Το πρόβλημα του σάκου (Knapsack)

- Θα λύσουμε το μη ακέραιο πρόβλημα:
- n αντικείμενα α_i (i=1,…,n) με όγκο v_i και κέρδος p_i
- Σάκος χωρητικότητας C
- Να επιλεχθούν εκείνα τα αντικείμενα για να μπουν στο σάκο με μέγιστο το συνολικό κέρδος δηλ.:

$$p = \sum_{i=1}^{n} f_i p_i$$

- όπου f_i το ποσοστό του αντικειμένου i στο σάκο
- Προφανώς $0 \leq f_i \leq 1$
- Θα πρέπει επίσης να ισχύει: $v = \sum_{i=1}^{n} f_i v_i \leq C$
- Προφανώς αν $v = \sum_{i=1}^{n} v_i \leq C$, η λύση είναι προφανής

- Άπληστος αλγόριθμος: βάλε κάθε φορά το αντικείμενο με το μέγιστο κέρδος
- Δεν οδηγεί πάντα στη βέλτιστη λύση
- Σωστή προσέγγιση:
- λi = p_i / v_i , i=1,…,n
- Ταξινόμησε τα αντικείμενα κατά φθίνουσα σύμφωνα με τις τιμές των λi
- Βάλε κάθε φορά το αντικείμενο με το μέγιστο λ_i από αυτά που είναι εκτός σάκου
- Αν δεν χωράει το τελευταίο αντικείμενο ολόκληρο χρησιμοποίησε ένα τμήμα μέχρι να γεμίσει πλήρως ο σάκος.

- Ο αλγόριθμος είναι βέλτιστος
- Απόδειξη με εις άτοπον απαγωγή
- Έστω Λ η λύση που κατασκευάζει ο αλγόριθμος και Λ’ μία βέλτιστη λύση.
- f1, f2,…,fn τα ποσοστά των αντικειμένων στη λύση Λ
- f’1, f’2,…,f’n τα ποσοστά των αντικειμένων στη Λ’
- Έστω η Λ’ έχει το μέγιστο j τέτοιο ώστε:
  - fi=f’i για i=1,…,j-1 και fj ≠f’j και συγκεκριμένα fj > f’j
- Ισχύει επίσης

$$\sum_{i=1}^{n} f_i v_i = \sum_{i=1}^{n} f'_i v_i = C$$

- Θα φτιάξουμε τώρα μία νέα βέλτιστη λύση Λ’’ που θα συμπίπτει με την Λ και στο δείκτη j δηλ.: fi=f’’i για i=1,…,j
- Αν j=n τότε η Λ’’ έχει μεγαλύτερο κέρδος από την Λ’ άρα και αυτή βέλτιστη.
- Όμως η Λ’ δεν ήταν τελικά η λύση με το μέγιστο j
- Αn j<n, για τα ποσοστά f’’i, i=j+1,…,n θα ισχύει:

$$\left(f_j^{''} - f_j^{'} \right) v_j = \sum_{i=j+1}^{n} \left(f_i^{'} - f_i^{''} \right) v_i$$

- Για τα συνολικά κέρδη ισχύει:

$$\sum_{i=1}^{n} f_i^{''} p_i - \sum_{i=1}^{n} f_i^{'} p_i =$$

$$(f_j^{''} - f_j^{'}) p_j - \sum_{i=j+1}^{n} (f_i^{'} - f_i^{''}) p_i =$$

$$(f_j^{''} - f_j^{'}) \lambda_j v_j - \sum_{i=j+1}^{n} (f_i^{'} - f_i^{''}) \lambda_i v_i \geq$$

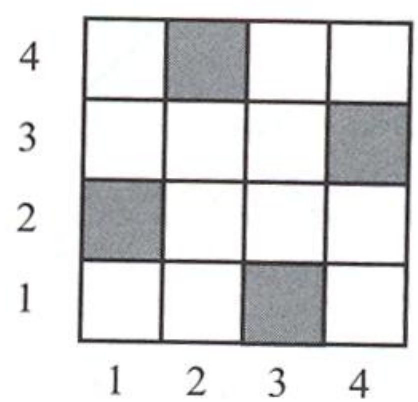
$$\left[(f_j^{''} - f_j^{'}) v_j - \sum_{i=j+1}^{n} (f_i^{'} - f_i^{''}) v_i \right] \lambda_j = 0$$

- αφού λj ≥ λi λόγω του γεγονότος ότι ο αλγόριθμος είναι άπληστος
- Αποδείξαμε ότι η Λ’’ είναι και αυτή βέλτιστη και συμπίπτει με τη λύση του άπληστου αλγόριθμου σε ένα παραπάνω δείκτη.
- Άρα άτοπο.

Οπισθοδρόμηση (και διακλάδωση και φράξιμο)

- Μέθοδος οπισθοδρόμησης:
  - Συστηματική διερεύνηση των πιθανών λύσεων
  - Αποκλεισμός υποψηφίων λύσεων
  - Περιορισμός του συνολικού πλήθους υποψήφιων λύσεων που πρέπει να ελεγχθούν

- Το πρόβλημα των βασιλισσών
  - Ορθογώνιο πλέγμα nxn
  - Μία βασίλισσα σε μία θέση ελέγχει:
    1. όλες τις θέσεις στη γραμμή της
    2. όλες τις θέσεις στη στήλη της
    3. Όλες τις θέσεις στις διαγώνιους 45^o



• Οι βασίλισσες πρέπει να καταλαμβάνουν n διαφορετικές στήλες: η i-στη βασίλισσα στην i-στη στήλη.

• Οι λύσεις συμβολίζονται με τις n τιμές του διανύσματος:

$$V=[V(1),V(2),\dots,V(n)]$$

όπου V(i) είναι στήλη της i-στης βασίλισσας.

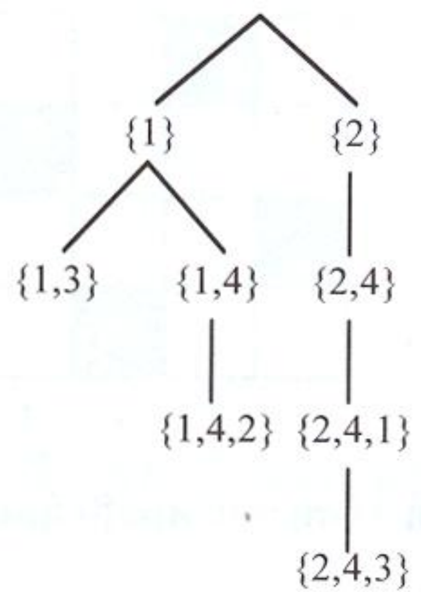
• Όλες οι υποψήφιες λύσεις είναι μεταθέσεις n δεικτών

• Μη αποδεκτές λύσεις, οι λύσεις με $V(i) = V(j)$ όταν $i \neq j$

• Από τις υπόλοιπες, αποδεκτές οι λύσεις με

$$V(j)-V(i) \neq +/- (i-j) \text{ για } i \neq j$$

δηλ. δύο βασίλισσες δε βρίσκονται στην ίδια διαγώνιο.



Χρωματισμός Γραφήματος

Δίνονται κ χρώματα. Να χρωματιστούν οι κορυφές ενός γραφήματος κατά τέτοιον τρόπο ώστε δύο γειτονικές κορυφές να μην έχουν το ίδιο χρώμα

Παράδειγμα τεχνικής οπισθοδρόμησης για κ=3. Εξετάζουμε τα 3 χρώματα Κ (Κόκκινο), Μ (Μπλε), Π (Πράσινο) κυκλικά