την y αν είναι περισσότεροι αυτοί που θεωρούν ότι $x > y$ παρά αυτοί που θεωρούν ότι $x < y$. Η ταινία που υπερισχύει σε όλες τις μονομαχίες κερδίζει.

Κατάταξη:	1	2	3	4
5	a	d	c	b
3	a	d	b	c
5	b	c	d	a
4	c	d	b	a

Μονομαχίες **(νίκες:ήττες)**

	a	b	c	d
a	-	8:9	8:9	8:9
b	9:8	-	8:9	5:12
c	9:8	9:8	-	9:8
d	9:8	12:5	8:9	-

(Νικήτρια: c)

Σχέσεις

Παρατηρήστε ότι στο παράδειγμα κάθε κανόνας οδηγεί σε διαφορετική απάντηση. Ποιός από αυτούς είναι πιο δίκαιος?
Ο Kenneth Arrow (βραβείο Νόμπελ Οικονομίας το 1972) εξέπληξε την επιστημονική κοινότητα αποδεικνύοντας ότι στην περίπτωση που υπάρχουν τουλάχιστον 3 υποψήφιοι δεν μπορεί να υπάρξει δίκαιος κανόνας για όλες τις πιθανές περιπτώσεις. Συγκεκριμένα:

Σχέσεις

Θεώρημα του Arrow.

Ο μόνος κανόνας συλλογικής κατάταξης τριών ή περισσοτέρων υποψηφίων με βάση τις ατομικές κατατάξεις για τον οποίο ικανοποιούνται οι συνθήκες

- (Αξίωμα της ομοφωνίας) Αν όλοι οι ψηφοφόροι προτιμούν τον a από τον b τότε στην συλλογική κατάταξη πρέπει να προηγείται ο a από τον b.
- (Αξίωμα της ανεξαρτησίας) Η συλλογική κατάταξη δύο υποψηφίων a και b δεν πρέπει να επηρεάζεται από τις αλλαγές κατάταξης άλλων υποψηφίων.

είναι ο κανόνας του δικτάτορα (δηλαδή επιλέγεται ως συλλογική κατάταξη η ατομική κατάταξη κάποιου ψηφοφόρου).

Για περισσότερες πληροφορίες, βλέπε την ενότητα 10.1 Rankings and Social Choice στο βιβλίο A. Blum, J. Hopcroft, R. Kannan, *Foundations of data science*, March 2019. Λήψη

Άσκηση 16

Δίνονται τα σύνολα $A = \{2^3, 2^4, 2^5, \ldots\}$ *και* $B = \{4^6, 4^8, 4^{10}, \ldots\}$. *Να δοθεί μια αμφιμονοσήμαντη απεικόνιση* $f : A \to B$.

Λύση.

Απεικονίζουμε το τυχαίο στοιχείο 2^n, $n \in \mathbb{N}^*$, του A στο 4^{2n}, δηλαδή ορίζουμε $f(2^n) = 4^{2n}$.
Επειδή $4^{2n} = (2^2)^{2n} = 2^{4n} = (2^n)^4$, η f ορίζεται ισοδύναμα από τον τύπο $f(x) = x^4$.
Το τυχαίο στοιχείο y του B είναι της μορφής $y = 4^{2n}$. Το στοιχείο αυτό είναι εικόνα του $x = 2^n \in A$, άρα η f είναι επί. Επιπλέον, η f είναι και ένα προς ένα, διότι το x είναι το μοναδικό πρότυπο για το y.
Πράγματι, αν υπάρχει και άλλο πρότυπο $x' = 2^m$ με $f(x') = y$, τότε

$$y = 4^{2n} = f(x') = f(2^m) = 4^{2m} \Rightarrow 2n = 2m \Rightarrow n = m \Rightarrow x = x'. \qquad \square$$

Απεικονίσεις

Άσκηση 17

Να εξετασθεί αν η απεικόνιση $f(x) = x^2 + x + 1/\mathbb{R}$ είναι ένα προς ένα.

Λύση.

Ο ισχυρισμός είναι λάθος. Είναι

$$\begin{aligned} f(x) = f(y) &\Leftrightarrow x^2 + x + 1 = y^2 + y + 1 \Leftrightarrow x^2 - y^2 + x - y = 0 \\ &\Leftrightarrow (x - y)(x + y) + x - y = 0 \\ &\Leftrightarrow (x - y)(x + y + 1) = 0 \end{aligned}$$

Αν λοιπόν επιλέξουμε x, y τέτοια ώστε $x \neq y$ και $x + y = -1$, π.χ. $x = 0$ και $y = -1$, τότε $f(-1) = (-1)^2 + (-1) + 1 = 1 = f(0)$. □

Άσκηση 18

Να εξετασθεί αν η απεικόνιση $f : A \to B$, *με* $A = [1, 2]$ *και* $B = [7, 10]$ *και τύπο* $f(x) = 2x + 5$ *είναι επί.*

Λύση.

Ο ισχυρισμός είναι λάθος. Είναι

$$x \in A \Rightarrow 1 \leq x \leq 2 \Rightarrow 2 \leq 2x \leq 4 \Rightarrow 7 \leq 2x + 5 \leq 9 \Rightarrow 7 \leq f(x) \leq 9$$

Άρα, αν $y \in B$, με $y > 9$, τότε δέν υπάρχει $x \in A$ τέτοιο ώστε $f(x) = y$. □

Άσκηση 19 (Εικόνες συνόλων)

Δίνονται τα σύνολα $A = \{1, 2, 4, 5, 6, 7\}$ *και* $B = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$ *και η απεικόνιση* $f : A \to B$ *με* $f(x) = (x-5)(x-4)$.

Να προσδιορισθούν τα σύνολα

i) $f(A)$, $f(\{3, 4\})$, $f(\emptyset)$, $f(\{1, 2, 6\})$.

ii) $f^{-1}(B)$, $f^{-1}(\{2\})$, $f^{-1}(\{0\})$, $f^{-1}(\{0, 2\})$, $f^{-1}(\{12\})$, $f^{-1}(\{9\})$, $f^{-1}(\{4, 5, 6\})$.

Λύση του (*i*).

$$\begin{aligned} f(A) &= \{f(n) : n \in A\} = \{12, 6, 2, 0, 0, 2, 6\} = \{0, 2, 6, 12\}. \\ f(\{3, 4\}) &= \{f(3), f(4)\} = \{2, 0\}. \\ f(\emptyset) &= \emptyset. \\ f(\{1, 2, 6\}) &= \{f(1), f(2), f(6)\} = \{12, 6, 2\}. \end{aligned}$$

□

Απεικονίσεις

Λύση του (*ii*).

$f^{-1}(B) = A$.

$f^{-1}(\{2\}) = \{3, 6\}$, διότι $f(3) = f(6) = 2$ και $f(x) \neq 2$ για κάθε $x \in A$ με $x \neq 3, 6$.

$f^{-1}(\{0\}) = \{4, 5\}$, διότι $f(4) = f(5) = 0$ και $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in A$ με $x \neq 4, 5$.

$f^{-1}(\{0, 2\}) = f^{-1}(\{0\}) \cup f^{-1}(\{2\}) = \{3, 6\} \cup \{4, 5\} = \{3, 4, 5, 6\}$.

$f^{-1}(\{12\}) = \{1\}$, διότι $f(1) = 12$ και $f(x) \neq 12$ για κάθε $x \in A$ με $x \neq 1$.

$f^{-1}(\{9\}) = \emptyset$, διότι $f(x) \neq 9$ για κάθε $x \in A$.

$f^{-1}(\{4, 5, 6\}) = f^{-1}(\{4\}) \cup f^{-1}(\{5\}) \cup f^{-1}(\{6\}) = \emptyset \cup \emptyset \cup \{2, 7\} = \{2, 7\}$. $\square$

Απεικονίσεις

Άσκηση 20 (Εικόνες $1-1$ συναρτήσεων)

Έστω $f : A \to B$. Να δειχθεί ότι η f είναι $1-1$ αν και μόνο αν $f^{-1}(f(\Gamma)) = \Gamma$, για κάθε $\Gamma \subseteq A$.

Λύση.

Έστω ότι η απεικόνιση f είναι $1-1$; θα δειχθεί ότι $f^{-1}(f(\Gamma)) = \Gamma$.
Επειδή για κάθε απεικόνιση f ισχύει ότι $\Gamma \subseteq f^{-1}(f(\Gamma))$, αρκεί να δειχθεί ότι $f^{-1}(f(\Gamma)) \subseteq \Gamma$. Πράγματι, αν $x \in f^{-1}(f(\Gamma))$, τότε $f(x) \in f(\Gamma)$ οπότε θα υπάρχει $\xi \in \Gamma$ με $f(x) = f(\xi)$. Επειδή η συνάρτηση f είναι $1-1$ έπεται ότι $x = \xi$, οπότε $x \in \Gamma$.
Αντίστροφα, αν $f^{-1}(f(\Gamma)) = \Gamma$ για κάθε $\Gamma \subseteq A$, θα δειχθεί ότι η f είναι $1-1$. Πραγματικά, αν $x_1, x_2 \in A$ με $f(x_1) = f(x_2)$, εφαρμόζουμε τη δοσμένη ισότητα για $\Gamma = \{x_1\}$, οπότε προκύπτει ότι $x_2 \in f^{-1}(f(\{x_1\})) = \{x_1\}$ και επομένως $x_1 = x_2$. □

Άσκηση 21

Να δειχθεί ότι

$$\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{n!}\leq 2-\frac{1}{n},\ \textit{για κάθε } n\geq 2$$

Υπενθύμιση:

$$n! = 1\cdot 2\cdot 3\cdots(n-1)\cdot n$$
$$1! = 1,\quad 2! = 1\cdot 2,\quad 3! = 1\cdot 2\cdot 3,\quad 0! = 1,$$
$$n! = (n-1)!n$$

Λύση

Έστω η πρόταση

$$\Pi(n): \text{ Ισχύει ότι } \frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{n!}\leq 2-\frac{1}{n}$$

Η Π(2) είναι αληθής, διότι (για $n=2$)

$$\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}\leq 2-\frac{1}{2}\Leftrightarrow 1+\frac{1}{2}\leq 2-\frac{1}{2}\Leftrightarrow 2\leq 2.$$

Έστω ότι η $\Pi(k)$ είναι αληθής για κάποιο $k\geq 2$, δηλαδή

$$\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{k!}\leq 2-\frac{1}{k}$$

Θα δείξουμε ότι ισχύει και η $\Pi(k+1)$, δηλαδή

$$\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{k!}+\frac{1}{(k+1)!}\leq 2-\frac{1}{k+1}$$

Λύση (συνέχεια)

Από την υπόθεση της επαγωγής έχουμε ότι

$$\underbrace{\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{k!}}_{\leq 2-\frac{1}{k}}+\frac{1}{(k+1)!}\leq 2-\frac{1}{k}+\frac{1}{(k+1)!}$$

οπότε αρκεί να δείξουμε ότι

$$2-\frac{1}{k}+\frac{1}{(k+1)!}\leq 2-\frac{1}{k+1}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{(k+1)!}\leq \frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{(k+1)!}\leq \frac{(k+1)-k}{k(k+1)}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{(k+1)!}\leq \frac{1}{k(k+1)}$$

Λύση (συνέχεια)

$$\overset{k \geq 2}{\Leftrightarrow} \frac{1}{(k+1)k(k-1)!} \leq \frac{1}{k(k+1)}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{(k-1)!} \leq 1 \Leftrightarrow (k-1)! \geq 1$$

το οποίο ισχύει. Άρα, η $\Pi(k+1)$ είναι αληθής.
Επομένως, από την αρχή της επαγωγής η $\Pi(n)$ είναι αληθής για κάθε $n \geq 2$.

Παρατήρηση

Η μορφή της προηγούμενης ανισότητας ήταν βολική για την εφαρμογή της αρχής της επαγωγής. Παρατηρήστε ότι
$\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{n!}\leq 2-\frac{1}{n}<2$, δηλαδή για κάθε $n\geq 2$ ισχύει ότι

$$\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{n!}<2.$$

Η ανισότητα αυτή, παρόλο που ισχύει, δεν μπορεί εύκολα να αποδειχθεί με επαγωγή, επειδή στο δεύτερο μέλος της δεν εμφανίζεται κάποια παράσταση του n. Συγκεκριμένα, στο επαγωγικό βήμα, από την υπόθεση ότι

$$\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{k!}<2$$

δεν μπορούμε να συνάγουμε ότι

$$\underbrace{\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{k!}}_{<2}+\frac{1}{(k+1)!}<2.$$

Σε αυτές τις περιπτώσεις προσπαθούμε να βρούμε μια κατάλληλη ανισότητα, όπως η προηγούμενη, από την οποία προκύπτει η ζητούμενη.

Άσκηση 22

Έστω $x \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε $x + \dfrac{1}{x} \in \mathbb{Z}$.[a]

Να δειχθεί ότι $x^n + \dfrac{1}{x^n} \in \mathbb{Z}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

[a] Π.χ. αν $x = \dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$ τότε $x + \dfrac{1}{x} = 3$.

Λύση

Έστω $\Pi(n)$: $x^n + \dfrac{1}{x^n} \in \mathbb{Z}$.

$\Pi(0)$: $x^0 + \dfrac{1}{x^0} = 1 + 1 = 2 \in \mathbb{Z}$. Δηλαδή η $\Pi(0)$ είναι αληθής.

$\Pi(1)$: $x^1 + \dfrac{1}{x^1} \in \mathbb{Z}$. Δηλαδή η $\Pi(1)$ είναι αληθής.

Λύση (συνέχεια)

Εδώ θα χρησιμοποιήσουμε την ισχυρή μορφή της επαγωγής.
Έστω ότι η $\Pi(k)$ είναι αληθής για κάθε $k \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$.
Θα δείξουμε ότι και η $\Pi(n)$ είναι αληθής, δηλαδή ότι $x^n + \frac{1}{x^n} \in \mathbb{Z}$
Η απόδειξη βασίζεται στην επόμενη ταυτότητα. Ισχύει ότι

$$\begin{aligned} x^n + \frac{1}{x^n} &= x^n + \frac{1}{x^n} + \left(x^{n-2} + \frac{1}{x^{n-2}}\right) - \left(x^{n-2} + \frac{1}{x^{n-2}}\right) \\ &= x\left(x^{n-1} + \frac{1}{x^{n-1}}\right) + \frac{1}{x}\left(x^{n-1} + \frac{1}{x^{n-1}}\right) - \left(x^{n-2} + \frac{1}{x^{n-2}}\right) \\ &= \left(x + \frac{1}{x}\right)\left(x^{n-1} + \frac{1}{x^{n-1}}\right) - \left(x^{n-2} + \frac{1}{x^{n-2}}\right). \end{aligned}$$

Από την υπόθεση της επαγωγής, αφού $n \geq 2$, έπεται ότι
$0 \leq n-1, n-2 < n$ οπότε $x^{n-1} + \frac{1}{x^{n-1}}$ και $x^{n-2} + \frac{1}{x^{n-2}} \in \mathbb{Z}$

Λύση (συνέχεια)

Άρα, η παράσταση

$$\left(x+\frac{1}{x}\right)\left(x^{n-1}+\frac{1}{x^{n-1}}\right)-\left(x^{n-2}+\frac{1}{x^{n-2}}\right)\in\mathbb{Z}$$

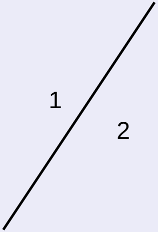
αφού περιέχει μόνο πολλαπλασιασμούς και αφαιρέσεις ακεραίων.
Επομένως, η $\Pi(n)$ είναι αληθής.
Άρα, από την αρχή της (ισχυρής) επαγωγής η $\Pi(n)$ είναι αληθής για κάθε $n \geq 0$.

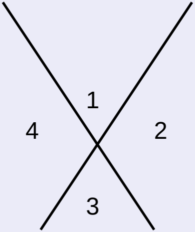
Άσκηση 23 (Διαμερίσεις του επιπέδου από ευθείες)

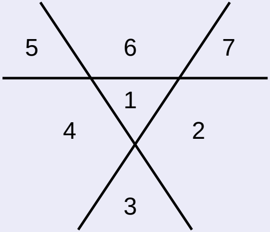
Μια ευθεία χωρίζει το επίπεδο σε δύο περιοχές. Δύο ευθείες χωρίζουν το επίπεδο σε 4 το πολύ περιοχές. Σε πόσες το πολύ περιοχές μπορεί να χωρισθεί ένα επίπεδο από n ευθείες?

Λύση

Έστω a_n το μέγιστο πλήθος των περιοχών που μπορεί να χωρισθεί το επίπεδο από n ευθείες.
Παρατηρούμε ότι προκειμένου να μεγιστοποιήσουμε τον αριθμο των περιοχών πρέπει να μην υπάρχουν παράλληλες ευθείες και καμία 3-άδα ευθειών να μην συντρέχει σε σημείο.







Λύση (συνέχεια)

Έτσι, κάθε φορά που προσθέτουμε μια ευθεία τέμνει τις προηγούμενες n ευθείες σε n διαφορετικά σημεία και διαιρείται σε $n+1$ ευθύγραμμα μέρη κάθε ένα από τα οποία χωρίζει μια υπάρχουσα περιοχή σε 2 μέρη. Άρα, προκύπτει ο αναδρομικός τύπος

$$a_{n+1} = a_n + (n+1).$$

Με τη βοήθεια του αναδρομικού τύπου θα αποδείξουμε επαγωγικά ότι για κάθε $n \geq 1$ ισχύει ο τύπος

$$a_n = 1 + \frac{n(n+1)}{2}.$$

Πράγματι, έχουμε ότι $a_1 = 1 + \frac{1(1+1)}{2} = 2$, δηλαδή ο τύπος ισχύει για $n = 1$.

Λύση (συνέχεια)

Έστω ότι ο τύπος ισχύει για $n = k$, δηλαδή $a_k = 1 + \frac{k(k+1)}{2}$.
Θα δείξουμε ότι ο τύπος ισχύει και για $n = k + 1$. Από τον αναδρομικό τύπο έχουμε ότι

$$a_{k+1} = a_k + (k + 1),$$

οπότε, από την επαγωγική υπόθεση για το a_k, προκύπτει ότι

$$a_{k+1} = 1+\frac{k(k+1)}{2}+(k+1) = 1+\frac{k(k+1)+2(k+1)}{2} = 1+\frac{(k+1)(k+2)}{2}.$$

Άρα, ο τύπος ισχύει και για $n = k + 1$.
Επομένως, από την αρχή της επαγωγής ο τύπος ισχύει για κάθε $n \geq 1$.

Άσκηση 24 (Επαγωγή με βήμα μεγέθους 2)

Έστω ότι για μια πρόταση $\Pi(n)$ μπορούμε να αποδείξουμε ότι αν η $\Pi(k)$ είναι αληθής, τότε και η $\Pi(k+2)$ είναι αληθής. Τι πρέπει να ισχύει ώστε η $\Pi(n)$ να είναι αληθής για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$;

Λύση

Αρκεί να είναι αληθείς οι $\Pi(1)$ και $\Pi(2)$.
Τότε μπορούμε να δείξουμε ότι η $\Pi(n)$ είναι αληθής για κάθε n περιττό και ότι η $\Pi(n)$ είναι αληθής για κάθε n άρτιο.
Άρα, η $\Pi(n)$ είναι αληθής για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$.

Άσκηση 25 (Το $3n+1$ πρόβλημα ⋄)

Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ εφαρμόζουμε τις εξής πράξεις:

- *Αν n άρτιος, τότε τον διαιρούμε με το 2*

$$n \to \frac{n}{2}$$

- *Αν n περιττός, τότε τον πολλαπλασιάζουμε επί 3 και προσθέτουμε 1*

$$n \to 3n+1$$

Επαναλαμβάνουμε την διαδικασία μέχρις ότου εμφανισθεί ο αριθμός 1.
Παραδείγματα.
$10 \to 5 \to 16 \to 8 \to 4 \to 2 \to 1$
$7 \to 22 \to 11 \to 34 \to 17 \to 52 \to 26 \to 13 \to 40 \to 20 \to 10 \to \cdots \to 1$
Εικασία[a] *Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ η διαδικασία καταλήγει πάντα στο 1.*

[a] Έχει επαληθευτεί μέχρι $n = 2^{68} = 295.147.905.179.352.825.856$.

Mathematics is not yet ripe enough for such questions. - Paul Erdős

Η επαγωγική προσέγγιση στην επίλυση προβλημάτων

Η επαγωγική προσέγγιση σε ένα πρόβλημα αποτελείται από δύο μέρη: Συνήθως το πρόβλημα έχει μια παράμετρο n, $n \in \mathbb{N}^*$ που εκφράζει το "μέγεθος" του προβλήματος

i) Για μικρές τιμές της παραμέτρου n γνωρίζουμε τις απαντήσεις στο πρόβλημα.

ii) Μπορούμε να λύσουμε το πρόβλημα με παράμετρο n χρησιμοποιώντας την λύση του προβλήματος με παράμετρο $n-1$, ή γενικότερα τις λύσεις του προβλήματος με παράμετρο k, όπου $k < n$.

Άσκηση 26 (Διάδοση κουτσομπολιών)

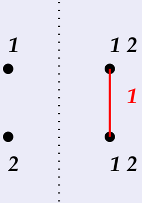
Μια παρέα n ατόμων κουτσομπολεύουν ανά δύο μέσω τηλεφώνου. Κάθε άτομο γνωρίζει τουλάχιστον ένα κουτσομπολιό που δεν το γνωρίζουν τα υπόλοιπα άτομα. Σε μια τηλεφωνική συνομιλία μεταξύ των A και B, ο A λέει στον B όλα τα κουτσομπολιά που έχει ακούσει και ο B ανταποδίδει. Έστω a_n ο ελάχιστος αριθμός τηλεφωνικών κλήσεων που πρέπει να γίνουν μεταξύ n ατόμων, ώστε όλα τα κουτσομπολιά να είναι γνωστά στον καθένα.

i) *Να δειχθεί ότι $a_2 = 1$, $a_3 = 3$ και $a_4 = 4$.*

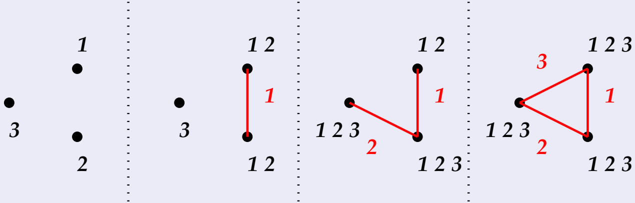
ii) *Να δειχθεί ότι $a_n \leq 2n - 4$, για κάθε $n \geq 4$.*

Λύση

i) Πράγματι, για $n = 2$ αρκεί ένα τηλεφώνημα.

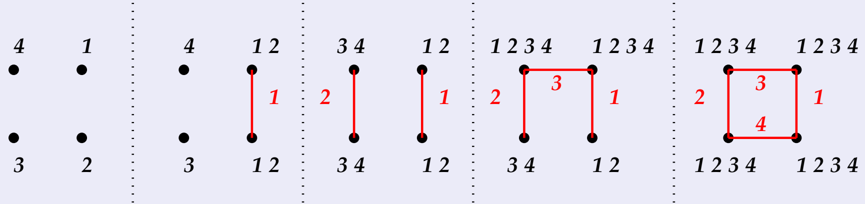


Για $n = 3$ αρκούν τρία τηλεφωνήματα.



Λύση (συνέχεια)

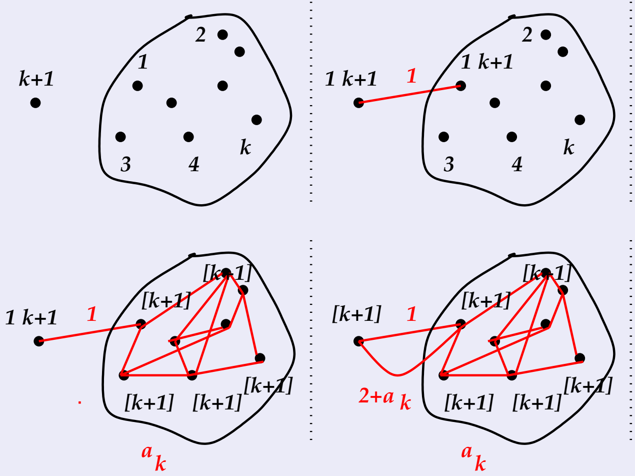
Για $n = 4$ αρκούν τέσσερα τηλεφωνήματα.



Λύση (συνέχεια)

ii) Έστω η πρόταση $\Pi(n) : a_n \leq 2n - 4$.
Για $n = 4$ έχουμε ότι $a_4 = 2 \cdot 4 - 4 = 4$, άρα η $\Pi(4)$ είναι αληθής.
Έστω ότι η πρόταση $\Pi(k)$ είναι αληθής για κάποιο $k \geq 4$, δηλαδή $a_k \leq 2k - 4$.
Θα δείξουμε ότι και η πρόταση $\Pi(k+1)$ είναι αληθής, δηλαδή $a_{k+1} \leq 2(k+1) - 4$.
Πράγματι, έστω ότι έχουμε $k+1$ άτομα. Αρχικά, το άτομο $k+1$ επικοινωνεί με το άτομο 1 και ανταλλάσουν τα κουτσομπολιά που γνωρίζουν. Στην συνέχεια τα άτομα 1, 2, ..., k ανταλλάσουν τα κουτσομπολιά που γνωρίζουν χρησιμοποιώντας a_k κλήσεις (αγνοώντας το άτομο $k+1$). Στο τέλος, το άτομο 1 καλεί το άτομο $k+1$ και του μεταφέρει όλα τα υπόλοιπα κουτσομπολιά.

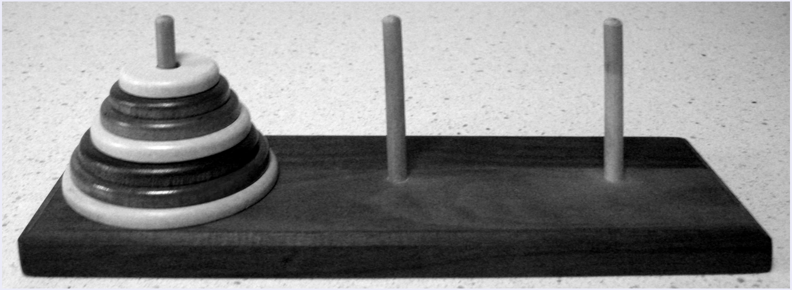
Λύση (συνέχεια)



Άρα, $a_{k+1} \leq 1 + a_k + 1 \leq 1 + (2k - 4) + 1 \leq 2(k+1) - 4$.

Άσκηση 27 (Πύργοι του Hanoi)

Έστω τρεις στύλοι και n διαφορετικοί δίσκοι, όπως φαίνεται στο επόμενο σχήμα:



Να βρεθεί πως μπορούμε να μεταφέρουμε τους n δίσκους σε άλλο στύλο, όταν μετακινούμε μόνο ένα δίσκο κάθε φορά και κανένας δίσκος δεν πρέπει να τοποθετηθεί πάνω σε μικρότερό του. Πόσες κινήσεις θα χρειαστούμε;

Λύση

Έστω a_n ο ζητούμενος αριθμός των κινήσεων που απαιτούνται όταν έχουμε να μεταφέρουμε n δίσκους.
Αν $n = 1$, τότε το πρόβλημα λύνεται άμεσα. Μετακινούμε τον μοναδικό δίσκο από τον στύλο που βρίσκεται σε ένα διαφορετικό στύλο. Άρα, $a_1 = 1$
Θα λύσουμε το πρόβλημα για $n \geq 2$ δίσκους.
Έστω ότι γνωρίζουμε να λύνουμε το πρόβλημα για $n - 1$ δίσκους, τότε στην περίπτωση που έχουμε να μεταφέρουμε n δίσκους:

- Μεταφέρουμε τους $n - 1$ μικρότερους δίσκους σε κάποιο άλλο στύλο (αγνοώντας τον μεγαλύτερο δίσκο).
- Έπειτα, μεταφέρουμε τον μεγαλύτερο δίσκο στον άδειο στύλο που απομένει.
- Και μεταφέρουμε τους $n - 1$ μικρότερους δίσκους στον στύλο όπου βρίσκεται ο μεγαλύτερος δίσκος.

Λύση (συνέχεια)

Συνολικά, θα χρειαστούμε $a_{n-1} + 1 + a_{n-1}$ κινήσεις, επομένως

$$a_n = 2a_{n-1} + 1$$

Με την βοήθεια του αναδρομικού τύπου μπορούμε να δείξουμε με επαγωγή ότι

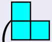
$$a_n = 2^n - 1$$

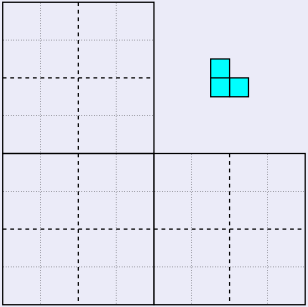
Πράγματι, για $n = 1$ έχουμε $a_1 = 2^1 - 1 = 1$ άρα ο ισχυρισμός ισχύει.
Υποθέτουμε ότι $a_k = 2^k - 1$ για κάποιο $k \geq 1$ και θα δείξουμε ότι $a_{k+1} = 2^{k+1} - 1$.
Πράγματι, χρησιμοποιώντας τον παραπάνω αναδρομικό τύπο

$$a_{k+1} = 2a_k + 1 = 2(2^k - 1) + 1 = 2^{k+1} - 1.$$

Άρα, από την αρχή της επαγωγής ο ισχυρισμός ισχύει για κάθε $n \geq 1$.

Άσκηση 28 (Κάλυψη με τρόμινο)

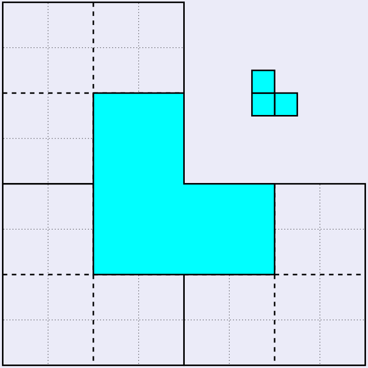
Να βρεθεί πως μπορούμε να καλύψουμε με σχήματα L-τρόμινο () μια $2^n \times 2^n$ L-τρόμινο σκακιέρα.



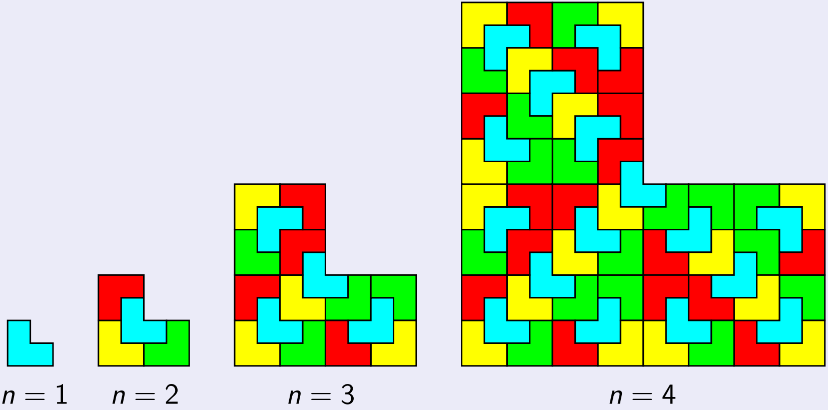
Δεν επιτρέπονται οι επικαλύψεις στα L-τρόμινο αλλά επιτρέπονται οι περιστροφές.

Λύση

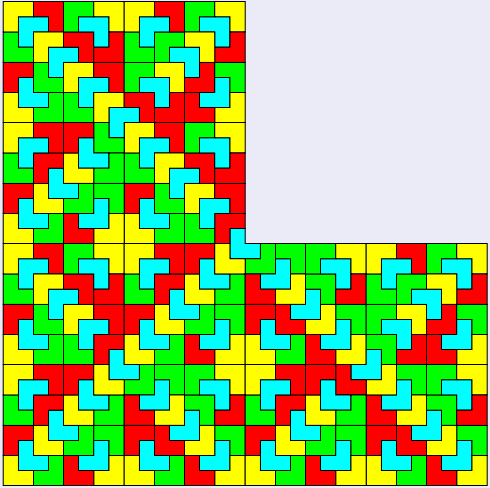
Για $n = 1$, η κάλυψη μιας $2^1 \times 2^1$ L-τρόμινο σκακιέρας είναι προφανής. Έστω ότι μπορούμε να καλύψουμε μια $2^n \times 2^n$ σκακιέρα. Τότε μπορούμε να καλύψουμε την $2^{n+1} \times 2^{n+1}$ σκακιέρα διαμερίζοντας την σκακιέρα σε τέσσερα $2^n \times 2^n$ τμήματα.



Λύση (συνέχεια)

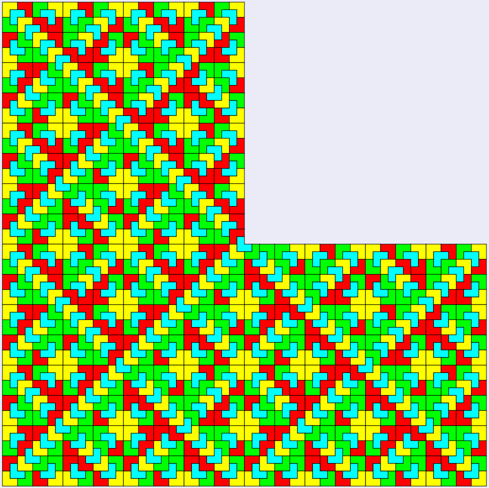


Λύση (συνέχεια)



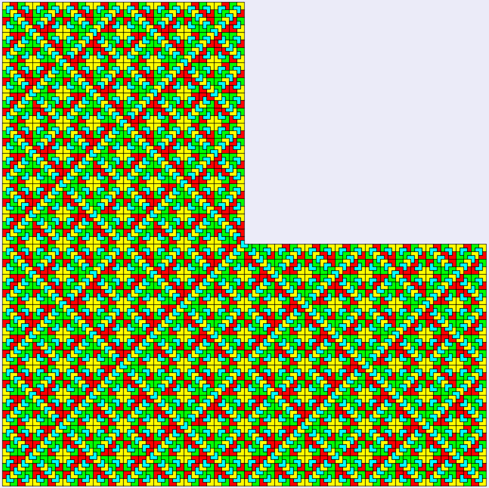
$n = 5$

Λύση (συνέχεια)



$n = 6$

Λύση (συνέχεια)



$n = 7$